

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Б. Х. Эшматов, Х. Эшматов, Д. А. Ходжаев*

Университет Буффало, 14260-4400 Нью-Йорк, США

* Ташкентский институт ирригации и мелиорации, 100000 Ташкент, Узбекистан

E-mails: ebkh@mail.ru, heshmatov@mail.ru, dhodjaev@mail.ru

Рассмотрена задача о флаттере вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке. В уравнении движения пластины и панели влияние сосредоточенных масс учитывается с использованием δ -функции Дирака. С помощью метода Бубнова — Галеркина задача сводится к решению системы обыкновенных нелинейных интегродифференциальных уравнений. Для решения полученной системы со слабосингулярным ядром Колтунова — Ржаницына применен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. Для реальных композиционных материалов в широких диапазонах значений физико-механических и геометрических параметров изучено поведение вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей, определены критические значения скорости потока.

Ключевые слова: гипотеза Кирхгофа — Лява, композиционные материалы, вязкоупругая прямоугольная пластина, вязкоупругая цилиндрическая панель, сосредоточенная масса, метод Бубнова — Галеркина, нелинейный флаттер.

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию проблем деформирования, прочности, колебаний, динамической устойчивости пластин, панелей и оболочек из композиционных материалов, представляющих собой основные несущие элементы конструкций, применяемых в авиационной и ракетной технике, машиностроении, судостроении и т. д. Как известно, композиционные материалы являются неоднородными по структуре и обладают вязкоупругими свойствами [1, 2]. Использование новых композиционных материалов в инженерной практике, проектирование и создание прочных, легких и надежных конструкций требуют совершенствования механических моделей деформируемых тел и разработки математических методов расчета, в которых учитываются реальные свойства указанных материалов.

К числу задач о колебаниях и динамической устойчивости относятся задачи о флаттере тонкостенных конструкций типа пластин, панелей и оболочек, обтекаемых потоком газа. Исследованию этих задач в рамках теории упругости посвящены работы [3–6]. Обзор решений задач о флаттере в различных постановках приведен в работе [7].

В [8–10] изучены задачи о флаттере вязкоупругих тонкостенных конструкций в линейной постановке. Эти задачи рассматривались с использованием либо дифференциальной

модели Фойгта, либо интегральной модели Больцмана — Вольтерры, в которой при расчетах в качестве ядер релаксации применялись экспоненциальные ядра, не описывающие реальные процессы развития флаттера в оболочках и пластинах в начальные моменты времени [1].

Исследованию нелинейных задач о флаттере вязкоупругих пластин и панелей посвящено небольшое количество работ [11–13], в которых использовалась гипотеза Кирхгофа — Лява. Для решения таких задач применялся метод Бубнова — Галеркина, основанный на двухчленной аппроксимации прогибов. Как показывают расчеты задач о флаттере, выполненные в [3, 10], двухчленная аппроксимация даже в линейной постановке не позволяет получить удовлетворительные результаты.

Как известно, одной из основных задач о флаттере является нахождение критических значений скоростей в сверхзвуковом потоке газа [3]. В данной работе значение критической скорости вычисляется с использованием критерия, приведенного в работе [9].

В машиностроении, строительной и авиационной промышленности пластины, панели и оболочки часто выполняют роль несущих поверхностей, к которым крепятся различные элементы конструкции (продольные и поперечные ребра, накладки, крепления и узлы приборов и машин). При теоретическом изучении задач о флаттере эти присоединенные элементы целесообразно интерпретировать как дополнительные массы, жестко соединенные с конструкциями и сосредоточенные в точках.

Существует ряд работ, в которых рассмотрены колебания упругих систем с сосредоточенными массами [14, 15]. В этих работах либо решались задачи в линейной постановке, либо учитывались лишь некоторые свойства материалов конструкций. Проблемы устойчивости упругих панелей с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке газа изучены в работе [16]. Значительно меньше внимания уделено исследованию особенностей поведения неоднородных вязкоупругих систем [17–20].

С использованием вычислительного метода [21, 22] и программного средства Delphi были определены критические значения скоростей в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик вязкоупругих тонкостенных конструкций типа прямоугольных пластин и цилиндрических панелей, изготовленных из композиционных материалов [23–26].

Целью данной работы является исследование нелинейных задач о флаттере вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке газа.

1. Математическая модель. Рассмотрим вязкоупругую оболочку с сосредоточенными массами M_i в точках (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, I$. Оболочка изготовлена из изотропного материала и обтекается в одном направлении сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V .

С использованием принципа Больцмана — Вольтерры зависимость между напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформациями ε_x , ε_y , γ_{xy} запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - \Gamma^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - \Gamma^*) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} (1 - \Gamma^*) \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; Γ^* — интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$:

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Связь между деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ срединной поверхности и перемещениями u, v, w в направлениях x, y, z представим в виде [27]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned}\quad (2)$$

где $k_x = \text{const}, k_y = \text{const}$ — кривизны срединной поверхности оболочки.

Выражения для изгибающих и крутящего моментов, действующих на элемент вязкоупругой оболочки, имеют вид [22, 27]

$$\begin{aligned}M_x &= -D(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H &= -D(1 - \mu)(1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (3)$$

где D — цилиндрическая жесткость оболочки.

При выводе уравнения движения элемента вязкоупругой изотропной оболочки с сосредоточенными массами, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, используем систему уравнений [3, 27]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\Delta p}{h} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,\end{aligned}\quad (4)$$

где Δp — избыточное давление.

Рассмотрим установившееся движение тонкостенной конструкции со сверхзвуковой скоростью V . Поле скоростей в каждой точке зависит от нормальной составляющей скорости ϑ во всех точках поверхности тела. При больших сверхзвуковых скоростях каждая частица газа движется преимущественно в направлении, параллельном направлению скорости V .

В случае линеаризованного течения газа вдоль оболочки, по которой распространяются упругие волны, нормальная составляющая скорости ϑ определяется по формуле [3]

$$\vartheta = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x},$$

следовательно, выражение для избыточного давления Δp принимает вид

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\varkappa p_\infty}{V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right).\quad (5)$$

Здесь \varkappa — показатель политропы газа; p — давление на поверхности тела; p_∞, V_∞ — давление и скорость в невозмущенном газе.

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую оболочку имеет инерционный характер и учитывается в уравнении движения (4) с помощью δ -функции Дирака [14]:

$$m(x, y) = \rho h + \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i)\quad (6)$$

(ρ — плотность материала оболочки).

Подставляя (1) и (3) (с учетом (5), (6)) в (4), получаем

$$\begin{aligned}
(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\rho(1 - \mu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) - \frac{\rho(1 - \mu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
(1 - \Gamma^*) \left(\frac{h^2}{12} \nabla^4 w - k_x(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - k_y(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \right) - & \\
- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} (1 - \Gamma^*)(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} (1 - \Gamma^*) \gamma_{xy} \right) - & \\
- \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} (1 - \Gamma^*)(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1 - \Gamma^*) \gamma_{xy} \right) + & \\
+ \frac{\varkappa p_\infty (1 - \mu^2)}{E h V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где ε_x , ε_y , γ_{xy} определяются из соотношений (2).

Если динамический процесс рассматривается без учета распространения упругих волн [27], то в первых двух уравнениях системы (7) можно отбросить инерционные члены, содержащие u , v . Тогда уравнения для прогиба $w = w(x, y, t)$ и функции напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$ принимают вид [19, 27]

$$\begin{aligned}
\frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \nabla_k^2 \Phi - \\
- \frac{\varkappa p_\infty}{h V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \tag{8} \\
\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -(1 - \Gamma^*) \left(\frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w \right).
\end{aligned}$$

Система нелинейных интегродифференциальных уравнений движения (8) является достаточно общей, из которой в частном случае можно получить уравнения движения вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с сосредоточенными массами, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.

Рассмотрим вязкоупругую прямоугольную пластину с сосредоточенными массами M_i в точках (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, I$. Пластина, имеющая толщину h и стороны длиной a и b , изготовлена из однородного изотропного материала и обтекается сверхзвуковым потоком газа со скоростью V (рис. 1). В этом случае при $k_x = k_y = 0$ из системы уравнений (8) для определения прогиба и функции напряжений получаем следующую систему уравнений типа уравнений Кармана:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \nabla^4 w &= L(w, \Phi) - \frac{\varkappa p_\infty}{h V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\
- \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \tag{9} \\
\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} (1 - \Gamma^*) L(w, w).
\end{aligned}$$

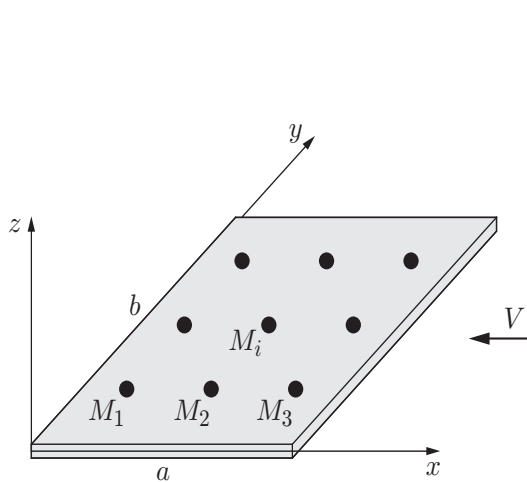


Рис. 1

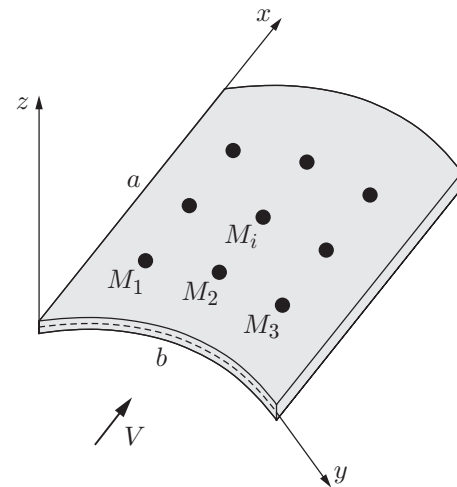


Рис. 2

Рис. 1. Вязкоупругая прямоугольная пластина с сосредоточенными массами, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа

Рис. 2. Вязкоупругая цилиндрическая панель с сосредоточенными массами, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа

Рассмотрим также вязкоупругую цилиндрическую панель с сосредоточенными массами M_i в точках (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, I$. Панель, имеющая толщину h , стороны длиной a и b и радиус кривизны срединной поверхности R , изготовлена из однородного изотропного материала и обтекается сверхзвуковым потоком газа со скоростью V (рис. 2). В этом случае при $k_x = 0$, $k_y = 1/R$ из системы уравнений (8) для определения прогиба и функции напряжений получаем следующую систему:

$$\frac{D}{h} (1 - \Gamma^*) \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\kappa p_\infty}{h V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -(1 - \Gamma^*) \left(\frac{1}{2} L(w, w) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

2. Расчет нелинейного флаттера вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами. Пусть все края вязкоупругой пластины шарнирно оперты. С использованием метода Бубнова — Галеркина решение системы (9), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (11)$$

где $w_{nm} = w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени.

Аналогично [19, 22], подставляя (11) в систему (9) и выполняя процедуру метода Бубнова — Галеркина для определения неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$, получаем систему нелинейных интегродифференциальных уравнений. Вводя в эту систему безразмерные величины

$x_i/a, y_i/b, M_i/M_0, w_{kl}/h, aR(t)/V_\infty$ и сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \ddot{w}_{nm} + M_p \varkappa \lambda \Delta \dot{w}_{kl} + \frac{M_E \pi^4 \lambda^2}{12(1-\mu^2)\Delta^2} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1-\Gamma^*) w_{kl} + \\ + 2 M^* M_p \varkappa \lambda \Delta \sum_{n=1}^N n(\gamma_{n+k} - \gamma_{n-k}) w_{nl} + \\ + \frac{M_E \pi^2 \lambda^2}{\Delta^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1-\Gamma^*) w_{ir} w_{js} = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

где $B_{klnm} = 1 + 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin(k\pi x_i) \sin(n\pi x_i) \sin(l\pi y_i) \sin(m\pi y_i)$ при $n = k$ и $m = l$, в

иных случаях $B_{klnm} = 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin(k\pi x_i) \sin(n\pi x_i) \sin(l\pi y_i) \sin(m\pi y_i)$; $M_0 = ab\rho h$ — масса

пластины; $\lambda = a/b$; $\Delta = b/h$; $\gamma_k = \alpha_k/k$; $\alpha_k = 1$, если k нечетное, $\alpha_k = 0$, $\gamma_k = 0$, если k четное или равно нулю; коэффициент $a_{klnmirjs}$ определяется из [19, 22]; $M_p = p_\infty/(\rho V_\infty^2)$, $M_E = E/(\rho V_\infty^2)$ — безразмерные параметры давления и жесткости; $M^* = V/V_\infty$ — число Маха.

Интегрирование системы (12) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [21, 22], при этом в качестве ядра релаксации использовались слабосингулярные ядра Колтунова — Ржаницына [1]

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (13)$$

В работе [2] исследованы релаксационные свойства реальных вязкоупругих композиционных материалов (стеклопластиков КАСТ-В, ЭДФ, СВАН и текстолита с волокнами, имеющими различное направление), соответствующие ядру релаксации Колтунова — Ржаницына (13). Реологические параметры A, β, α и модуль упругости E найдены методом логарифмических сдвигов [1] (табл. 1).

Ниже приведены результаты расчетов при различных значениях физических и геометрических параметров вязкоупругой прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (рис. 3–5). Скорость потока газа принималась равной 800 м/с. За исключением случаев, оговоренных особо, в качестве исходных принимались следующие значения параметров: $\lambda = 3, \Delta = 133, \varkappa = 1,4, M_E = 4,71, M_p = 0,003$. Для реологических параметров соответствующих материалов использовались значения, приведенные в табл. 1.

На рис. 3 представлена зависимость прогиба в центре упругой (кривая 1) и вязкоупругих (кривые 2, 3) пластин от времени для различных материалов. Видно, что учет вязкоупругих свойств материала пластины приводит к затуханию колебательного процесса. В начальный период решения упругой и вязкоупругой задач различаются незначительно, однако с течением времени вязкоупругие свойства начинают оказывать существенное влияние.

На рис. 4 показана зависимость прогиба пластины от времени при различных значениях α . Анализ полученных результатов показывает, что уменьшение значения реологического параметра α приводит к уменьшению амплитуды и соответственно частоты колебаний.

Таблица 1

Реологические параметры и модуль упругости для различных композиционных материалов

Материал	ω , град	$\alpha_T = \alpha_\varepsilon$	β_T	A_T	β_ε	A_ε	E , кг/см ²
Текстолит	0	0,075	0,05	0,0233	0,004 16	0,0203	$1,47 \cdot 10^5$
	90	0,075	0,05	0,0233	0,000 83	0,0266	$0,92 \cdot 10^5$
КАСТ-В	0	0,1	0,05	0,0146	0,001 00	0,0099	$2,60 \cdot 10^5$
	90	0,1	0,05	0,0146	0,001 66	0,0104	$1,52 \cdot 10^5$
	45	0,1	0,05	0,0292	0,001 66	0,0208	$1,29 \cdot 10^5$
СВАМ	0	0,1	0,05	0,0097	0,001 66	0,0069	$3,75 \cdot 10^5$
	45	0,1	0,05	0,0243	0,001 25	0,0168	$1,35 \cdot 10^5$
ЭДФ	0	0,2	0,05	0,0070	0,000 013 2	0,0016	$2,50 \cdot 10^5$
	90	0,2	0,05	0,0070	0,000 50	0,0028	$1,84 \cdot 10^5$
	45	0,2	0,05	0,0150	0,000 83	0,0067	$1,67 \cdot 10^5$

Примечание. $\alpha_T, \alpha_\varepsilon, \beta_T, \beta_\varepsilon, A_T, A_\varepsilon$ — значения реологических параметров α, β, A для различных материалов, найденные теоретически и экспериментально; ω — угол армирования.

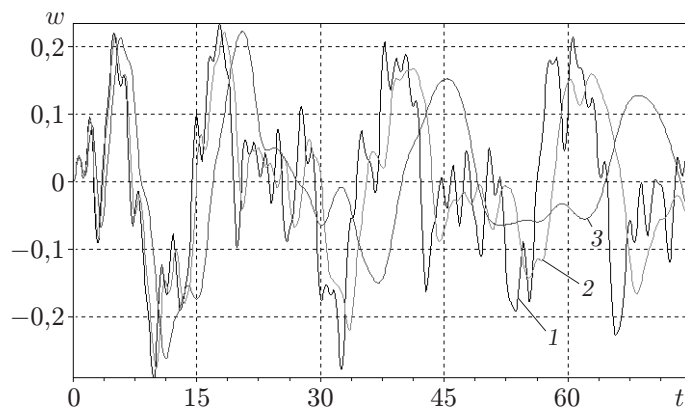


Рис. 3. Зависимость прогиба пластины от времени для различных материалов: 1 — упругий, 2 — СВАМ ($\omega = 0$), 3 — текстолит ($\omega = 0$)

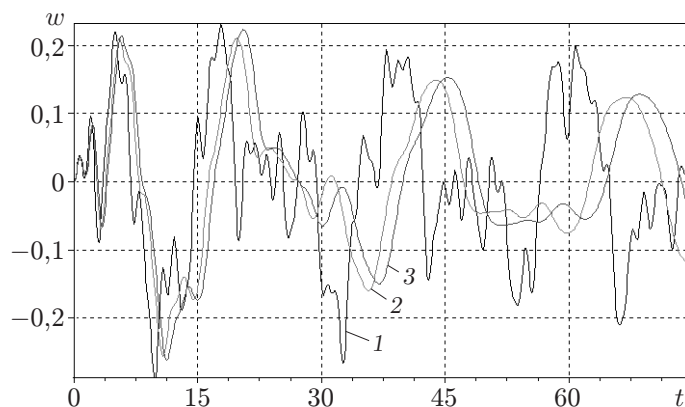


Рис. 4. Зависимость прогиба пластины от времени при различных значениях реологического параметра α : 1 — $\alpha = 0,2$ (ЭДФ, $\omega = 0$), 2 — $\alpha = 0,1$ (КАСТ-В, $\omega = 45^\circ$), 3 — $\alpha = 0,075$ (текстолит, $\omega = 0$)

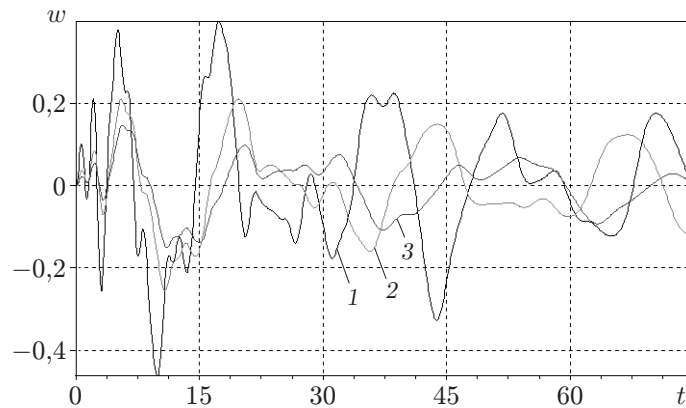


Рис. 5. Зависимость прогиба пластины, изготовленной из материала КАСТ-В ($\omega = 45^\circ$), от времени:
 1 — $M_1 = 0$; 2 — $M_1 = 0,1$; 3 — $M_1 = 0,2$

Таблица 2

Критические значения скорости потока газа при возникновении флаттера прямоугольной пластины

Материал	ω , град	Δ	λ	M_E	M_p	M_i	$V_{кр}$, м/с						
							Линейный флаттер					Нелинейный флаттер	
							$N = 2$	$N = 3$	$N = 7$	$N = 11$	$N = 13$	$N = 2$	$N = 11$
Упругий	—	133	3	4,71	0,003	0,1	1256	973	1537	1565	1570	1480	1933
ЭДФ	0	133	3	4,71	0,003	0,1	1432	982	1589	1623	1627	1455	1949
СВАМ	0	133	3	4,71	0,003	0,1	1216	953	1670	1703	1705	1325	2023
КАСТ-В	0	133	3	4,71	0,003	0,1	1163	934	1665	1725	1728	1270	2041
Текстолит	0	133	3	4,71	0,003	0,1	1004	788	1564	1597	1600	1008	1892
КАСТ-В	45	133	3	4,71	0,003	0,1	1093	853	1628	1718	1721	1096	2017
		120	3	4,71	0,003	0,1	1485	1163	2372	2423	2427	1489	2813
		150	3	4,71	0,003	0,1	763	592	1128	1153	1155	766	1366
		133	4	4,71	0,003	0,1	950	537	1134	1159	1161	956	1389
		133	3	6,00	0,003	0,1	1776	1392	2729	2914	2921	1781	3385
		133	3	4,71	0,004	0,1	774	599	1101	1149	1151	778	1373
		133	3	4,71	0,003	0	699	906	1251	1249	1249	695	1478

Влияние сосредоточенной массы в центре пластины на колебательный процесс показано на рис. 5. Видно, что увеличение сосредоточенной массы приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

В табл. 2 приведены критические значения скорости потока газа в случае возникновения флаттера прямоугольной пластины при различных физико-механических и геометрических параметрах. В расчетах использовался критерий определения критической скорости флаттера по верхнему пределу множества скоростей $\{V\}$, при котором обеспечивается сходимость разложения Бубнова — Галеркина (11) при $t \geq 0$. Этот критерий совпадает с критерием, принятым в работе [9].

Приведенные результаты показывают, что при вычислении критических значений скорости в разложении Бубнова — Галеркина (11) необходимо удерживать не менее 11 первых гармоник ($N = 11, M = 1$). Из табл. 2 следует, что результаты, полученные при

двухчленной аппроксимации (11), часто используемой для расчета флаттера, не являются достоверными. Отметим, что различия критических значений скоростей, полученных при двухчленной ($N = 2$) и многочленной ($N = 11$) аппроксимациях прогибов как в линейном, так и в нелинейном случае, при некоторых значениях физико-механических и геометрических параметров прямоугольной пластины оказываются существенными и составляют от 25 до 80 %.

Из табл. 2 также следует, что учет вязкоупругих свойств материала пластины оказывает существенное влияние на критическое значение скорости. Заметим, что результаты решения упругой и вязкоупругой задач различаются более чем на 10–15 %. Кроме того, учет геометрической нелинейности приводит к увеличению критических значений скорости, при этом их отличие от значений $V_{кр}$, полученных в линейной постановке, составляет 15–25 %.

Изменение безразмерных параметров жесткости M_E , давления M_p и сосредоточенной массы также оказывает существенное влияние на поведение вязкоупругой пластины. В частности, увеличение параметра M_E и сосредоточенной массы приводит к увеличению критического значения скорости, а увеличение параметра M_p — к его резкому уменьшению.

3. Расчет нелинейного флаттера вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами. Пусть все края вязкоупругой цилиндрической панели шарнирно оперты. Решение системы (10), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде (11) с использованием метода Бубнова — Галеркина.

Подставляя (11) в систему (10) и выполняя процедуру метода Бубнова — Галеркина для определения неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$, получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений. Так же, как и в задаче о флаттере пластины, вводя в эту систему безразмерные величины и сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klnm} \ddot{w}_{nm} + M_p \varkappa \lambda \Delta \dot{w}_{kl} + \frac{M_E \pi^4 \lambda^2}{12(1 - \mu^2) \Delta^2} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - \Gamma^*) w_{kl} + \\ & + \frac{M_E \pi^2 \theta^2 k^2}{\Delta^2} E_{kl} (1 - \Gamma^*) w_{kl} + 2 M^* M_p \varkappa \lambda \Delta \sum_{n=1}^N n (\gamma_{n+k} - \gamma_{n-k}) w_{nl} - \\ & - \frac{M_E \theta \pi^2}{\Delta^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{klnmir} w_{nm} (1 - \Gamma^*) w_{ir} - \frac{4 M_E \theta}{\Delta^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{klnmir} (1 - \Gamma^*) w_{nm} w_{ir} + \\ & + \frac{M_E \pi^2 \lambda^2}{\Delta^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirjs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ir} w_{js} - w_{0ir} w_{0js}) = 0, \\ & w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\theta = b^2/(Rh)$; коэффициенты E_{kl} , F_{klnmir} , K_{klnmir} определены в [19, 22].

Интегрирование системы (14) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [21, 22]. При расчетах в качестве ядер релаксации использовались слабосингулярные ядра Колтунова — Ржаницына (13).

В табл. 3 приведены критические значения скорости потока газа в случае возникновения флаттера вязкоупругой цилиндрической панели при различных физико-механических и геометрических параметрах. Анализ полученных результатов показывает, что влияние вязкоупругих свойств материала, безразмерных геометрических параметров Δ , λ , параметров жесткости M_E , давления M_p и сосредоточенной массы на значение $V_{кр}$ аналогично влиянию этих свойств и параметров в случае вязкоупругих прямоугольных пластин.

Таблица 3

Критические значения скорости потока газа при возникновении флаттера цилиндрической панели

Материал	ω , град	Δ	λ	θ	M_E	M_p	M_i	$V_{кр}$, м/с						
								Линейный флаттер					Нелинейный флаттер	
								$N = 2$	$N = 3$	$N = 7$	$N = 11$	$N = 13$	$N = 2$	$N = 11$
Упругий	—	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1523	1121	2553	2594	2601	2397	3221
ЭДФ	0	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1463	1105	2505	2535	2539	2199	3043
СВАМ	0	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1285	1025	2003	2040	2043	1581	2437
КАСТ-В	0	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1241	991	1923	1948	1951	1437	2315
Текстолит	0	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1003	815	1488	1496	1498	938	1767
КАСТ-В	45	133	3	6	4,71	0,003	0,1	1090	882	1623	1633	1634	1055	1932
		120	3	6	4,71	0,003	0,1	1489	1203	2200	2208	2211	1379	2634
		150	3	6	4,71	0,003	0,1	757	613	1112	1128	1131	763	1352
		133	4	6	4,71	0,003	0,1	939	532	1176	1201	1203	964	1409
		133	3	12	4,71	0,003	0,1	1180	967	1737	1744	1746	1153	2078
		133	3	6	6,00	0,003	0,1	1781	1442	2646	2651	2652	1704	3235
		133	3	6	4,71	0,004	0,1	766	620	1136	1142	1144	768	1353
		133	3	6	4,71	0,003	0	706	950	1259	1238	1239	692	1472

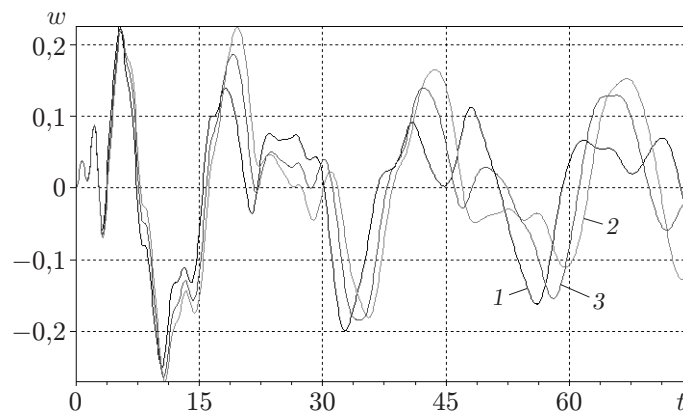


Рис. 6. Зависимость прогиба цилиндрической панели, изготовленной из материала КАСТ-В ($\omega = 45^\circ$), от времени:
 1 — $\theta = 6$; 2 — $\theta = 12$; 3 — $\theta = 18$

На рис. 6 представлена зависимость прогиба от времени при различных значениях безразмерного геометрического параметра θ . Анализ полученных результатов показывает, что с уменьшением значения θ частота колебаний уменьшается.

Заключение. Анализ результатов исследований нелинейного флаттера вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей из композиционного материала с сосредоточенными массами позволяет сделать следующие выводы. Учет вязкоупругих свойств материала приводит к существенному изменению критических значений скорости. Учет сосредоточенных масс как для упругого, так и для вязкоупругого материала приводит к увеличению критической скорости. Учет нелинейных свойств материала также приводит к увеличению критической скорости. При использовании в расчетах метода Бубнова — Галеркина для обеспечения сходимости разложения необходимо выбирать мно-

гочленную аппроксимацию прогиба. При проведении расчетов в зависимости от геометрических и физических параметров прямоугольной пластины и цилиндрической панели необходимо использовать линейную или нелинейную теорию Кирхгофа — Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колтунов М. А.** Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
2. **Тюнеева И. М.** Релаксационные характеристики стеклопластиков // Механика полимеров. 1970. № 3. С. 560–562.
3. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Мовчан А. А.** О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 20, вып. 2. С. 221–222.
5. **Bolotin V. V., Grishko A. A., Kounadis A. N., Gantes C. J.** Non-linear panel flutter in remote post-critical domains // Intern. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33, N 5. P. 753–764.
6. **Ильюшин А. А., Кийко И. А.** Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 3. С. 167–171.
7. **Алгазин С. Д.** Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. М.: Наука, 2006.
8. **Ariaratnam S. T., Abdelrahman N. M.** Almost-sure stochastic stability of viscoelastic plates in supersonic flow // AIAA J. 2001. V. 39, N 3. P. 465–472.
9. **Beldica C. E., Hilton H. H., Kubair D.** Viscoelastic panel flutter — stability, probabilities of failure and survival times // Proc. of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics and materials conf., Seattle, 2001. Seattle: Amer. Inst. Aeronaut. Astronaut., 2001. P. 3423–3433.
10. **Potapov V. D.** Stability of elastic and viscoelastic plates in a gas flow taking into account shear strains // Acta Mech. 2004. V. 276. P. 615–626.
11. **Ларионов Г. С.** Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974. № 4. С. 95–100.
12. **Bismarck-Nasr M. N., Bones C. A.** Damping effects in nonlinear panel flutter // AIAA J. 2000. V. 38, N 4. P. 711–713.
13. **Pourtakdoust S. H., Fazlzadeh S. A.** Chaotic analysis of nonlinear viscoelastic panel flutter in supersonic flow // Nonlinear Dynamics. 2003. V. 32. P. 387–404.
14. **Amba-Rao C. L.** On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // J. Appl. Mech. 1964. V. 31. P. 550–551.
15. **Cha P. D.** Free vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // J. Sound Vibration. 1997. V. 207. P. 593–596.
16. **Зорий Л. М., Сорокатый Н. И.** О стабилизирующем влиянии геометрических и жесткостных параметров на флаттер панелей с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 144–152.
17. **Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.** Dynamic stability of a viscoelastic plate with concentrated masses // Intern. Appl. Mech. 2008. V. 44, N 2. P. 208–216.
18. **Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.** Dynamic stability of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses // Strength Materials. 2008. V. 40, N 4. P. 491–502.
19. **Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A.** Non-linear vibration and dynamic stability of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated mass // Acta Mech. 2007. V. 190, N 1–4. P. 165–183.
20. **Ходжаев Д. А., Эшматов Б. Х.** Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 158–169.

21. **Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.** О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 5. С. 867–871.
22. **Эшматов Х.** Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Киев: Ин-т проблем моделирования АН Украины, 1991.
23. **Эшматов Б. Х.** Динамическая устойчивость вязкоупругих пластин при возрастающих сжимающих нагрузках // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 165–175.
24. **Eshmatov B. Kh., Mukherjee S.** Nonlinear vibrations of viscoelastic composite cylindrical panels // J. Vibration Acoust. 2007. V. 129, N 3. P. 285–296.
25. **Eshmatov B. Kh.** Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic rectangular plates // J. Sound Vibration. 2007. V. 300. P. 709–726.
26. **Эшматов Б. Х.** Нелинейные колебания и динамическая устойчивость вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки с учетом деформации сдвига и инерции вращения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 102–117.
27. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

*Поступила в редакцию 21/IV 2009 г.,
в окончательном варианте — 26/XI 2012 г.*
