

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурин А. А., Малый П. С., Савенко С. К. Ударные воздушные волны в горных выработках.— М.: Недра, 1983.
2. Великов Е. П., Власов В. П. и др. Предварительный анализ схем импульсного термоядерного реактора на релятивистских электронных пучках // Атом. энергия.— 1978.— Т. 45, № 1.
3. Куликовский В. А. Асимптотические законы затухания слабых непрерывных и ударных волн в запыленном газе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
4. Гавриленко Т. П., Григорьев В. В. Распространение ударной волны в аэровзвеси твердых частиц // ФГВ.— 1984.— № 1.
5. Альтшулер Л. В., Кругликов Б. С. Об управлении быстротой затухания импульсных быстропротекающих процессов // Высокоскоростная фотография и метрология быстропротекающих процессов: Тез. докл. XI Всесоюз. науч.-техн. конф.— М.: ВНИИОФИ, 1983.
6. Кругликов Б. С., Кутушев А. Г. Математическое моделирование быстропротекающего ударно-волнового процесса в газе с дисперсными частицами // Там же.
7. Альтшулер Л. В., Кругликов Б. С. Затухание сильных ударных волн в двухфазных и гетерогенных средах // ПМТФ.— 1984.— № 5.
8. Ивандаев А. П., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесах // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.— М.: ВИНТИ, 1981.— Т. 16.
9. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Численное исследование разлета облака мелкодиспергированных частиц или капель под действием взрыва // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.
10. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г. Влияние экранирующих слоев газовзвеси на отражение ударных волн // ПМТФ.— 1985.— № 1.
11. Ивандаев А. П., Кутушев А. Г. Некоторые закономерности эволюции плоских и сферических ударных волн в аэровзвесах // ТВТ.— 1985.— Т. 23, № 3.
12. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике.— М.: Наука, 1982.
13. Клаповский В. Е., Минеев В. Н. и др. Ослабление воздушной ударной волны перфорированными преградами // ФГВ.— 1983.— Т. 19, № 5.
14. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
15. Ивандаев А. П., Кутушев А. Г. Численное исследование нестационарных волновых течений газовзвесей с выделением границ двухфазных областей и контактных разрывов в несущем газе // ЧММСС.— 1983.— Т. 14, № 6.
16. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Математическое моделирование процесса взаимодействия с жесткими стенками ударных волн в газовзвесах // Физика и химия обработки материалов.— 1986.— № 2.
17. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г. Влияние дисперсных частиц на затухание и взаимодействие с преградами взрывных волн в газовзвесах // Нестационарные течения многофазных систем с физико-химическими превращениями.— М.: Изд-во МГУ, 1983.

Поступила 19/IX 1986 г.

УДК 539.3 + 536.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

А. И. Потапов, Н. П. Семерикова

(Горький)

В ряде задач о распространении продольных термоупругих волн в стержне весьма важен учет конвективного теплообмена с окружающей средой, который в некоторых случаях может даже преобладать над эффектами теплопроводности. С подобными явлениями приходится встречаться, например, при измерениях частотной зависимости внутреннего трения материала в стержневых образцах [1, 2], а также при высокочастотных методах прогнозирования выносливости конструкционных материалов на большие базы циклического нагружения [3].

В настоящей работе исследуется влияние теплопроводности и теплообмена через боковую поверхность стержня на эволюцию нелинейных продольных волн. Показано, что в металлах для больших длин волн по сравнению с диаметром стержня эффекты теплопроводности пренебрежимо малы по сравнению с конвективным теплообменом. В этом случае влияние теплообмена оказывается аналогичным рассеянию энергии колебаний в стержне из вязкоупругого материала с последствием и релаксацией [4]. Изучены решения, описывающие нелинейные стационарные и квазистационарные волны, бегущие в одном направлении. Получены уравнения изменения энергии и амплитуды бегущих волн и проанализированы их частные решения.

Рассматривается распространение нелинейной продольной волны в бесконечном цилиндрическом стержне, который в исходном состоянии находится в тепловом равновесии с окружающей средой. При прохождении продольной волны между областями сжатия и растяжения материала возникают перепады температуры, что приводит к появлению потока тепла как внутри стержня, так и через его боковую поверхность [5, 6]. Предполагается, что длина распространяющихся волн больше диаметра стержня, температура одинакова по его поперечному сечению, а термоупругие эффекты малы и сохраняются лишь в линейном приближении. Учитывается также движение частиц стержня в радиальном направлении. При этих предположениях нелинейная динамическая задача термоупругости описывается следующей системой уравнений:

$$(1) \quad u_{,tt} - \left(1 + \frac{6\alpha\varepsilon_0}{E} u_{,x}\right) u_{,xx} - \frac{v^2 a^2}{2\Lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_{,tt} - \frac{c_\tau^2}{c_s^2} u_{,xx}\right) = \\ = - \frac{\alpha_T \Theta}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (T - T_0);$$

$$(2) \quad T_{,t} - \frac{\chi}{c_s \Lambda} T_{,xx} + \frac{2h\Lambda}{\alpha \rho_0 c_p c_s} (T - T_0) = - \frac{\alpha_T T_0 c_s^2 \varepsilon_0}{c_p \Theta} u_{,xt}.$$

Здесь $x = x'/\Lambda$, $t = c_s t'/\Lambda$, $u = u'/\Lambda\varepsilon_0$, $T = T'/\Theta$ — безразмерные переменные; x' — размерная пространственная координата; t' — время; a — радиус стержня; Λ — длина волны; $\alpha = E^{-1} \left[\frac{(1-2\nu)^3}{6} \nu_1 + (1-2\nu) \nu_2 + \frac{2}{3} \nu_3 \right]$ — безразмерный коэффициент нелинейности; ν_1, ν_2, ν_3 — модули упругости третьего порядка; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ρ_0 — плотность материала; ε_0 — характерная деформация; $u'(x, t)$ — осевое смещение; $c_s = (E/\rho_0)^{1/2}$, $c_\tau = (\mu/\rho)^{1/2}$ — скорости продольной и сдвиговой волн в стержне; T — текущее значение температуры стержня; T_0 — температура окружающей среды; Θ — характерный масштаб изменения температуры; χ, c_p, h, α_T — соответственно коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости, теплообмена и теплового расширения.

Для стержня из стали марки Неcla 138 Λ с параметрами [7, 8] $\kappa = 45,4$ Вт/(м·К), $c_p = 460$ Дж/(кг·К), $h = 10^2$ Вт/(м²·К), $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0,29$, $\nu_1 = -3,23 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_2 = -2,65 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_3 = -1,77 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha_T = 10^{-5}$ К⁻¹ при деформациях $\varepsilon_0 \sim 10^{-5}$ безразмерные коэффициенты в (1), (2) равны ($T_0 = 300$ К, $\Theta \approx \alpha_T^{-1} \varepsilon_0 \sim 10^{-5}$ К, $2a = 1$ см) $6\alpha\varepsilon_0/E \approx -5 \cdot 10^{-6}$, $v^2 a^2 / (2\Lambda^2) \approx 5 \cdot 10^{-2} (a/\Lambda)^2$, $\alpha_T \Theta / \varepsilon_0 \sim 10^{-5}$, $\chi / (c_s \Lambda) \approx 2,6 \cdot 10^{-9} (\Lambda \text{ (см)})^{-1}$, $2h\Lambda / (\alpha \rho_0 c_p c_s) \sim 10^{-9} (\Lambda/a)$, $\alpha_T c_s^2 T_0 \varepsilon_0 / (c_p \Theta) \sim 160$. Из приведенных оценок следует, что в стержне диаметром $2a = 1$ см при $\Lambda \geq 20 a$ теплообмен через боковую поверхность преобладает над теплопроводностью. Именно такая ситуация должна иметь место в стержневых преобразователях мощных ультразвуковых систем [9, 10]. Обратная ситуация будет при возбуждении коротких импульсов (солитонов) в проволоке диаметром $2a = 1$ мм при $\Lambda < 10 a$ [11]. В случае, когда теплообмен существенно преобладает над теплопроводностью, система (1), (2) сводится к одному уравнению

$$(3) \quad u_{,tt} - (1 + 6\alpha\varepsilon_0/E \cdot u_{,x}) u_{,xx} - v^2 a^2 / (2\Lambda^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{,tt} - v^2 u_{,xx}) = \\ = h_*^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ u_{,tt} - (c^2 + 6\alpha\varepsilon_0/E \cdot u_{,x}) u_{,xx} - v^2 a^2 / (2\Lambda^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{,tt} - v^2 u_{,xx}) \right\}, \\ c^2 = 1 - 2\alpha_T^2 T_0 c_s^2 / c_p, \quad v = c_\tau / c_s, \quad h_* = 2h\Lambda / (\alpha \rho_0 c_p c_s),$$

где параметром, определяющим диссипацию энергии в стержне, является

безразмерный коэффициент теплообмена h_* . В предельном случае ($h_* = 0$ — теплоизолированный стержень) из (3) получается нелинейное волновое уравнение для адиабатических процессов, а при $h_* = \infty$ — для изотермических. В реальных ситуациях $h_* \sim 10^{-8}$, и поэтому наличие теплообмена можно рассматривать как малое отклонение волновых процессов от адиабатического. Учитывая, что в нулевом приближении $u_{,tt} \approx c^2 u_{,xx}$, приведем (3) к виду

$$(4) \quad u_{,tt} - \left(c^2 + \frac{6\alpha\epsilon_0}{E} u_{,x} \right) u_{,xx} - \frac{v^2 a^2}{2\Lambda^2} (c^2 - v^2) u_{,xxxx} + \\ + h_* (1 - c^{-2}) u_{,t} - \frac{h_* v^2 a^2 (c^2 - v^2)}{2\Lambda^2 c^2} u_{,xxt} = 0.$$

Здесь слагаемое, пропорциональное $u_{,t}$ и $u_{,xxt}$, соответственно определяет низкочастотные и высокочастотные потери. В [2] показано, что теплообмен через боковую поверхность стержня приводит к реологическому уравнению среды, отвечающему модели стандартного вязкоупругого тела [1].

Для длинноволновых возмущений ($\Lambda/a > 1$) можно ввести новые (волновые) переменные $U_{1,2}$ [9]

$$(5) \quad u_{,x} = U_1 + U_2, \quad u_{,t} = c(U_1 - U_2) + \frac{v^2 a^2}{2\Lambda^2 c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_1 - U_2),$$

сводящие уравнение (4) к симметричной системе уравнений связанных нормальных волн

$$(6) \quad \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} \mp c \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} \mp \beta \frac{\partial^3 U_{1,2}}{\partial x^3} \mp \alpha_n \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2)^2 = \\ = \pm \zeta (U_1 - U_2) + \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_1 - U_2),$$

где функции U_1 и U_2 описывают бегущие навстречу друг другу волны деформации; $\alpha_n = 3\alpha\epsilon_0/E$, $\beta = v^2 a^2 (c^2 - v^2)/4\Lambda^2$ — коэффициенты нелинейности и дисперсии; $\zeta = h_*(1 - c^{-2})$, $\delta = h_* v^2 a^2 (c^2 - v^2)/2\Lambda^2 c$ — коэффициенты низкочастотных и высокочастотных потерь. В линейном консервативном приближении U_1 и U_2 независимы и взаимодействуют лишь за счет нелинейности и диссипации.

Рассмотрим эволюцию волны $U_2 = U(x, t)$, бегущей в положительном направлении оси x (одноволновое приближение $U_1(x, t) = 0$). Так как термоупругие эффекты малы, то в качестве невозмущенного решения можно выбрать нелинейную волну, распространяющуюся в упругой среде. В этом случае $\zeta = \delta = 0$ и система (6) сводится к уравнению Кортевега-де Вриза, которое допускает решения в виде бегущих стационарных волн. Форма последних в общем случае несинусоидальна и зависит от соотношения величин нелинейности α_n и дисперсии среды β . Стационарные периодические волны, деформации $U(\xi)$, зависящие от одной бегущей переменной $\xi = x - Vt$, описываются выражением [9]

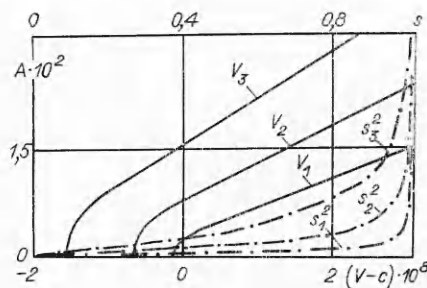
$$(7) \quad U(\xi) = -\frac{2A(K-E)}{s^2 K} + 2A \operatorname{sn}^2 \left[\left(-\frac{\alpha_n A}{3\beta s^2} \right)^{1/2} \xi, s \right].$$

Здесь A — амплитуда; V — скорость волны; s — коэффициент нелинейных искажений; $K(s)$, $E(s)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Параметры V , Λ и A такой волны связаны соотношениями

$$(8) \quad V = c - \frac{48\beta K^2}{\Lambda^2} \left(1 - \frac{\alpha_n \Lambda^2 A}{3} - \frac{K-E}{K} \right);$$

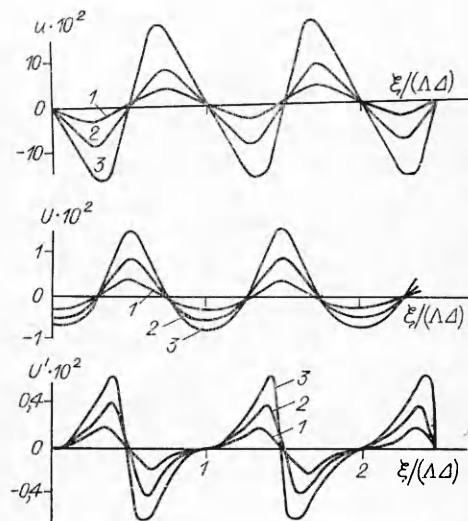
$$(9) \quad \Lambda = \sqrt{12sK} / \sqrt{-\alpha_n A / \beta}.$$

Формулы (7)–(9) позволяют построить зависимости между A , V , s при различных Λ и определить форму волны деформации $U(\xi)$. Так, на рис. 1



Р и с. 1

представлена зависимость коэффициента нелинейных искажений и скорости волны от амплитуды для стержня из стали Necla 138 A при $\Lambda = 60 a$, $45 a$, $37a$. На рис. 2 показаны распределения смещения $u(\xi)$, деформации $U(\xi)$ и скоростей деформации $U'(\xi)$ вдоль координаты ξ при $\Lambda = 45 a$ и $A = 0,4 \cdot 10^{-2}$, $0,7 \cdot 10^{-2}$, $1 \cdot 10^{-2}$ (линии 1—3). При малых амплитудах формы всех волн близки к синусоидальным. При $A > 10^{-2}$ форма волны смещений близка к пилообразной, а волна деформации U представляет собой последовательность импульсов. Выражение (7) описывает два различных класса волн: нелинейные квазигармонические волны при малых амплитудах и существенно несинусоидальные волны (квасисолитоны) при больших амплитудах [9—11].



Р и с. 2

Принимая во внимание малость эффектов диссипации, ограничимся рассмотрением нелинейных квазистационарных волн, описываемых выражением (7) с медленно изменяющимися параметрами A , V , Λ . При этом предполагается, что они по-прежнему связаны между собой соотношениями (8) и (9).

Воспользуемся уравнением изменения энергии [11], которое для рассматриваемого случая имеет вид

$$(10) \quad \frac{dw}{dt} = -2\zeta w - 2\delta \int_0^{\Lambda} U_{,x}^2 dx.$$

Здесь $w = \int_0^{\Lambda} U^2 dx$ — полная энергия волны. Заметим, что в правую часть (10) входят лишь диссипативные слагаемые, характеризующие низкочастотные и высокочастотные потери. Выражая энергию w и интеграл, входящие в правую часть (10), через амплитуду волны A , придем к уравнению

$$(11) \quad \left(2d_1 A^{1/2} + \frac{3}{2} d_2\right) \frac{dA}{dt} = -2\zeta (d_1 A^{3/2} + d_2 A) - 2\delta d_3 A^2,$$

$$\text{где} \quad d_1 = \frac{4(K-E)^2 \Lambda}{s^4 K^2}; \quad w = d_1 A^2 + d_2 A^{3/2};$$

$$d_2 = 4 \left(\frac{3\beta s^2}{-\alpha_H} \right)^{1/2} \int_0^{\Lambda/\Delta} \left[\text{sn}^4(\xi, s) - \frac{2(K-E)}{s^2 K} \text{sn}^2(\xi, s) \right] d\xi;$$

$$d_3 = 16 \left(-\frac{\alpha_H}{3\beta s^2} \right)^{1/2} \int_0^{\Lambda/\Delta} \text{sn}^2(\xi, s) \text{cn}^2(\xi, s) d\xi; \quad \Delta = \left(\frac{3\beta s^2}{-\alpha_H A} \right)^{1/2}.$$

В линейном случае $A \rightarrow 0$, анализ решений уравнений (11) приводит к известному результату об экспоненциальном затухании амплитуды волны

$A = A_0 e^{-\xi t}$ при $g = \zeta + 4 \delta \omega^2 (1 - 4\pi^2 \Lambda^2 \beta)$, когда же волна близка к солитону, $w = \frac{4}{3} \left(-\frac{3\beta}{\alpha_H} \right)^{1/2} A^{3/2}$ и (11) принимает вид

$$(12) \quad \frac{dA}{dt} = -\frac{4}{3} \zeta A + \frac{14}{3} \frac{\alpha_H \delta}{\beta} A^2.$$

Изменение амплитуды солитона происходит по более сложному закону [12]

$$(13) \quad A(t) = \frac{A_0 e^{-\frac{4}{3}\zeta t}}{1 - \frac{8\delta\alpha_H}{3\beta\zeta} \frac{A_0}{A_0} \left(1 - e^{-\frac{4}{3}\zeta t} \right)}$$

(A_0 — начальная амплитуда). Отсюда вытекает, что низкочастотные и высокочастотные потери приводят к различным законам изменения амплитуды волны. Для приведенного примера оценки коэффициентов, входящих в уравнение (12), показывают, что $\zeta \sim 10^{-12}(\Lambda/a)$, $\frac{14}{3} \frac{\alpha_H \delta}{\beta} \sim 2 \cdot 10^{-14}(A/a)$. Следовательно, при деформациях $A \leq 1$ ($u, x \leq 10^{-5}$) высокочастотные потери пренебрежимо малы, поэтому можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе (13), и в результате амплитуда солитона также будет уменьшаться по экспоненциальному закону, но с другим декрементом.

Авторы признательны А. И. Весницкому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. — М.: Metallurgia, 1974.
2. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. К теории термоупругого внутреннего трения в твердых телах // Внутреннее трение в металлах и сплавах. — М.: Наука, 1966.
3. Кузьменко В. А. Звуковые и ультразвуковые колебания при динамических испытаниях материалов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
5. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. — Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1972.
6. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Динамическая задача термоупругости для тонкого стержня с учетом теплоотдачи с его поверхности // Вопросы механики реального твердого тела. — Киев: Наук. думка, 1964. — Вып. 2.
7. Справочник по машиностроительным материалам: В 4 т./Под ред. Г. И. Погодина-Алексеева. — М.: Mashgiz, 1959. — Т. 1.
8. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
9. Милосердова И. В., Потапов А. И. Нелинейные стоячие волны в стержне конечной длины // Акуст. журн. — 1983. — Т. 29, № 4.
10. Милосердова И. В., Потапов А. И. Вибрации в нелинейных стержнях при наличии внутренних резонансов // Машиноведение. — 1983. — № 4.
11. Островский Л. А., Сугин А. М. Нелинейные упругие волны в стержне // ПММ. — 1977. — Т. 41, № 3.
12. Ostrovsky L. A. Solitons in activ media // Nonlinear Deformation waves/Ed. by U. Niguel, J. Engelbrecht. — Berlin e. a.: Springer, 1983.

Поступила 3/X 1986 г.

УДК 539,374

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА КОМПАКТИРОВАНИЯ ПОРОШКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ НА ОСНОВЕ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

А. И. Матыцин

(Новосибирск)

Взрывное компактирование порошков часто осуществляется в цилиндрической геометрии, когда приложенная нагрузка недостаточно велика и на результат нагружения могут оказать влияние прочностные свойства материалов. Подобная точка зрения высказывалась в [1], об этом также свидетельствуют результаты экспериментов [2—4]. В процессе ударного нагружения конечная плотность порошка, амплитуда ударной