

УДК 532.5

## ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ СТАЦИОНАРНЫМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

К. Е. Афанасьев, С. В. Стуколов

Кемеровский государственный университет, 650043 Кемерово

Решаются стационарные задачи циркуляционного обтекания тел потоком тяжелой жидкости, ограниченной свободной поверхностью и прямолинейным дном. Используется метод комплексных граничных элементов, основанный на интегральной формуле Коши, записанной для комплексно-сопряженной скорости. Приведены результаты численных расчетов обтекания кругового контура и руля Жуковского. Представлены формы свободной поверхности и важнейшие гидродинамические характеристики процесса — циркуляция скорости по профилю, подъемная сила и ее момент относительно острой кромки профиля.

Решению задач обтекания профилей различными методами посвящено большое количество работ. В работе [1] для решения задач обтекания профиля используется метод дискретных вихрей, который широко применяется в расчетах.

Решение краевых задач обтекания профилей часто сводится к решению сингулярных интегральных уравнений, которые помимо сингулярной имеют также параметрическую особенность (максимальная толщина профиля). Эта особенность проявляется в том, что по мере утончения профиля уменьшается расстояние между соседними точками на верхней и нижней сторонах его контура. В результате уравнения, записанные отдельно для верхней и нижней сторон профиля, становятся одинаковыми, что создает большие трудности при численном решении задачи в случае тонких профилей и в окрестности задней кромки.

В работе [2] получена система интегральных уравнений относительно касательных составляющих скоростей на верхней и нижней сторонах профиля, которая не имеет указанной параметрической особенности. Для решения системы уравнений используется метод дискретных вихрей, показана его применимость для решения задач обтекания профилей любой толщины включая сколь угодно малую.

В [3] методом граничных элементов (МГЭ) исследовано циркуляционное обтекание системы профилей безграничным потоком жидкости. В качестве интегрального соотношения применяется третья формула Грина для функции тока.

Для решения задач циркуляционного обтекания профилей применять МГЭ с использованием третьей формулы Грина для функции потенциала скоростей  $\varphi(x, y)$  нельзя, так как  $\varphi(x, y)$  определена неоднозначно и при циркуляции, отличной от нуля, терпит разрыв первого рода в острой кромке профиля, в то время как функция тока  $\psi(x, y)$  остается непрерывной [4]. Однако, если ввести новую однозначную функцию  $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \Gamma \operatorname{arg} z / (2\pi)$ , то для решения можно использовать третью формулу Грина, при этом циркуляция  $\Gamma$  входит в решение как дополнительная неизвестная.

В работе [5] рассмотрена стационарная задача обтекания профилей МГЭ с использованием третьей формулы Грина для функции тока, но уже в ограниченном потоке со свободной поверхностью. Для определения неизвестной свободной границы предложены

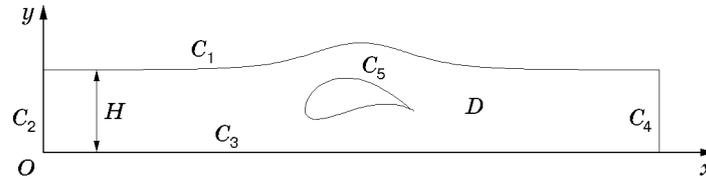


Рис. 1

итерационные алгоритмы для малых и больших чисел Фруда, однако при числах Фруда, близких к единице, решение приведенным в работе методом невозможно.

В [6] для исследования обтекания профиля предложен метод, в котором используется интегральная формула Коши, записанная для касательной и нормальной составляющих скорости. Получено решение как для изолированного профиля, так и для системы профилей в безграничном потоке.

В настоящей работе представлен модифицированный комплексный метод граничных элементов (КМГЭ) для решения стационарных задач циркуляционного обтекания профилей потоком жидкости конечной глубины со свободной поверхностью. Точность метода и алгоритма построения свободной границы определялась в тестовых расчетах.

**1. Постановка задачи.** Пусть одиночный профиль с границей  $C_5$  обтекается потоком весомой жидкости, ограниченной свободной поверхностью  $C_1$ , прямолинейным дном  $C_3$ , участками втекания и вытекания  $C_2$  и  $C_4$  соответственно (рис. 1). Введем следующие обозначения:  $V_\infty$  — скорость втекающего потока,  $H$  — глубина потока. Будем рассматривать задачу в плоскости комплексной переменной  $z = x + iy$ . Движение жидкости описывается функцией  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где  $\varphi$  — потенциал скорости;  $\psi$  — функция тока. При циркуляционном обтекании профиля потенциал терпит разрыв, в то время как поле скоростей остается непрерывным, поэтому задачу проще решать в терминах комплексно-сопряженной скорости:

$$W(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_x - iV_y. \quad (1)$$

Пусть  $\xi$  — точка, принадлежащая контуру, тогда выражение (1) может быть записано в виде

$$W(\xi) = V_x(\xi) - iV_y(\xi) = (V_n(\xi) - iV_s(\xi)) e^{-i\alpha(\xi)},$$

где  $V_s$  и  $V_n$  — касательная и нормальная компоненты вектора скорости в точке  $\xi$ ;  $\alpha$  — угол между направлением  $V_n$  и осью  $Ox$ .

Задача об обтекании профиля может быть сведена к решению уравнения Лапласа

$$\Delta W(z) = 0, \quad z \in D$$

для аналитической в области течения  $D$  функции  $W(z)$ . На профиле и дне выполняется условие непротекания  $V_n = 0$ ,  $z \in C_5, C_3$ . На боковых границах ставится условие втекания и вытекания жидкости  $V_n = \mp V_\infty$ ,  $z \in C_2, C_4$ .

Пусть  $V_s^+$  и  $V_s^-$  — касательные составляющие векторов скорости при подходе к острой кромке с верхней и нижней сторон профиля соответственно. Тогда условие Жуковского — Чаплыгина можно записать следующим образом:  $V_s^+ + V_s^- = 0$ . Введя обозначение  $V_s^0 = V_s^+ + V_s^-$ , условие Жуковского — Чаплыгина запишем в виде

$$V_s^0 = 0, \quad (2)$$

причем в данном случае угол  $\alpha$  будет образован биссектрисой угла в острой кромке и осью  $Ox$ .

Свободная граница является линией тока, на которой справедливо уравнение Бернулли

$$|W(z)|^2 = 1 - 2(\operatorname{Im} z - 1)/\operatorname{Fr}^2, \quad z \in C_1, \quad (3)$$

где  $\operatorname{Fr} = V_\infty/\sqrt{gH}$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. Свободная поверхность  $C_1$  заранее неизвестна и должна быть найдена численно в ходе решения задачи.

**2. Численный метод.** Для функции  $W(z) = V_x(x, y) - iV_y(x, y)$ , аналитичной в области  $D$  и ограниченной кусочно-гладкой границей  $C = \bigcup_{j=1}^5 C_j$ , справедлива интегральная формула Коши, которую с помощью предельных формул Сохоцкого можно записать в виде

$$W(z_0) = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{w(z)}{z - z_0} dz. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon(z_0) = 2\pi$  для внутренней точки,  $\varepsilon(z_0) = \pi$  для точки на гладкой границе  $C$ ,  $\varepsilon(z_0) = \theta$  для угловой точки границы  $C$  ( $\theta$  — угол при вершине). Положительное направление обхода контура  $C$  берется таким образом, чтобы область  $D$  оставалась слева (внешняя граница обходится против часовой стрелки, внутренняя — по часовой).

Так как в ходе решения задачи на границах области известны  $V_s$  и  $V_n$ , то выражение (4) следует переписать следующим образом:

$$W(z_0) = (V_n(z_0) - iV_s(z_0)) e^{-i\alpha(z_0)} = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{(V_n(z) - iV_s(z)) e^{-i\alpha(z)}}{z - z_0} dz.$$

Зная  $V_s$  и  $V_n$ , можно найти  $V_x$  и  $V_y$  по формулам

$$V_x = V_n \cos \alpha - V_s \sin \alpha, \quad V_y = V_s \cos \alpha + V_n \sin \alpha. \quad (5)$$

Поскольку в ходе вычислений на свободной поверхности известна касательная составляющая скорости, а на дне, боковых стенках и профиле — нормальная составляющая, то для функции  $W(z)$  имеем смешанную краевую задачу. Численное решение этой задачи можно получить, разбив контур  $C$  на  $N$  линейных элементов  $\Gamma_j$  узлами  $z_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ). Тогда

$W(z) = \lim_{\max |\Gamma_j| \rightarrow 0} G(z)$ , где  $G(z) = \sum_{j=1}^n W_j \Lambda_j(z)$  — линейная глобальная пробная функция

для  $z \in \sum_{j=1}^n \Gamma_j$ ;  $W_j$  — значение  $W(z)$  в точке  $z_j$ ;  $\Lambda_j(z)$  — линейная базисная функция:

$$\Lambda_j(z) = \begin{cases} (z - z_j)/(z_j - z_{j-1}), & z \in \Gamma_{j-1}, \\ (z_{j+1} - z)/(z_{j+1} - z_j), & z \in \Gamma_j, \\ 0, & z \notin \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j. \end{cases}$$

После указанного разбиения и линейной аппроксимации функции  $W(z)$  на границе интеграл Коши можно вычислить аналитически в смысле главного значения при  $z \rightarrow z_j$ . В результате получим

$$2\pi i W_j = W_{j+1} - W_{j-1} + W_j \ln \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} + \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq j, j+1}}^N I_m, \quad (6)$$

где

$$I_m = W_{m+1} - W_m + \left[ \frac{(z_j - z_m)W_{m+1}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})W_m}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j}.$$

Подставив в (6) разложение комплексной скорости по касательным и нормальным составляющим, получим

$$2\pi i(V_{n_j} - iV_{s_j})e^{-i\alpha_j} = (V_{n_{j+1}} - iV_{s_{j+1}})e^{-i\alpha_{j+1}} - (V_{n_{j-1}} - iV_{s_{j-1}})e^{-i\alpha_{j-1}} + (V_{n_j} - iV_{s_j})e^{-i\alpha_j} \ln \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} + \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq j, j+1}}^N I_m, \quad (7)$$

где

$$I_m = (V_{n_{m+1}} - iV_{s_{m+1}})e^{-i\alpha_{m+1}} - (V_{n_m} - iV_{s_m})e^{-i\alpha_m} + \left[ \frac{(z_j - z_m)(V_{n_{m+1}} - iV_{s_{m+1}})e^{-i\alpha_{m+1}}}{z_{m+1} - z_m} - \frac{(z_j - z_{m+1})(V_{n_m} - iV_{s_m})e^{-i\alpha_m}}{z_{m+1} - z_m} \right] \ln \frac{z_{m+1} - z_j}{z_m - z_j},$$

$$e^{-i\alpha_j} = -i \left( \frac{z_{j+1} - z_j}{|z_{j+1} - z_j|^2} + \frac{z_j - z_{j-1}}{|z_j - z_{j-1}|^2} \right) / \left| \frac{z_{j+1} - z_j}{|z_{j+1} - z_j|^2} + \frac{z_j - z_{j-1}}{|z_j - z_{j-1}|^2} \right|.$$

Записав уравнение (7) для каждого узла границы и разделив мнимые и действительные части, получим

$$S\mathbf{X} + iB\mathbf{X} = 0,$$

где  $S$  и  $B$  — полнозаполненные матрицы  $N \times 2N$  ( $N$  — строки,  $2N$  — столбцы);  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(V_{s_1}, V_{n_1}, V_{s_2}, V_{n_2}, \dots, V_{s_N}, V_{n_N})$  — вектор. Следуя работе [7], получим следующую систему уравнений:

$$Q\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (8)$$

где матрица  $Q$  и вектор правой части  $\mathbf{F}$  получаются следующим образом. Если в узле  $z_j$  задана касательная составляющая скорости  $V_{s_j}$ , то берется  $j$ -я строка матрицы  $B$ . После выборки элементов строки, соответствующих неизвестным значениям  $V_s$  или  $V_n$  во всех остальных узлах, получается  $j$ -я строка матрицы  $Q$ ,  $j$ -й элемент вектора  $\mathbf{X}$  соответствует значению  $V_{n_j}$ ,  $j$ -й элемент вектора  $\mathbf{F}$  — сумма известных значений  $V_s$  или  $V_n$ , умноженных на соответствующие элементы матрицы  $B$ . Если в узле  $z_j$  задана нормальная составляющая скорости  $V_{n_j}$ , то для построения системы (8) используется матрица  $S$ .

Для решения системы (8) используется метод Гаусса с выбором ведущего элемента.

**3. Алгоритм построения свободной границы.** *Определение  $V_s$ .* Следует отметить, что стационарная задача обтекания препятствия имеет неединственное решение для некоторого диапазона чисел Фруда. Качественное поведение решения этой задачи можно определить на примере течения без препятствия. Тривиальное решение данной задачи при любых значениях числа Фруда представляет собой равномерный поток, другим решением является уединенная волна. В работах [8, 9] показано, что данная задача имеет единственное решение, если в качестве определяющего параметра вместо числа Фруда использовать величину  $V = V_0/V_\infty$ , где  $V_0$  — скорость в вершине волны. Для параметра  $V$  уравнение (3) может быть записано в виде

$$|W| = \sqrt{1 - (1 - V^2)(y - 1)/(y_0 - 1)},$$

где  $y_0$  — ордината точки свободной поверхности, в которой задана скорость  $V_0$ .

Поскольку граница  $C_1$  является линией тока, то вектор скорости на ней направлен по касательной к контуру. Отсюда следует, что  $|W| = V_s$ . Для любой точки свободной границы

$$V_{s_j} = \sqrt{1 - (1 - V^2)(y_j - 1)/(y_0 - 1)}, \quad (9)$$

где  $j = \overline{1, N_g}$  — номера узлов точек свободной границы.

*Определение формы свободной границы.* Пусть известно некоторое положение свободной границы  $C_1^{(k)}$ . Алгоритм нахождения свободной границы осуществляется по следующей схеме:

- 1) определяются значения  $V_{s_j}$  в узлах  $z_j$  на  $C_1^{(k)}$  по уравнению (9);
- 2) решается система линейных уравнений (8);
- 3) в точках свободной границы  $C_1^{(k)}$  определяются значения компонент вектора скорости  $V_{x_j}, V_{y_j}$  по (5);
- 4) из условия коллинеарности вектора скорости и касательной к границе  $dy/dx = V_y/V_x$  вычисляется новое положение свободной границы  $C_1^{(k+1)}$

$$y_{j+1}^{k+1} = y_j^{k+1} + \Delta y_j^k,$$

где приращение  $\Delta y_j^k$  определяется на основе разложения в ряд Тейлора:

$$\Delta y_j^k = \frac{V_{y_j}}{V_{x_j}}(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2!} \frac{d}{dx} \left( \frac{V_{y_j}}{V_{x_j}} \right) (x_{j+1} - x_j)^2 + \dots + \frac{1}{4!} \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{V_{y_j}}{V_{x_j}} \right) (x_{j+1} - x_j)^4.$$

Цикл повторяется до достижения требуемой точности:  $\max_j |y_j^{k+1} - y_j^k| < \varepsilon$ , затем вычисляется число Фруда по формуле  $Fr = \sqrt{2(y_0 - 1)/(1 - V^2)}$ . В качестве нулевого приближения берется прямая линия  $y^0 = 1$ , исключение составляет окрестность точки  $y_0$ , в которой начальное значение полагаем  $y_0^0 = 1 + 0,001$ .

**4. Тестовые расчеты.** Для проверки точности модифицированного КМГЭ проводился следующий тест. Требуется найти решение уравнения Лапласа для функции  $W(z)$  в области  $D = \{0 \leq x \leq 2\pi; -1 \leq y \leq 0,5 \sin x\}$ , для которой на дне и вертикальных стенках ставится условие непротекания  $V_n = 0$ , а на верхней границе задается гармоническая функция  $V_s = (\sin x \operatorname{ch}(y + 1) - \cos^2 x \operatorname{sh}(y + 1))/\sqrt{1 + \cos^2 x}$ . В табл. 1 (графа 2) приведена относительная погрешность  $E_1 = \max |V_n^T - V_n^C| / \max |V_n^T|$  в зависимости от числа узлов на границе, где  $V_n^C$  — численное значение функции, полученное КМГЭ;  $V_n^T = (\sin x \operatorname{ch}(y + 1) + \operatorname{sh}(y + 1)) \cos x / \sqrt{1 + \cos^2 x}$  — точное значение. В графе 3 приведены числа обусловленности  $K(Q)$  системы (8).

Целью второго теста являлась проверка алгоритма построения свободной поверхности. При отсутствии препятствия в потоке, варьируя параметр  $V$ , в результате решения задачи получены уединенные стационарные волны, параметры которых мало отличаются от полученных в работе [6], в которой используется аналогичный метод построения свободной границы, но решение основано на обычном КМГЭ. В табл. 2 приведены значения числа Фруда  $Fr$  и амплитуды  $A$  уединенных волн. В графе 1 приведены значения, полученные с использованием модифицированного КМГЭ, в графе 2 — с использованием традиционного КМГЭ (результаты взяты из [9]).

Таблица 1

| $N$ | $E_1$               | $K(Q)$ |
|-----|---------------------|--------|
| 77  | $1,2 \cdot 10^{-2}$ | 9,44   |
| 144 | $2,8 \cdot 10^{-3}$ | 10,32  |
| 288 | $6,9 \cdot 10^{-4}$ | 11,26  |
| 496 | $1,7 \cdot 10^{-4}$ | 13,43  |

Таблица 2

| $V$  | Настоящая работа |        | [9]    |        |
|------|------------------|--------|--------|--------|
|      | $Fr$             | $A$    | $Fr$   | $A$    |
| 0,01 | 1,2913           | 0,8337 | 1,2909 | 0,8332 |
| 0,70 | 1,1541           | 0,3396 | 1,1540 | 0,3395 |

Третий тест проводился на задаче обтекания профиля Жуковского безграничным потоком жидкости. Данная задача имеет аналитическое решение и является хорошей тестовой проверкой численного результата. Профиль Жуковского может быть задан параметрически в виде [3]

$$x(t) = \frac{c(c^2 + b^2 + 1)}{2(c^2 + b^2)} - 1, \quad y(t) = \frac{c(c^2 + b^2 - 1)}{2(c^2 + b^2)}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (10)$$

где  $c = R \cos(t - \gamma) - d \cos \gamma$ ;  $b = R \sin(t - \gamma) + d \sin \gamma + h$ ;  $R = \sqrt{1 + h^2} + d$ ;  $\gamma = \operatorname{arctg} h$ . Параметры  $d$  и  $h$  характеризуют толщину и искривленность профиля. Скорость потока на профиле определяется аналитически в параметрическом виде

$$V_s(t) = \frac{V_\infty R \sin(\beta + \gamma - t) + \Gamma/(2\pi)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad (11)$$

где  $\beta$  — угол атаки;  $\Gamma = -2\pi R V_\infty \sin(\beta + \gamma)$  — циркуляция скорости вдоль контура профиля. Численное значение циркуляции определялось по формуле [10]

$$\Gamma = \int_C V_s ds.$$

Коэффициенты подъемной силы  $F_y$  и силы сопротивления  $F_x$  вычислялись следующим образом:

$$F_y = - \int_C V_s^2 \sin \alpha(s) ds, \quad F_x = \int_C V_s^2 \cos \alpha(s) ds.$$

Дополнительным критерием правильности численных расчетов может служить условие  $F_x = 0$  — парадокс Даламбера в случае идеальной жидкости.

Коэффициент момента силы  $M$  относительно острой кромки с координатами  $(x_0, y_0)$  может быть вычислен по формуле

$$M(x_0, y_0) = - \int_C V_s^2 ((x - x_0) \sin \alpha(s) + (y - y_0) \cos \alpha(s)) ds.$$

Результаты решения можно объяснить следующим образом: если  $\Gamma < 0$ , то  $F_y > 0$ , и наоборот, если  $\Gamma > 0$ , то  $F_y < 0$ . Отрицательное значение момента подъемной силы означает, что она стремится повернуть тело относительно точки  $(x_0, y_0)$  по часовой стрелке, положительное — против часовой стрелки.

Интегральная формула Коши справедлива и для безграничной области  $D$ , если функция  $W(z)$  обращается в нуль на бесконечности. При обтекании профиля безграничным потоком жидкости комплексный потенциал на бесконечности имеет следующее разложение:

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = a + V_\infty e^{-i\beta} z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

где  $a$  — произвольная комплексная постоянная. Комплексно-сопряженная скорость потока на бесконечности определяется по формуле

$$W(z) = V_x(x, y) - iV_y(x, y) = V_\infty e^{-i\beta}. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (4) примет вид

$$W(z_0) = V_\infty e^{-i\beta} + \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{W(z)}{z - z_0} dz.$$

Таблица 3

| $\beta$ , град | $d$ | $h$ | $\Gamma$ | $\Gamma_{200}$ | $E_2$ | $F_x$  | $F_y$  | $M$     |
|----------------|-----|-----|----------|----------------|-------|--------|--------|---------|
| 0              | 0,2 | 0,2 | -1,503   | -1,493         | 0,004 | 0,0002 | 2,978  | -3,318  |
| 0              | 0,2 | 0,5 | -3,703   | -3,671         | 0,007 | 0,001  | 7,338  | -8,108  |
| 15             | 0,2 | 0   | -1,951   | -1,935         | 0,005 | 0,001  | 3,868  | -5,880  |
| 15             | 0,2 | 0,2 | -3,397   | -3,371         | 0,007 | 0,002  | 6,739  | -8,886  |
| 15             | 0,2 | 0,5 | -5,494   | -5,446         | 0,009 | 0,003  | 10,887 | -12,744 |

В данном случае контур обходится по часовой стрелке. При построении системы уравнений (8) следует ввести слагаемое в известный правый вектор  $\mathbf{F}$  (мнимую или действительную часть  $V_\infty e^{-i\beta}$  к каждому элементу вектора в зависимости от заданного граничного условия в  $j$ -м узле).

В табл. 3 приведены значения гидродинамических характеристик в зависимости от угла атаки, толщины и искривленности профиля ( $\Gamma$  — точное значение циркуляции,  $\Gamma_{200}$  — численное значение циркуляции, 200 — количество узлов по границе профиля,  $E_2 = \max |V_s^t - V_s^c| / \max |V_s^t|$  — относительная погрешность,  $V_s^c$  — численное значение функции, полученное КМГЭ,  $V_s^t$  — точное значение, определяемое формулой (11),  $F_x$ ,  $F_y$  — коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы,  $M$  — момент подъемной силы относительно острой кромки профиля). Приведенные значения  $F_x$  близки к нулю, а относительная погрешность найденных значений  $V_s$  незначительна, что свидетельствует о достаточно высокой точности разработанного метода.

**5. Численные результаты.** В качестве примера рассмотрены две задачи: циркуляционное обтекание кругового контура диаметром  $d = 0,4H$  и руля Жуковского ( $d = 0,2H$ ;  $h = 0$ ), построенного по формулам (10), а затем пропорционально уменьшенного до  $l = 0,4H$ , где  $l$  — длина хорды профиля. Граница области аппроксимировалась 500 элементами, 100 из которых задавали обтекаемый объект, 200 — свободную границу, 150 — прямолинейное дно, 50 — участки втекания и вытекания.

Если для руля Жуковского точка схода линий тока находится в острой кромке, то для кругового контура она неизвестна, и для однозначного решения задачи необходимо задать либо циркуляцию скорости на круговом контуре, либо точку схода. Для того чтобы задать точку схода, нужно использовать условие (2) Жуковского — Чаплыгина в этой точке.

Из анализа результатов расчетов циркуляционного обтекания кругового контура и руля Жуковского следует, что при числах Фруда, близких к единице, задача имеет неедин-

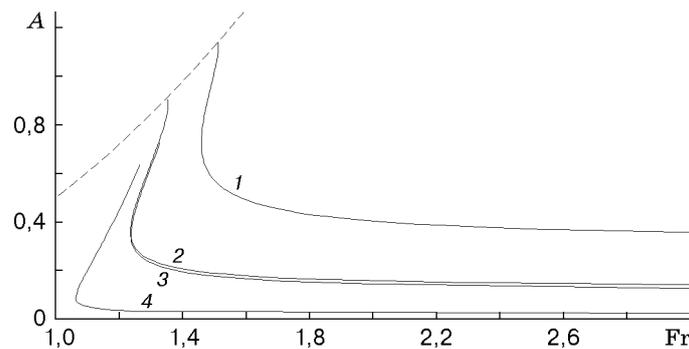


Рис. 2

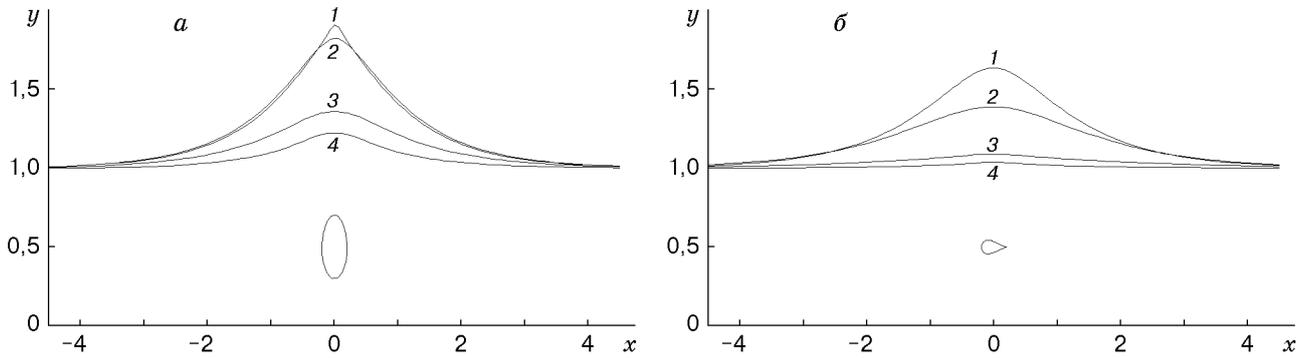


Рис. 3

ственное решение. На рис. 2 представлены результаты расчетов зависимости амплитуды  $A$  от числа Фруда  $Fr$  при обтекании кругового контура, центр которого находился в точке  $(0; 0,5)$  (кривой 1 соответствует точка схода  $(0,152; 0,37)$ , кривой 2 —  $(0,2; 0,5)$ ), и руля Жуковского, острая кромка которого находилась в точке  $(0,2; 0,5)$  (кривой 3 соответствует угол атаки  $\beta = 15^\circ$ , кривой 4 —  $\beta = 0$ ). Штриховая линия соответствует зависимости  $A_{\max} = Fr^2/2$  и является пределом по амплитуде существования стационарных решений. Кривые 3, 4 не достигают штриховой линии. Видимо, для циркуляционного обтекания профилей справедлива другая оценка верхней границы для амплитуд, при которых задача имеет стационарное решение.

На рис. 3 показаны формы свободной поверхности при обтекании двух тел: *a* — кругового контура (точка схода  $(0,2; 0,5)$ ): 1 —  $Fr = 1,351$ ,  $A = 0,904$ ; 2 —  $Fr = 1,346$ ,  $A = 0,818$ ; 3 —  $Fr = 1,235$ ,  $A = 0,356$ ; 4 —  $Fr = 1,346$ ,  $A = 0,22$ ; *б* — руля Жуковского ( $\beta = 0$ ): 1 —  $Fr = 1,264$ ,  $A = 0,634$ ; 2 —  $Fr = 1,173$ ,  $A = 0,383$ ; 3 —  $Fr = 1,064$ ,  $A = 0,087$ ; 4 —  $Fr = 1,173$ ,  $A = 0,035$ . Кривые 1 соответствуют волне максимальной амплитуды, для которой получено стационарное решение, кривые 2, 4 — одному и тому же числу Фруда, но различным амплитудам (демонстрируют неединственность), кривые 3 — числу Фруда, ниже которого стационарные решения отсутствуют.

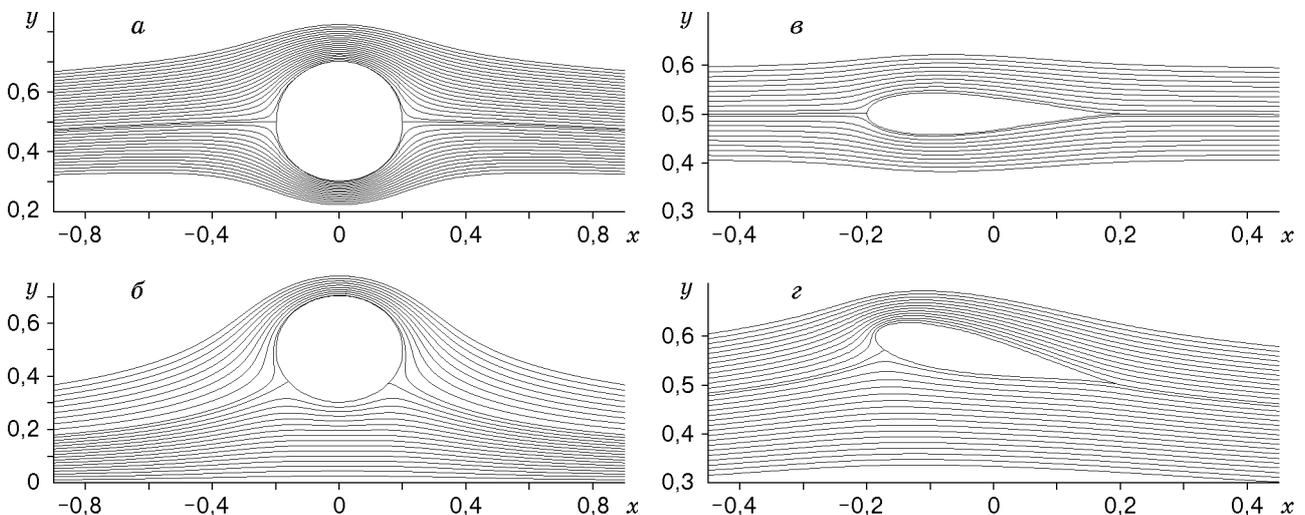


Рис. 4

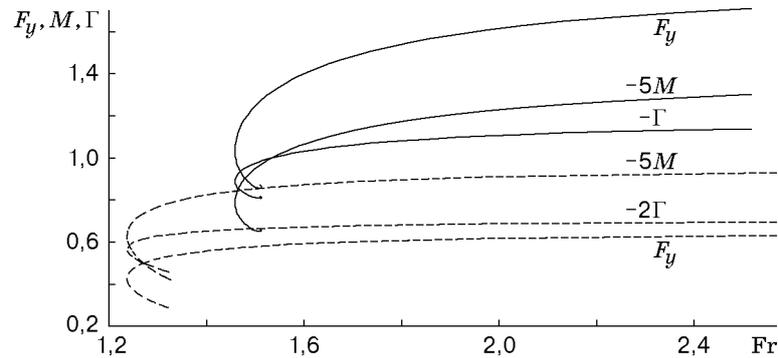


Рис. 5

На рис. 4 приведены картины линий тока поля течения вблизи обтекаемого объекта: *a* — круговой контур (точка схода  $(0,2; 0,5)$ ;  $Fr = 1,235$ ;  $A = 0,356$ ); *b* — круговой контур (точка схода  $(0,152; 0,37)$ ;  $Fr = 1,458$ ;  $A = 0,718$ ); *в* — руль Жуковского ( $\beta = 0$ ;  $Fr = 1,064$ ;  $A = 0,087$ ); *г* — руль Жуковского ( $\beta = 15^\circ$ ;  $Fr = 1,237$ ;  $A = 0,355$ ). Для построения линий тока вычислялось поле скоростей в области течения. Хорошее согласование картин течения с условием Жуковского косвенно подтверждает правильность расчетов.

На рис. 5 представлены зависимости гидродинамических характеристик от числа Фруда. Сплошные кривые соответствуют обтеканию кругового контура с точкой схода  $(0,152; 0,37)$ ; штриховые — обтеканию руля Жуковского с углом атаки  $\beta = 15^\circ$ . Для двух других обтекаемых объектов графики не приведены из-за малости значений их гидродинамических характеристик.

**Заключение.** В данной статье разработан эффективный численный метод расчета нелинейной стационарной задачи циркуляционного обтекания профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкостью. С целью выполнения условия Жуковского — Чаплыгина в острой кромке использован подход, отличный от подходов в цитируемых работах по данной тематике. Для решения задачи модифицирован КМГЭ и применен хорошо зарекомендовавший себя алгоритм построения свободной границы [8, 9]. При циркуляционном обтекании кругового контура и руля Жуковского обнаружена неоднозначность решения при числах Фруда, близких к единице. Поскольку данная задача является многопараметрической, более полное исследование влияния всех параметров задачи на гидродинамические характеристики крыла будет проведено в дальнейшем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
2. Горелов Д. Н. Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 173–177.
3. Терентьев А. Г., Каргузова Т. В. Численные исследования системы крыловых профилей методом граничных элементов // Актуальные задачи математики и механики: Сб. науч. тр. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1995. С. 108–116.
4. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. М.: ГОНТИ, 1938.
5. Ясько Н. Н. Численное решение нелинейной задачи о движении плоского крылового профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 4. С. 100–107.
6. Мокру М. Complex variable boundary element method for external potential flows // AIAA J. 1990. V. 127. P. 1–11.

7. **Громадка Т., Лей Ч.** Комплексный метод граничных элементов. М.: Мир, 1990.
8. **Гузевский Л. Г.** Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошных сред с границами раздела: Сб. науч. тр. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1982. С. 61–69.
9. **Афанасьев К. Е., Стуколов С. В.** О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 27–35.
10. **Валландер С. В.** Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.

*Поступила в редакцию 2/VI 1999 г.,  
в окончательном варианте — 20/VII 1999 г.*

---