

УДК 532.5:532.517.4

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА В СЖИМАЕМОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА. ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008 Новосибирск

E-mails: grigor@ict.nsc.ru, i_ershov@ngs.ru

В рамках нелинейной энергетической теории устойчивости сжимаемых течений численно решена вариационная задача определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода. Для течения Куэтта сжимаемого газа методом коллокаций получены оценки устойчивости различных мод. Показано, что в реальном для двухатомных газов диапазоне отношений объемной вязкости η_b к сдвиговой вязкости η минимальные критические значения числа Рейнольдса достигаются на модах продольных возмущений. С ростом объемной вязкости в диапазоне $\eta_b = 0 \div 2\eta$ эти значения возрастают, увеличиваясь в пределе приблизительно на 30 %.

Ключевые слова: энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, сжимаемый газ, объемная вязкость, критическое число Рейнольдса.

Введение. В работе [1] энергетическая теория гидродинамической устойчивости [2] была обобщена на случай течений сжимаемых газов. В [3] на основе этого обобщения получено асимптотическое решение вариационной задачи определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода Re_{cr} в сжимаемом течении Куэтта. В пределе малых волновых чисел возмущений найдена зависимость главного члена асимптотики от объемной вязкости в виде $Re_{cr} \sim \sqrt{\alpha + 4/3}$, где $\alpha = \eta_b/\eta$; η, η_b — сдвиговая и объемная вязкости соответственно.

В данной работе вариационная задача, сформулированная в [3], решается численно во всем диапазоне значений волновых чисел продольных и поперечных возмущений.

1. Основные уравнения и функционалы. Задача устойчивости течения Куэтта рассматривается на основе системы уравнений Навье — Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Расчетная область Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3) , а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2 .

В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны полуширина канала L по оси x_2 , модуль скорости U_0 на непроницаемых стенках канала, плотность ρ_0 и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00116).

температура T_0 основного потока, время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. В безразмерных переменных система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) M_0^2 p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \quad \gamma M_0^2 p = \rho T, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , u_i , T , p — плотность, компоненты вектора скорости, температура и давление газа соответственно. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается, что теплоемкости и диссипативные коэффициенты в системе (1) не зависят от температуры и постоянны. В уравнении энергии опущена группа нелинейных слагаемых, определяющих диссипативную функцию. Такое приближение является распространенным в задачах устойчивости сжимаемых течений [4, 5]. Параметры, входящие в уравнения (1), определяются следующим образом: коэффициент α равен отношению объемной вязкости к сдвиговой ($\alpha = \eta_b/\eta$) и характеризует степень неравновесности внутренних степеней свободы молекул газа; $M_0 = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ — число Маха основного потока; $\text{Re} = U_0 L \rho_0/\eta$ — число Рейнольдса; $\text{Pr} = \eta c_p/\lambda_0$ — число Прандтля; R — газовая постоянная; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты; c_p , c_v — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно; λ_0 — теплопроводность.

Плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температуры, являющееся точным стационарным решением системы (1), определяется соотношениями

$$U_s(x_2) = (x_2, 0, 0), \quad T_s(x_2) = \rho_s(x_2) = 1, \quad p_s(x_2) = 1/(\gamma M_0^2).$$

Представление мгновенных значений гидродинамических величин возмущенного течения в виде

$$\rho = 1 + \rho', \quad u_i = U_{s,i} + u'_i, \quad T = 1 + T', \quad p = 1/(\gamma M_0^2) + p'$$

позволяет получить уравнения для возмущений ρ' , u'_i , T' , p' основного течения без ограничения на их амплитуды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) M_0^2 p \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2}, \\ \gamma M_0^2 p' = \rho T' + \rho', \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что при $x_1 = \pm x_0/2$ и $x_3 = \pm z_0/2$ возмущения скорости u'_i , плотности ρ' и давления p' удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. Для возмущения температуры T' ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-x_0/2} = \frac{\partial T'}{\partial x_1} \Big|_{x_1=+x_0/2}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-1} = \frac{\partial T'}{\partial x_2} \Big|_{x_2=+1} = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-z_0/2} = \frac{\partial T'}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+z_0/2}. \end{aligned}$$

В расчетах размеры области Ω по периодическим (однородным) координатам x_1, x_3 полагались равными длине волны возмущения по соответствующей координате:

$$x_0 = 2\pi/\beta, \quad z_0 = 2\pi/\delta.$$

Здесь β, δ — модули проекций волнового вектора возмущения \mathbf{k} на оси координат x_1, x_3 .

В отличие от несжимаемой жидкости полная энергия возмущений в сжимаемом молекулярном газе помимо кинетической составляющей должна в какой-либо форме включать энергию внутренних степеней свободы молекул. В работах [1, 3] для задачи (2) рассматривался положительно определенный для любых возмущений функционал полной энергии возмущений

$$E_t(t) = \int_{\Omega} \rho \left(\frac{u_i'^2}{2} + \frac{T}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \right) d\Omega.$$

С учетом выбранного способа обезразмеривания слагаемое $\rho T/[\gamma(\gamma-1)M_0^2]$ представляет собой внутреннюю энергию газа в единице объема. Для данного функционала уравнение энергетического баланса записывается в форме

$$\frac{dE_t}{dt} \equiv \Phi = - \int_{\Omega} \left\{ (1 + \rho') u_i' u_j' \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\} d\Omega. \quad (3)$$

На основе (3) можно сформулировать вариационную задачу оценки критического числа Рейнольдса Re_{cr} , которое соответствует условию $dE_t/dt = 0$ и вычисляется как минимум функционала в правой части энергетического уравнения.

С целью дальнейшего упрощения уравнения (3) в нем выполнялось частичное разделение переменных. Зависимости возмущений скорости, плотности и температуры от периодической координаты x_3 представлялись в виде

$$u_1' = u_1''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad u_2' = u_2''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad u_3' = u_3''(x_1, x_2) \sin(\delta x_3), \quad (4)$$

$$\rho' = \rho''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3), \quad T' = T''(x_1, x_2) \cos(\delta x_3).$$

Здесь амплитудные функции u_i'', ρ'', T'' при $x_1 = \pm\pi/\beta$ удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения.

С использованием представления (4) в уравнении (3) проводится интегрирование по переменной x_3 в пределах $[-\pi/\delta; \pi/\delta]$. В результате энергетическое уравнение принимает вид [3]

$$\frac{dE_t''}{dt} \equiv \Phi'' = - \int_S \left\{ u_1'' u_2'' + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2''}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2''}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\partial u_3''}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3''}{\partial x_2} \right)^2 + \delta^2 (u_1''^2 + u_2''^2 + u_3''^2) + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3'' \right)^2 \right] \right\} dS.$$

Как показано в [6], операции варьирования и частичного интегрирования по однородным координатам перестановочны и изменение порядка их выполнения не приводит к изменению исходной вариационной задачи. Вместе с тем варьируемый функционал Φ'' в правой части становится квадратичным по функциям возмущений u_i и их производным.

2. Спектральная задача и метод ее решения. Из условия экстремума функционала Φ'' следует система уравнений Эйлера — Лагранжа [3], определяющая дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re . После подстановки в систему вектора пульсаций скорости \mathbf{u}'' в виде

$$\mathbf{u}'' \equiv (u_1'', u_2'', u_3'') = (u, v, w)(x_2) \exp(i\beta x_1),$$

где β — проекция волнового вектора на координатную ось x_1 ; i — мнимая единица, получается система уравнений для амплитуд пульсаций компонент скорости u , v , w :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx_2^2} + i\beta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{dv}{dx_2} - \left[\beta^2\left(\alpha + \frac{4}{3}\right) + \delta^2\right]u + i\beta\delta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)w - \frac{\text{Re}}{2}v &= 0, \\ \left(\alpha + \frac{4}{3}\right)\frac{d^2 v}{dx_2^2} + i\beta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{du}{dx_2} + \delta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{dw}{dx_2} - (\beta^2 + \delta^2)v - \frac{\text{Re}}{2}u &= 0, \\ \frac{d^2 w}{dx_2^2} - \delta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{dv}{dx_2} - i\beta\delta\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)u - \left[\delta^2\left(\alpha + \frac{4}{3}\right) + \beta^2\right]w &= 0, \\ u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Спектральная задача (5) имеет следующие свойства.

1. Все собственные значения Re задачи (5) вещественны, что следует из энергетического тождества для данной системы. Последнее получается умножением уравнений (5) на комплексно-сопряженные функции u^* , v^* , w^* , суммированием их и интегрированием по интервалу $x_2 \in [-1, 1]$. С учетом однородных граничных условий имеет место выражение

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_{-1}^1 (v_r u_r + v_i u_i) dx_2 &= \int_{-1}^1 \left[\left| \frac{du}{dx_2} \right|^2 + \left(\alpha + \frac{4}{3}\right) \left| \frac{dv}{dx_2} \right|^2 + \left| \frac{dw}{dx_2} \right|^2 \right] dx + \\ &+ \int_{-1}^1 \left[\left(\beta^2\left(\alpha + \frac{4}{3}\right) + \delta^2\right) |u|^2 + (\beta^2 + \delta^2) |v|^2 + \left(\delta^2\left(\alpha + \frac{4}{3}\right) + \beta^2\right) |w|^2 \right] dx_2 + \\ &+ 2\left(\alpha + \frac{1}{3}\right) \int_{-1}^1 \left[\delta\beta(u_r w_i - u_i w_r) + \beta\left(v_r \frac{du_i}{dx_2} + u_r \frac{dv_i}{dx_2}\right) + \delta\left(w_r \frac{dv_r}{dx_2} + w_i \frac{dv_i}{dx_2}\right) \right] dx_2. \end{aligned}$$

Здесь индексы r , i обозначают вещественную и мнимую части соответствующих комплекснозначных функций. Вещественность спектрального параметра Re определяется вещественностью всех слагаемых полученного тождества. Вместе с тем квадратичная форма, которую определяет энергетическое тождество, не является положительно определенной. Это означает, что собственные значения могут быть также отрицательными, поэтому в расчетах следует искать минимальное по модулю собственное значение $\min |\text{Re}|$.

2. Спектр собственных значений $\text{Re}(\beta, \delta)$ симметричен относительно осей $\beta = 0$, $\delta = 0$ на плоскости волновых чисел (β, δ) . Действительно, из уравнений системы (5) следует, что каждому собственному значению $\text{Re}(\beta, \delta)$ с собственными функциями u , v , w соответствует равное ему собственное значение $\text{Re}(-\beta, \delta)$ с собственными функциями u^* , v^* , w^* . Это же собственное значение $\text{Re}(\beta, \delta)$ соответствует также паре волновых чисел $(\beta, -\delta)$ и набору собственных функций u , v , $-w$.

В [3] для задачи (5) в случае длинноволновых продольных ($\beta \ll 1$, $\delta = 0$) и поперечных ($\beta = 0$, $\delta \ll 1$) возмущений с точностью до членов порядка $O(\beta^2 + \delta^2)$ в пределе получены асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса в виде

$$\text{Re}_{cr}^{(\beta)} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha + \frac{4}{3}} - \frac{\pi\beta(1 + 3\alpha)}{6}, \quad \text{Re}_{cr}^{(\delta)} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha + \frac{4}{3}}. \quad (6)$$

В данной работе при произвольных значениях волновых чисел β , δ спектральная задача (5) решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций,

основанный на полиномиальной интерполяции собственных функций полиномами Чебышева [7, 8]. В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса — Лобатто $x_{2,k} = \cos(\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N$, в которых полином Чебышева N -й степени $T_N(x_2)$ имеет экстремумы на отрезке $[-1, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [7] размером $(N+1) \times (N+1)$. Ее элементы определяются по формулам

$$D_{N,l,j}^1 = \begin{cases} (-1)^{l+j} s_l / [s_j(z_l - z_j)], & l \neq j, \\ -z_j / [2(1 - z_j^2)], & 1 \leq l = j \leq N-1, \\ (2N^2 + 1)/6, & l = j = 0, \\ -(2N^2 + 1)/6, & l = j = N, \end{cases} \quad s_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

При этом элементы l -й строки матрицы D_N^1 являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в l -м узле коллокации на шаблоне $\{x_{2,k}\}$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$.

В терминах введенных аппроксимаций задача (5) сводится к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \text{Re}/2$:

$$\sum_{j=0}^{3N+2} [G_{kj} - \lambda F_{kj}] q_j = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 3N+2. \quad (7)$$

Здесь вектор неизвестных \mathbf{q} размером $3(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{q} = (u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, w_0, w_1, \dots, w_N),$$

матрицы G, F размером $3(N+1) \times 3(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^2 + B \otimes D_N^1 + C \otimes I_N, \quad F = K \otimes I_N,$$

знак “ \otimes ” обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [9]; I_N — единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$; A, B, C, K — матрицы размером 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i\beta(\alpha + 1/3) & 0 \\ i\beta(\alpha + 1/3) & 0 & \delta(\alpha + 1/3) \\ 0 & -\delta(\alpha + 1/3) & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -[\beta^2(\alpha + 4/3) + \delta^2] & 0 & i\beta\delta(\alpha + 1/3) \\ 0 & -(\beta^2 + \delta^2) & 0 \\ -i\beta\delta(\alpha + 1/3) & 0 & -[\delta^2(\alpha + 4/3) + \beta^2] \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однородные граничные условия для системы (7) учитываются неявно через оператор D_N^1 [7] и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k ($k = 1, 2$) на окаймленные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^k = D_{N+1,j}^k = 0, \quad D_{l,0}^k = D_{l,N+1}^k, \quad l, j = 0, \dots, N+1, \quad k = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (7) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [10], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G , F к обобщенной верхней треугольной форме. Этот алгоритм является обобщением более известного QR-алгоритма, приводящего невырожденные квадратные матрицы к верхней треугольной форме и используемого для решения стандартной задачи на собственные значения.

В результате применения данной процедуры для фиксированных значений параметра α (объемной вязкости) и каждой пары волновых чисел (β, δ) получался набор $N + 1$ собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\text{Re}(\beta, \delta) = 2|\lambda_{\min}(\beta, \delta)|$, и вычислялись соответствующие ему собственные функции u , v , w . Значение критического числа Рейнольдса Re_{cr} для данного α принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\text{Re}(\beta, \delta)$: $\text{Re}_{cr} = \min_{(\beta, \delta)} [\text{Re}(\beta, \delta)]$.

3. Результаты расчетов и обсуждение. Расчеты спектров собственных значений $\lambda(\alpha, \beta, \delta)$ проводились при значениях параметра $\alpha = 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ в диапазоне волновых чисел $\beta = 0 \div 5$, $\delta = 0 \div 5$. Для проверки точности расчетов на основе симметрии спектра выполнялись расчеты в области $\beta = -5 \div 5$, $\delta = -5 \div 5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\beta = h_\delta = 0,1$. В большинстве расчетов число узлов коллокации принималось равным $N + 1 = 50$. Для проверки точности вычисления собственных значений варьировалось также число узлов коллокации: $N + 1 = 32 \div 100$. Примеры расчетных зависимостей $\text{Re}(\beta, \delta)$ при различных значениях объемной вязкости α представлены на рис. 1. Расчеты показали, что для всех фиксированных α минимальные по модулю собственные значения $\text{Re}(\beta, \delta) = 2|\lambda_{\min}(\beta, \delta)|$ достигаются на оси $\beta \neq 0$ (при $\delta = 0$) в плоскости волновых чисел (β, δ) . Зависимости спектрального параметра от волнового числа $\text{Re}(\beta)$ при $\delta = 0$ и выбранных значениях объемной вязкости α приведены на рис. 2. Штрихпунктирная линия соединяет значения абсолютных минимумов на параметризованных по α кривых $\text{Re}_{cr}(\alpha)$. Значения этих величин в зависимости от параметра α приведены в таблице.

Анализ расчетных зависимостей показывает, что с увеличением параметра α критические значения числа Рейнольдса Re_{cr} и соответствующие им значения волнового числа β

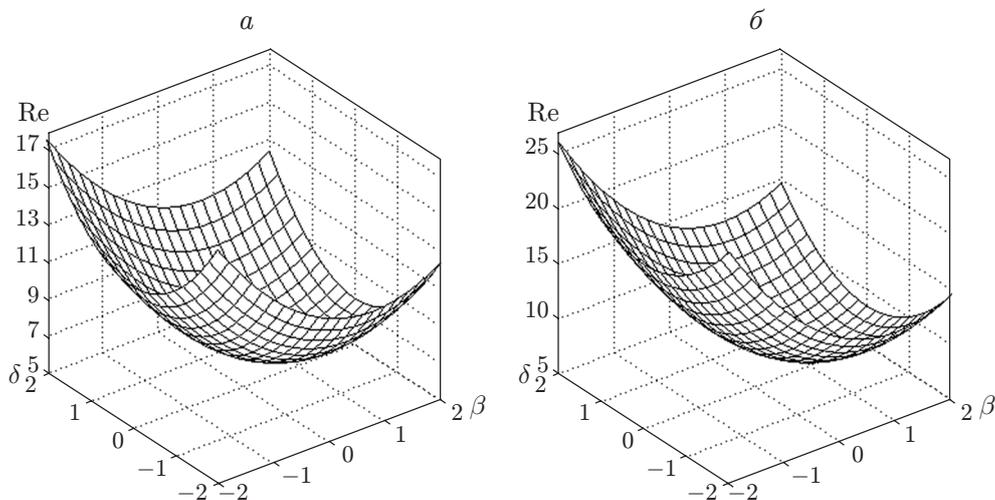


Рис. 1. Зависимость спектрального параметра от волновых чисел $\text{Re}(\beta, \delta)$ при различных значениях α :

a — $\alpha = 0,5$; b — $\alpha = 1,5$

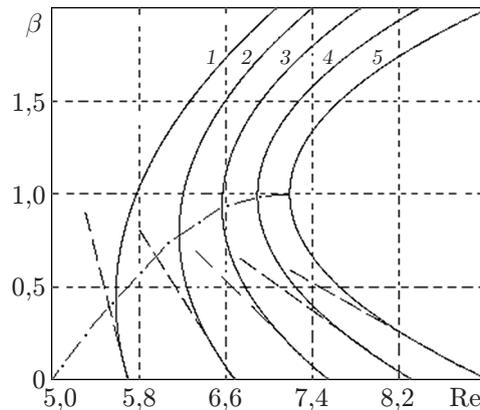


Рис. 2. Зависимости спектрального параметра от волнового числа $Re(\beta)$ при различных значениях α :

1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 0,5$; 3 — $\alpha = 1$; 4 — $\alpha = 1,5$; 5 — $\alpha = 2$; штриховые линии — асимптоты $Re_{cr}^{(\beta)}$ (6); штрихпунктирная линия — зависимость критического числа Рейнольдса от волнового числа $Re_{cr}(\beta)$

Критические значения числа Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha)$
в зависимости от волнового числа β при $\delta = 0$

α	Re_{cr}	β
0	5,585	0,431
0,5	6,170	0,782
1,0	6,565	0,929
1,5	6,892	0,982
2,0	7,189	0,993

возрастают. Таким образом, при возрастании α в диапазоне, характерном для двухатомных газов, увеличение критического числа Рейнольдса может составлять 30 %.

В случае длинноволновых возмущений асимптотические значения $Re_{cr}^{(\beta)}$, определенные в (6), существенно превышают соответствующие расчетные критические значения числа Рейнольдса $Re(\alpha, \beta)$ и близки к ним только при $\beta < 0,25$.

Зависимости вещественных u_r, v_r и мнимых u_i, v_i частей собственных функций u, v , соответствующих критическим числам Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha)$, от координаты x_2 представлены на рис. 3. В работе [2] показано, что при $\delta = 0$ собственные функции w системы (5) равны нулю.

С учетом периодичности возмущений по продольной координате x_1 определенные на основе энергетической теории наиболее опасные возмущения можно интерпретировать как цепочку вихрей, оси которых перпендикулярны плоскости течения.

Следует отметить, что в данном случае критические числа Рейнольдса достигаются на продольных модах $\beta \neq 0, \delta = 0$. В то же время во всех известных авторах настоящей работы расчетах устойчивости плоских несжимаемых течений в рамках энергетической теории (см. работы [2, 6] и библиографию к ним) минимальные числа Рейнольдса были получены для поперечных мод $\beta = 0, \delta \neq 0$. При этом их значения существенно превышают полученные в данной работе. Следовательно, наиболее опасные возмущения представляли собой двумерные вихри с осями, параллельными несущему потоку. Вопрос о несоответствии этих результатов известной теореме Сквайра [5, 6] остается открытым, хотя значение последней не следует переоценивать.

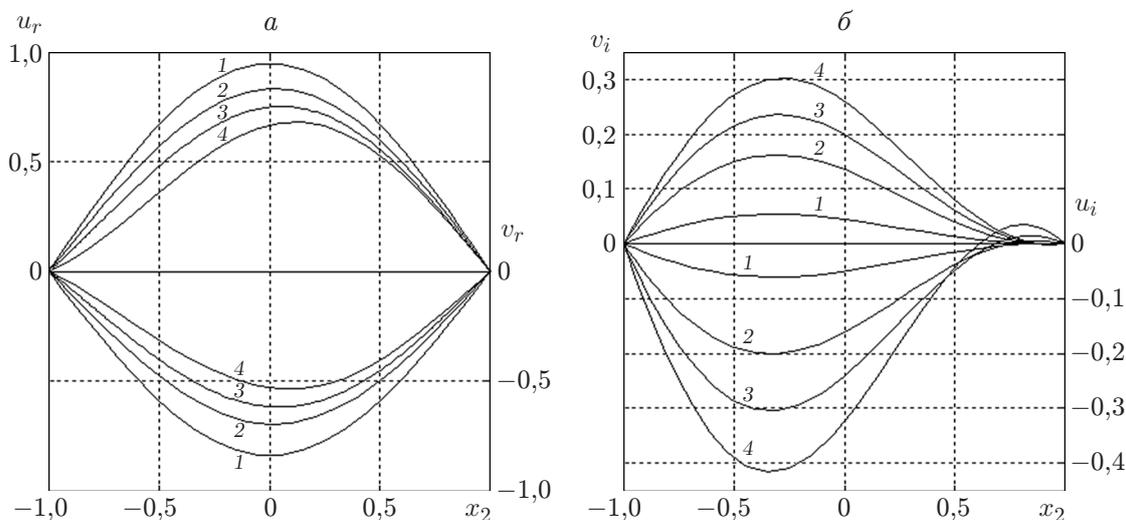


Рис. 3. Зависимости от координаты x_2 собственных функций u_r и v_r (а) и u_i , v_i (б), соответствующих критическим числам Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha)$:
 1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 0,5$; 3 — $\alpha = 1$; 4 — $\alpha = 2$

В частности, в работе [11] плоское течение Куэтта рассматривалось на основе уравнений Обербека — Буссинеска для неоднородной несжимаемой жидкости. В [12] тем же методом исследовалась устойчивость течения Пуазейля в трубах и каналах на основе модели Навье — Стокса. В обоих случаях рассматривалась задача на условный экстремум энергетического функционала на подпространстве соленоидальных полей.

Как известно, с физической точки зрения сжимаемость не может оказывать значительное влияние на свойства течения Куэтта. Вместе с тем вариационная задача (5) существенно отличается от соответствующей задачи для несжимаемых течений [2, 6], поэтому причиной отмеченного различия может являться либо дополнительное условие соленоидальности течения, либо предположение о наличии зависимости возмущений (4) от трансверсальной координаты. Эти альтернативы будут рассмотрены в одной из следующих работ.

Авторы выражают благодарность А. В. Бойко и Ю. Д. Нечепуренко, познакомившим их с возможностями пакета Matlab при решении задач гидродинамической устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю. Н. К энергетической теории устойчивости сжимаемых течений // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11. С. 55–62. (Спецвыпуск).
2. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
3. Григорьев Ю. Н., Ершов И. В. Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина — Гельмгольца // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 73–84.
4. Mack L. M. Boundary layer stability theory. Pasadena (California), 1969. (Rev. A. / Jet propulsion lab.; Doc. 900-277).
5. Гапонов С. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
6. Гольдштик М. А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.

7. **Canuto C.** Spectral methods in fluid dynamics: Springer ser. in comput. phys. / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
8. **Trefethen L. N.** Spectral methods in Matlab. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000.
9. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973.
10. **Moler C. B., Stewart G. W.** An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, N 2. P. 241–256.
11. **Joseph D. D.** Nonlinear stability of the Boussinesk equations by the method of energy // Arch. Rational Mech. Anal. 1966. V. 22, N 3. P. 163–184.
12. **Joseph D. D., Carmi S.** Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels // Quart. Appl. Math. 1969. V. 26, N 4. P. 575–599.

Поступила в редакцию 10/XI 2009 г.
