

УДК 539.375

МЕХАНИЗМЫ УМЕНЬШЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

А. Н. Полилов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990 Москва
E-mail: polilovan@mail.ru

Для волокнистых композитов с полимерной матрицей рассмотрены различные модели докритического разрушения, позволяющие объяснить существенное уменьшение эффективного коэффициента концентрации напряжений по сравнению с теоретическим. Обоснована необходимость введения параметра материала с размерностью длины для описания масштабного эффекта прочности. Сформулирован биомеханический принцип уменьшения концентрации напряжений за счет использования криволинейных волокон, “обтекающих” отверстие.

Ключевые слова: прочность, концентрация напряжений, волокнистый композит, отверстие, трещина, масштабный эффект.

Введение. Подобно тому как исследование внезапных разрушений крупногабаритных стальных конструкций (при сравнительно малых средних напряжениях) способствовало развитию теории трещин, изучение особенностей поведения композитных материалов вблизи отверстий или надрезов позволяет получить оценку влияния концентрации напряжений на прочность армированных пластиков. Одной из таких особенностей является замедление роста трещин в композитах, состоящих из хрупких компонентов, и существенное уменьшение эффективного коэффициента концентрации напряжений по сравнению с теоретическим. Другая особенность заключается в том, что вблизи концентраторов напряжений вследствие сложного напряженного состояния возникают различные виды разрушения: разрывы волокон, расслоения, расщепления. При этом условия одновременности возникновения указанных видов разрушения позволяют судить о “равнопрочных” свойствах компонентов композитов.

Результаты анализа механизмов реакции на наличие отверстий или надрезов позволяют выделить следующие группы армированных пластиков:

- расщепляющиеся, например однонаправленные, в которых при растяжении вдоль волокон возникают четко выраженные продольные трещины;
- растрескивающиеся, в которых в результате докритического растрескивания матрицы происходит увеличение радиуса кривизны отверстий;
- псевдопластичные, т. е. нагруженные под различными углами к направлениям армирования.

Использование данной классификации позволяет выяснить, каким образом можно уменьшить концентрацию напряжений в композитах, состоящих из линейно-упругих и хрупких компонентов. Наиболее эффективный способ, основанный на принципе равнонапряженности криволинейно уложенных волокон, реализуется в древесине, в которой практически отсутствуют касательные напряжения вдоль волокон и концентрация напряжений.

1. Введение характерного размера материала для описания масштабного эффекта прочности при наличии концентрации напряжений. Для того чтобы оценить влияние наличия отверстий на несущую способность элементов конструкций, нужно провести сравнение двух величин для эллиптического отверстия с полуосями a и b : теоретического коэффициента концентрации напряжений (stress concentration factor) $K_t = \sigma^*/p$ (σ^* , p — наибольшее и среднее номинальные напряжения) и эффективного коэффициента концентрации напряжений, т. е. коэффициента уменьшения прочности (strength reduction factor) $K_\sigma = \sigma_0/\sigma_n$ (σ_0 , σ_n — прочности гладкого образца и образца с отверстием). Если бы коэффициенты K_t и K_σ были близки, то задача оценки прочности сводилась бы только к расчету напряжений (с помощью метода конечных элементов), однако эти коэффициенты никогда не совпадают, поэтому с помощью предлагаемых теорий прочности можно снять три основных противоречия, свойственные теории упругости:

1. Теоретический коэффициент всегда больше эффективного: $K_t > K_\sigma$.

2. Коэффициент K_t зависит не от абсолютных размеров отверстия, а от отношения полуосей a/b :

$$K_t = 1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \frac{a}{b}, \quad (1)$$

в то время как значение K_σ растет с увеличением размеров отверстия. В (1) β_1 , β_2 — мнимые корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \beta^4 - (E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx})\beta^2 + E_x/E_y &= 0, \\ \beta_1\beta_2 &= \sqrt{E_x/E_y}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx}, \end{aligned} \quad (2)$$

E_x , E_y — модули Юнга; G_{xy} — модуль сдвига; ν_{yx} — коэффициент Пуассона при растяжении в направлении оси y .

3. В случае острых надрезов теоретический коэффициент стремится к бесконечности, в то время как эффективный коэффициент стремится к конечному пределу: при $b/a \rightarrow 0$ $K_t \rightarrow \infty$, но $K_\sigma \rightarrow \lim$.

Из теории размерностей следует, что для описания наблюдаемого в экспериментах масштабного эффекта необходимо ввести (явно или неявно) некоторый характерный размер материала. Например, в случае широкой пластины с круговым отверстием безразмерный коэффициент концентрации напряжений должен зависеть от безразмерных параметров, но в задачу теории упругости входят лишь модули и напряжения, выраженные в мегапаскалях, поэтому с их помощью нельзя составить безразмерную комбинацию, содержащую радиус отверстия, не вводя параметр с размерностью, отличной от размерности напряжений. В качестве такого параметра могут быть использованы удельная энергия разрушения, критический коэффициент интенсивности напряжений, размер структуры или длина зоны разрушения, размерный параметр статистического распределения Вейбулла, градиент напряжений.

Все подходы, в которых используются такие параметры, по сути, эквивалентны [1], хотя основаны на разных моделях и гипотезах, предполагающих, что в обычном критерии прочности $\sigma^* = \sigma_0$ вместо максимального напряжения σ^* следует вводить некоторое эквивалентное напряжение σ_e , осредненное либо зависящее от градиента напряжений. Рассмотрим некоторые из указанных подходов.

1. Наиболее простой подход (mean stress criterion) основан на введении характерного размера δ , по которому проводится осреднение напряжений:

$$\sigma_e = \frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} \sigma_y(x) dx.$$

Такой подход позволяет устранить три указанных выше различия коэффициентов K_t и K_σ , если считать $K_t = \sigma_e/p$ (p — номинальное напряжение).

2. С использованием известной теоремы о среднем среднее значение непрерывной функции на выбранном интервале можно заменить ее значением в некоторой точке внутри этого интервала и в качестве эквивалентного напряжения принять напряжение на некотором характерном для данного материала расстоянии $\delta' \leq \delta$ от дна отверстия: $\sigma_e = \sigma_y(a + \delta')$ (point stress criterion).

3. Поскольку феноменологический параметр δ зависит от радиуса ρ кругового отверстия, используется зависимость (master curve) $\delta = c(\rho/R_0)^m$ (c, m — параметры материала; R_0 — нормирующий множитель), что позволяет более точно описать экспериментальные данные, но приводит к более громоздким выражениям.

4. Характерный размер можно ввести на основе модели отверстия с исходящей с его контура гипотетической трещиной характерной длины. Условие начала роста этой трещины формулируется с использованием критического коэффициента интенсивности напряжений K_c , выраженного в мегапаскалях на метр в степени $1/2$, что эквивалентно введению характерного размера $(K_c/\sigma_0)^2$ и позволяет описывать масштабный эффект для трещин и гладких отверстий.

5. Указанные выше противоречия снимаются при использовании градиентных критериев разрушения [2], учитывающих наряду с максимальным напряжением σ_y^* градиент $|\text{grad } \sigma| = \partial\sigma_y/\partial x$, выраженный в ньютонах на метр в кубе, что требует введения характерного размера материала L для обезразмеривания относительного градиента напряжений $g = |\text{grad } \sigma|/\sigma^*$. Выражение для эквивалентного напряжения можно записать в виде [3]

$$\sigma_e = \frac{\sigma^*}{1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + Lg}},$$

где β — экспериментально определяемый параметр материала.

6. Для объяснения различий между коэффициентами K_t и K_σ предложены статистические теории прочности [2], определяющие масштабный эффект как увеличение вероятности попадания дефекта в напряженную зону вблизи большего отверстия. Трудноразрешимыми проблемами остаются определение локальной прочности и выбор размера структурного элемента.

7. Использование моментной теории упругости [4] также позволяет описать масштабный эффект, но экспериментальное определение размерных параметров, входящих в моментную теорию упругости, существенно затруднено, что ограничивает ее применение.

Следует отметить, что для предсказания уменьшения прочности недостаточно выполнить расчет поля напряжений вблизи отверстия. Необходимо ввести в модель разрушения характерный размер материала. Более предпочтительной является наиболее простая модель, достаточно точно описывающая реальный процесс разрушения композита вблизи отверстия и включающая надежно определяемые экспериментальные параметры.

2. Уменьшение концентрации напряжений в расщепляющихся композитах. Рассмотрим механизмы уменьшения концентрации напряжений.

2.1. *Механизм остановки трещины путем расщепления поверхности раздела.* Не хрупкое разрушение композитов при растяжении вдоль волокон обусловлено наличием вблизи вершины трещины сложного напряженного состояния, которое вызывает расщепление, задерживающее развитие трещины (рис. 1). В [5] предполагалось, что основной причиной расщепления являются нормальные напряжения σ_x , достигающие максимального значения перед вершиной трещины, однако в [6] показано, что наибольшие значения

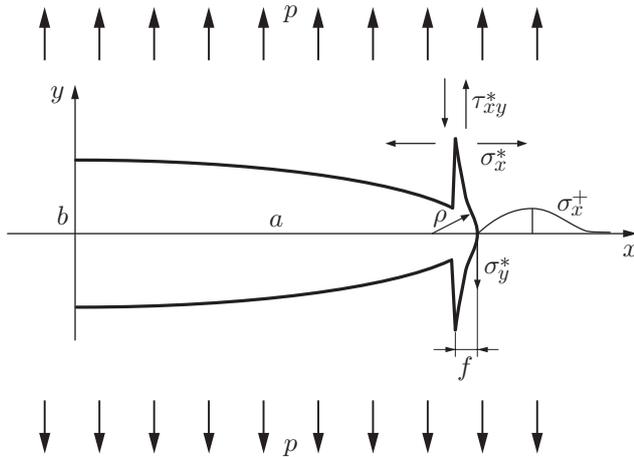


Рис. 1. Модель возникновения расщепления на контуре эллиптической трещины в однонаправленном композите

напряжений достигаются на контуре отверстия, при этом основную роль в процессе разрушения играют касательные напряжения. Согласно [7] для анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, нагруженной на удалении от него равномерным напряжением p , распределение напряжений имеет вид

$$\sigma_x = -2 \operatorname{Re} (\beta_1^2 \Phi_1(z_1) + \beta_2^2 \Phi_2(z_2)), \quad \sigma_y = 2 \operatorname{Re} (\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)),$$

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Im} (\beta_1 \Phi_1(z_1) + \beta_2 \Phi_2(z_2)),$$

где

$$z_{1,2} = x + i\beta_{1,2}y, \quad \Phi_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \frac{\beta_{2,1}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{1}{a - \beta_{1,2}b} \left(\frac{z_{1,2}}{\sqrt{z_{1,2}^2 - a^2 + \beta_{1,2}^2 b^2}} - 1 \right),$$

β_1, β_2 — параметры упругости, мнимые корни характеристического уравнения (см. (2)).

Моделируя трещину вытянутым отверстием, отношение полуосей будем считать малым: $b/a = \varepsilon \ll 1$. Тогда выражения для наибольших напряжений на контуре в случае растяжения и сдвига номинальными напряжениями p и s можно представить в виде $\sigma^* = (p/\varepsilon)\sigma^0 + O(\varepsilon)$. При этом

$$\sigma_{xx} = pA_{xx}k_{xx}^p + sB_{xx}k_{xx}^c \sqrt{k_{xx}^c}, \quad \sigma_{yy} = pA_{yy} + sB_{yy} \sqrt{k_{yy}^c},$$

$$\tau_{xy} = pA_{xy} \sqrt{k_{xy}^p} + sB_{xy}k_{xy}^c. \tag{3}$$

Здесь k_{ij} — координаты контура эллипса; верхний индекс p соответствует растяжению, c — сдвигу. Параметрическое уравнение контура эллипса и связь угла α с коэффициентами k_{ij} представляются в виде

$$z = a \cos \alpha + ib \sin \alpha, \quad b/a = \varepsilon \ll 1, \quad \cos^2 \alpha = 1 - k\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

В (3) содержатся функции упругих параметров, зависящие от коэффициента k :

$$A_{ij} = \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\varepsilon (k_{ij}^{p,c} + \beta_1^2) (k_{ij}^{p,c} + \beta_2^2)}, \quad B_{ij} = \frac{A_{ij}}{\beta_1 \beta_2}$$

(индекс ij принимает значения xx, yy, xy).

При малых значениях ε выражения (3) для напряжений на контуре зависят от одного из параметров α, k , поэтому нетрудно найти максимумы напряжений, приравнявая к нулю производные по тому же параметру. Приведенные выше асимптотические выражения

позволяют свести задачу нахождения координат точки начала расщепления к алгебраическим уравнениям относительно одной неизвестной k с использованием простого критерия расщепления по касательным напряжениям [8–10] либо критерия расщепления в виде линейной $\sigma_x + m_2\tau_{xy} = c_2$ [11] или квадратичной [12] комбинации нормальных и касательных напряжений на плоскости, содержащей поверхность раздела. В случае растяжения ($s = 0$ в (3)), зная координату точки начала расщепления, можно определить глубину f неразрушенной части выточки и оценить для нее коэффициент концентрации напряжений. Из асимптотических выражений (3) нетрудно получить коэффициенты σ_y^{*0} при p/ε для наибольших напряжений на контуре:

$$\sigma_y^* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \frac{p}{\varepsilon}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{p}{\varepsilon\sqrt{2}} \frac{3\sqrt{3}t(1+t)}{(A+2B)\sqrt{A-B}},$$

$$B = t^2 + 1, \quad A = \sqrt{B^2 + 12t^2}, \quad t = \beta_1/\beta_2.$$

Отношение максимальных напряжений перед вершиной σ_x^+ и в вершине σ_y^* трещины равно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_x^+}{\sigma_y^*} = \frac{t\beta_1\beta_2}{(t^{4/3} + t^{2/3} + 1)^{3/2}}.$$

В случае изотропного материала при $\beta_1 = \beta_2 = t = 1$ это отношение равно $1/(3\sqrt{3}) \approx 0,192$, что соответствует полученному в [5] значению $1/5$. На основе этого соответствия нельзя сделать вывод, что оптимальное отношение поперечной прочности к продольной равно $1/5$. Более правильным является сравнение наибольших напряжений на контуре:

$$\frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*} = \left(\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^2 > \frac{\sigma_x^+}{\sigma_y^*}.$$

Установлено, что в сильно анизотропных материалах касательные напряжения τ_{xy}^* преобладают над поперечными σ_x^* ; при $\beta_2 \rightarrow 0$ поперечные напряжения стремятся к нулю: $\sigma_x^{*0} = O(\beta_2)$, а касательные уменьшаются незначительно: в случае изотропного материала $\tau_{xy}^{*0} = 3\sqrt{3}/8 = 0,65$, $\tau_{xy}^{*0} \rightarrow 0,5$ при $\beta_2 \rightarrow 0$. Таким образом, расщепление начинается на контуре, а не перед ним, при этом основную роль в разрушении сильно анизотропных материалов типа однонаправленных пластиков играют касательные напряжения.

2.2. *Условия расщепления вблизи отверстий.* Согласно [7] в случае ортотропной пластины выражение для окружных напряжений σ_θ на контуре кругового отверстия можно записать в виде

$$\frac{\sigma_\theta}{p} = \frac{\beta_1\beta_2[t'(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2) - 1]}{t'^2(1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2) + t'(\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2) + 1}, \quad (4)$$

где $t' = \cos^2 \theta$.

С использованием линейного [11] или квадратичного [12] критерия расщепления можно построить зависимость прочности поверхности раздела от направления растяжения. Материал на контуре отверстия находится в условиях одноосного растяжения под углом θ к волокнам, расщепление начинается в точке контура B (рис. 2), в которой напряжения (4) впервые достигают значения, равного значению прочности при данном угле θ .

2.3. *Концентрация напряжений вблизи неразрушенной части выточки.* Не разрушенную после расщепления часть выточки (см. рис. 1, 2, *слева*) можно моделировать эллиптическим контуром, для которого коэффициент концентрации нормальных напряжений σ_y , действующих вдоль волокон, определяется по формуле

$$K_\sigma = 1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \sqrt{\frac{f}{\rho}}. \quad (5)$$

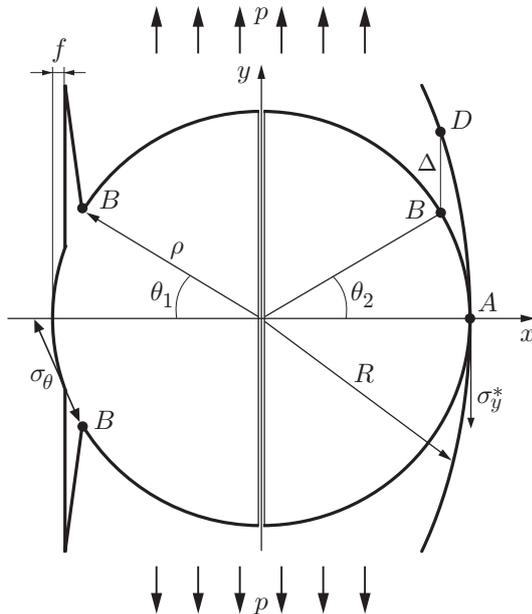


Рис. 2. Схемы расщепления (слева) и предразрушения (справа) вблизи кругового отверстия

После расщепления радиус неразрушенной части выточки остается прежним, а ее глубина выражается через координату точки начала расщепления θ_1 :

$$f = \rho(1 - \cos \theta_1).$$

В случае кругового отверстия для сильно анизотропного материала при $\beta_2 \ll 1$ из (5) получаем $K_\sigma = 1,71$, в случае изотропного материала ($\beta_1 = \beta_2 = 1$) $K_\sigma = 1,66$. В случаях изотропного и анизотропного материалов значения K_σ различаются несущественно [8, 9]. Следует отметить, что расщепление обеспечивает значительную разгрузку по нормальным напряжениям вблизи дна отверстия (от теоретических значений коэффициента концентрации напряжений $K_t = 4 \div 6$ до согласующихся с экспериментальными данными значений $K_\sigma = 1,6 \div 1,7$).

С уменьшением радиуса кривизны в вершине эллиптического отверстия коэффициент концентрации упругих напряжений неограниченно растет, но в расщепляющемся материале коэффициент снижения прочности увеличивается незначительно [8]. Наибольшее значение коэффициента концентрации напряжений вблизи неразрушенной части выточки соответствует случаю изотропного материала:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\sigma = 1,82.$$

Для сильно анизотропных материалов этот предел равен 1,71. Предельное значение K_σ указывает на то, что никакой концентратор напряжений в расщепляющихся композитах, растягиваемых вдоль волокон, не может вызвать локальное увеличение напряжений перед окончательным разрушением более чем в 1,82 раза. Следовательно, это значение является верхней оценкой эффективного коэффициента концентрации напряжений в расщепляющихся композитах. Малая сдвиговая прочность препятствует увеличению концентрации напряжений: в области больших градиентов напряжений происходит саморазгрузка материала.

Заметим, что при растяжении однонаправленного композита вдоль волокон продольная трещина расщепления отклоняется в направлении неразрушенного сечения, перескакивая через остающиеся неразрушенными “волокна-мостики” (bridge-fibers). Это явление обусловлено энергетическим критерием типа критерия Гриффитса. Поэтому окончательное разрушение определяется не разрывом волокон вблизи неразрушенной части выточки,

а развитием трещины расщепления. Однако, поскольку отклонение трещины расщепления происходит очень плавно, полученное выше предельное значение коэффициента концентрации напряжений оказывается надежной оценкой для расщепляющихся композитов с любыми отверстиями или надрезами.

3. Модели предразрушения растрескивающихся композитов. При оценке влияния наличия отверстий на прочность в расчетной модели вместо реального контура отверстия целесообразно использовать некоторый видоизмененный контур с учетом докритического предразрушения материала. При этом в явном виде вводится размер зоны предразрушения или характерный радиус кривизны отверстий.

Для композитов со сложной схемой укладки волокон предположение о распространении длинной трещины расщепления (см. рис. 2, *слева*), уменьшающей эффективную глубину отверстия, является нереалистичным. Действительно, при растяжении вдоль одного из семейств армирования, когда окончательное разрушение определяется разрывом волокон этого семейства в точке A под действием напряжений σ_y , на некотором расстоянии от точки A (вблизи точки B) на контуре начинается растрескивание матрицы, что приводит к увеличению радиуса кривизны отверстия (см. рис. 2, *справа*). Координату θ_2 точки B можно определить расчетным путем, зная распределение окружных напряжений по контуру отверстия и используя критерий разрушения под действием комбинации нормальных σ_x и касательных τ_{xy} напряжений [11, 12]. Возникшие трещины расщепления в продольных слоях не могут развиваться неограниченно, как в однонаправленном композите, вследствие влияния соседних слоев. Согласно гипотезе о форме зоны предразрушения [13, 14] длина этой зоны вдоль оси y вблизи точки B равна характерному для данного материала размеру Δ . В результате растрескивания матрицы область между точками A и D считается разрушенной, поэтому вместо первоначального контура рассматривается гипотетический контур эллиптического отверстия с полуосями $a = \rho$ и $b = \rho + \Delta / \sin \theta_2$, проходящий через точки $A(\rho, 0)$ и $D(\rho \cos \theta_2, \rho \sin \theta_2 + \Delta)$. По значениям a, b определяется радиус кривизны R в точке A :

$$R = \frac{b^2}{a} = \left(1 + \frac{\Delta}{\rho \sin \theta_2}\right)^2 \rho. \quad (6)$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений K_σ для гипотетического эллиптического отверстия вычисляется по формуле

$$K_\sigma = 1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \sqrt{\frac{a}{R}} = 1 + 2 \left(1 + \frac{\Delta}{\rho \sin \theta_2}\right)^{-1},$$

где можно считать $(\beta_1 + \beta_2)/(\beta_1 \beta_2) = 2$ (поскольку параметр Δ является феноменологическим), как в изотропном случае, и не уточнять значение θ_2 , полагая, например, $\theta_2 = 30^\circ$ и $\Delta^* = 2\Delta$. В случае пластины с эллиптическим отверстием, вычисляя радиус кривизны R по формуле (6), эффективный коэффициент концентрации напряжений можно определить следующим образом:

$$K_\sigma = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left(1 + \frac{\Delta}{\rho \sin \theta_2}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Поскольку среди отверстий данной длины $2a$ надрез является наиболее опасным, будем считать, что ему соответствует наибольшее значение K_σ , вычисляемое по формуле (7). Из условия $\partial K_\sigma / \partial \rho = 0$ определяется критический начальный радиус кривизны $\rho = \Delta^*$. В случае надреза получаем

$$K_\sigma^* = 1 + \sqrt{a/\Delta^*}. \quad (8)$$

Изложенный выше однопараметрический подход не учитывает нечувствительность композитов к наличию малых отверстий (как правило, диаметром менее 1 мм). Это означает, что в материале изначально существуют распределенные дефекты, влияние которых на уменьшение прочности эквивалентно влиянию кругового отверстия радиусом ρ^* . С учетом модели [15] и формулы (8) можно считать, что в случае предразрушения вблизи отверстия произвольной формы эффективный радиус кривизны равен R^* (см. рис. 2, *справа*). Учитывая начальные гипотетические дефекты длиной $2\rho^*$, можно записать зависимость K_σ от длины отверстия $2a$:

$$K_\sigma = \begin{cases} 1 + 2(\sqrt{a} - \sqrt{\rho^*})/\sqrt{R^*}, & a > \rho^*, \\ 1, & a \leq \rho^*. \end{cases} \quad (9)$$

Можно считать, что R^* — параметр повреждаемости, характеризующий чувствительность композита к увеличению размеров дефектов вблизи отверстия, а ρ^* — параметр начальной поврежденности [16]. Следует отметить, что в экспериментах вследствие предразрушения полимерных композитов значения K_σ для отверстий и надрезов практически совпадают. Это позволяет использовать в инженерных расчетах простую формулу (8) или (9). По сути, любое отверстие можно заменить надрезом той же длины a и для него сформулировать критерий разрушения $K = K_c$ ($K_c = \sigma_n \sqrt{\pi a}$; σ_n — критическое номинальное напряжение для пластины с трещиной). Эта известная в механике разрушения формула связывает критическое номинальное напряжение с длиной трещины. Однако согласно (9)

$$K_\sigma = \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \approx 2 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{R^*}},$$

т. е. $\sigma_n = \sigma_0 \sqrt{R^*/a}/2$. Эта формула связывает трещиностойкость K_c , прочность σ_0 и радиус кривизны отверстия R^* : $K_c = \sigma_0 \sqrt{\pi R^*}/2$. Заметим, что это выражение характеризует взаимосвязь свойств материала с трещиностойкостью, а не зависимость коэффициента интенсивности от длины трещины и приложенного напряжения $K = \sigma \sqrt{\pi a}$.

Использование критического коэффициента интенсивности напряжений и введение характерного радиуса затупления, по сути, эквивалентны. Различие заключается только в том, что для полимерных композитов значение феноменологического параметра R^* оценивается десятками миллиметров, а не долями миллиметра, как в случае металлов, находящихся в хрупком состоянии.

4. Коэффициент поддержки для отверстий и выточек в псевдопластичных композитах. Псевдопластичными будем называть армированные пластики, например с углами укладки ($0^\circ/90^\circ$), растягиваемые под углом к волокнам. С одной стороны, это обусловлено нелинейностью диаграммы деформирования таких пластиков, а с другой — использованием метода оценки несущей способности теории идеальной пластичности, согласно которому нижняя оценка определяется с помощью статически допустимого поля напряжений, а верхняя — с помощью кинематически возможного поля перемещений. В случае наличия отверстий эти оценки совпадают и представляют собой точное значение несущей способности; для пластин с вырезами среднее напряжение в нетто-сечении оказывается больше, чем для гладких образцов, поэтому используется коэффициент поддержки, а не коэффициент уменьшения прочности, как в случае упругих тел.

Будем считать, что разрушение волокнистых композитов может происходить только вдоль одного из семейств армирования. Для пластин с полукруглыми выточками ($\rho = h$), направление разрушения которых определяется расположением семейства волокон под углом $\pi/2 - \varphi$ к направлению растяжения (рис. 3, *а*), возможны две схемы разрушения, дающие разные верхние оценки прочности. Как и выше, нижней оценкой можно считать

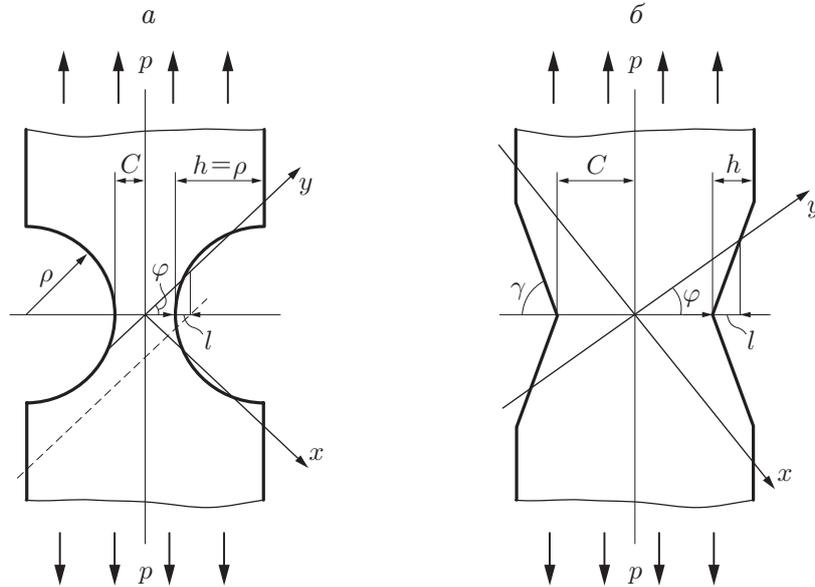


Рис. 3. Схемы направленного разрушения композитных образцов с полукруглыми (а) и угловыми (б) выточками

равномерное распределение напряжений по нетто-сечению ($\sigma_* = \sigma_0$). Для глубоких выточек при

$$C \leq \rho(1/\sin \varphi - 1) \tag{10}$$

разрушение может произойти под углом φ вдоль линии, соединяющей выточки. В этом случае среднее разрушающее напряжение в нетто-сечении больше прочности гладкого образца σ_0 . При получении верхней оценки можно считать, что при разрушении по увеличенному сечению шириной $2(C + l)$ имеет место равномерное распределение напряжений σ_0 . С использованием геометрических параметров можно рассчитать длину l , на которую увеличивается размер C половины нетто-сечения. В результате получаем одну из верхних оценок разрушающего напряжения:

$$\frac{\sigma^{**}}{\sigma_*} = \frac{1 + \lambda - \sqrt{\lambda^2 - (2\lambda + 1) \operatorname{tg}^2 \varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \lambda = \frac{\rho}{C}.$$

Наибольшее возможное значение коэффициента поддержки σ^{**}/σ_* достигается в случае равенства в (10): $\sigma^{**}/\sigma_* = 1 + \sin \varphi = 1,71$ при $\varphi = 45^\circ$.

Другая возможная схема разрушения состоит в соединении контура выточки с противоположной поверхностью (штриховая линия на рис. 3,а). Эта схема реализуется при смене знака в неравенстве (10), когда соединение выточек по линии вдоль волокон невозможно. При этом коэффициент поддержки пропорционален величине, на которую увеличивается размер разрушаемого сечения:

$$\frac{\sigma^{**}}{\sigma_*} = 1 + \frac{\rho}{2C}, \tag{11}$$

максимальное значение $\sigma^{**}/\sigma_* = [1 - (1/2) \sin \varphi]/(1 - \sin \varphi) \approx 2,2$ при $\varphi = 45^\circ$ достигается в случае равенства в (10). Формула (11) дает надежную верхнюю оценку прочности. Полусумма этой оценки и нижней оценки σ_0 удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

В случае угловых выточек (см. рис. 3, б) при $h \operatorname{tg} \gamma > (C + h) \operatorname{tg} \varphi$ возможно их соединение между собой. Тогда $\sigma^{**}/\sigma_* = 1 + \operatorname{tg} \varphi / (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \varphi)$, но в соответствии с условием соединения выточки с противоположным краем коэффициент поддержки $\sigma^{**}/\sigma_* \leq 1 + h/(2C)$. Естественно, изложенные схемы существенно упрощают реальную картину разрушения композитов, но могут быть использованы для получения оценок, так как подтверждаются экспериментами.

5. Биомеханические способы уменьшения влияния концентрации напряжений на прочность вблизи отверстий. Современные технологии изготовления композитов позволяют управлять концентрацией напряжений. При этом следует учитывать структуру природных материалов. Например, свилеватая структура древесины в зоне сучка не только обеспечивает надежное крепление ветви к стволу, но и исключает расщепление вдоль волокон. Такого рода оптимальные соединения в композитных конструкциях пока не реализованы. Действительно, природные материалы обладают уникальными свойствами: прочность соединения выше прочности соединяемых деталей. Ветку можно сломать, но нельзя оторвать от ствола. Основной задачей нового научного направления биомеханики композитов является создание прочных и безопасных материалов-конструкций на основе изучения природных материалов, которые чувствуют приложенную нагрузку и подстраивают свою структуру и форму; при этом реализуется основной принцип равнонапряженности волокон.

Были предприняты попытки смоделировать структуру древесины в зоне сучка путем укладки волокон вдоль направлений главных растягивающих напряжений (рис. 4). Особенностью этих направлений является практически полное отсутствие касательных напряжений вдоль волокон. Приведенные результаты соответствуют модельной задаче о равномерном растяжении широкой пластины с круговым отверстием. Расположение волокон, “обтекающих” отверстие, подобно структуре древесины в зоне сучка.

При проектировании биомеханических соединений волокнистых композитов с использованием криволинейных волокон необходимо решить итерационную задачу, включающую три этапа. На первом этапе определяются направления наибольших растягивающих напряжений вблизи отверстия, с которыми должны совпадать направления укладки волокон. На втором этапе моделируется материал с неоднородными анизотропными свойствами, в котором волокна уложены вдоль определенных на первом этапе направлений. Расчет распределения напряжений в таких структурах возможен только численными вариационными методами типа метода конечных элементов. Напряжения в новом материале изменяются, поэтому направления оптимальной укладки волокон надо определять на основе нескольких итераций первого и второго этапов. На третьем этапе необходимо проанализировать полученные распределения напряжений с учетом локальных критериев прочности неоднородного композита, чтобы оценить увеличение несущей способности при криволинейной укладке волокон.

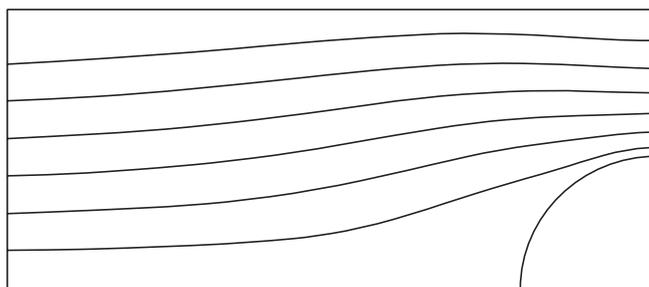


Рис. 4. Схема укладки волокон вдоль линий наибольших главных напряжений в растягиваемой пластине с круговым отверстием

Полученные результаты показывают, что в ортотропной (композитной) пластине с круговым отверстием теоретический коэффициент концентрации напряжений равен $K_t = 5 \div 6$, в то время как при использовании криволинейных волокон он уменьшается приблизительно в 1,5 раза. Однако основной результат состоит в том, что за счет сгущения волокон прочность материала вблизи отверстия увеличивается и повышение напряжений вблизи отверстия в расчете на волокно составляет около 20 % среднего значения напряжения в расчете на волокно вдали от отверстия. Таким образом, при значении коэффициента концентрации напряжений $K_t = 6$ значение эффективного коэффициента концентрации равно $K_\sigma = 1,2$, т. е. за счет использования криволинейных волокон K_σ меньше K_t в пять раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Полилов А. Н., Стрекалов В. Б.** Введение характерного размера для описания масштабного эффекта в условиях концентрации напряжений в композитах // Пробл. прочности. 1984. № 12. С. 62–66.
2. **Серенсен С. В., Стреляев В. С.** Статистические закономерности разрушения и вероятностная оценка статистической прочности конструктивных элементов из полимерных композитных материалов // Механика полимеров. 1972. № 3. С. 517–524.
3. **Леган М. А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.
4. **Исупов Л. П.** Концентрация напряжений в волокнистом композите // Механика композит. материалов. 1982. № 1. С. 29–33.
5. **Cook J., Gordon J. E.** A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 282, N 1391. P. 132–144.
6. **Полилов А. Н.** Торможение трещины поверхностью раздела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974. № 1. С. 68–72.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
8. **Полилов А. Н., Работнов Ю. Н.** Разрушение около боковых выточек композитов с низкой сдвиговой прочностью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 6. С. 112–119.
9. **Полилов А. Н.** Разрушение однонаправленных композитов около концентраторов напряжений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 139–143.
10. **Полилов А. Н.** Продольная трещина в однонаправленном композите // Машиноведение. 1975. № 4. С. 82–85.
11. **Полилов А. Н., Татусь Н. А.** Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2012. № 2. С. 140–166.
12. **Полилов А. Н.** Критерий разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 116–119.
13. **Полилов А. Н.** Схема предразрушения композитов около отверстий // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 3. С. 110–117.
14. **Полилов А. Н.** Учет предразрушения около отверстий в волокнистых композитах // Машиноведение. 1982. № 4. С. 110–115.
15. **Милейко С. Т., Хохлов В. К., Сулейменов Ф. Х.** Разрушение композитного материала с макродефектом // Механика композит. материалов. 1981. № 2. С. 358–362.
16. **Полилов А. Н., Погарский М. В.** Параметры поврежденности и повреждаемости для описания масштабного эффекта прочности композитов около отверстий // Машиноведение. 1990. № 2. С. 65–71.

*Поступила в редакцию 27/V 2013 г.,
в окончательном варианте — 26/VI 2013 г.*