

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ И СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ В МАТЕРИАЛЕ

А. А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия

E-mail: rogovoy@icmm.ru

С использованием экспериментальных данных, позволяющих разделить затраченную пластическую работу на латентную и тепловую части, строятся зависимости скалярной меры структурных изменений, происходящих в материале при пластической деформации, от меры пластических деформаций и свободной энергии от меры структурных изменений. Полученные зависимости, а также кинематические соотношения, определяющее уравнение и уравнение теплопроводности, удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности, применены для построения модели термоупруго-неупругого процесса при наличии конечных деформаций и структурных изменений в материале. Модель тестируется на задаче об изменении температуры в процессе адиабатического упругопластического сжатия, имеющей экспериментальное обеспечение.

Ключевые слова: конечные деформации, определяющее уравнение, уравнение теплопроводности, термодинамика, структурные изменения, модель адиабатического процесса.

DOI: 10.15372/PMTF20150518

Введение. В работах [1–4] получены кинематические соотношения, определяющее уравнение и уравнение теплопроводности, удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности и позволяющие описать термоупруго-неупругие процессы при конечных деформациях [5, 6]. Параметры a_k функционального соотношения, представляющего собой определяющее уравнение, зависят от температуры Θ и некоторых скалярных мер структурных изменений μ_i , происходящих в материале в результате неупругого процесса: $a_k = a_k(\Theta, \mu_i)$. Если конкретные зависимости этих параметров от температуры можно построить с использованием известных экспериментальных данных (см., например, [7]), то зависимость этих параметров от μ_i в [1–7] не конкретизировалась и конкретные выражения для мер структурных изменений μ_i не предлагались.

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть расходуется на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. На макроуровне эта новая структура материала способствует изменению его упругих и пластических характеристик. В последние годы проводятся систематические экспериментальные исследования, позволяющие разделить затраченную пластическую работу на запасенную (скрытую, латентную) и тепловую части.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 220 от 9 апреля 2010 г.), договор № 14.В25.310006 от 24 июня 2013 г.

© Роговой А. А., 2015

В настоящей работе с использованием этих экспериментальных данных и только одной меры $\mu_i \equiv \mu$ строится зависимость μ от меры пластических деформаций Λ_P . Для учета изменений свободной энергии, происходящих вследствие структурных превращений в материале, вводится функция Ψ и с использованием имеющихся экспериментальных данных строится ее зависимость от μ . С помощью построенных таким образом функций, полученных ранее кинематических соотношений, определяющего уравнения и уравнения теплопроводности строится модель термоупруго-неупругого процесса при конечных деформациях и структурных изменениях в материале, которая тестируется на задаче об изменении температуры в процессе адиабатического упругопластического сжатия, имеющей экспериментальное обеспечение.

1. Соотношения, используемые при построении модели. Ниже приводятся кинематические соотношения, определяющее уравнение и уравнение теплопроводности, которые используются при построении модели.

1.1. *Кинематические соотношения.* Кинематику процесса, определяемую градиентом места F , представим в виде [2, 3]

$$F = f_E \cdot f_{IN} \cdot f_\Theta \cdot F_*, \quad (1.1)$$

где F_* — термоупруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную; индекс “*” соответствует промежуточной конфигурации; f_E , f_{IN} , f_Θ — упругий, неупругий и температурный градиенты места, которые незначительно отличаются от единичного тензора и мультипликация которых (в любом порядке, так как они коммутируют между собой) переводит промежуточную конфигурацию в близкую текущую. Из соотношения (1.1) получаем выражение

$$F = F_E \cdot F_{IN} \cdot F_\Theta = [g + \varepsilon(h_E + h_{IN} + h_\Theta)] \cdot F_*, \quad F_* = F_{E*} \cdot F_{IN*} \cdot F_{\Theta*}, \quad (1.2)$$

где полные градиенты места F_E , F_{IN} , F_Θ выражаются через их значения F_{E*} , F_{IN*} , $F_{\Theta*}$ в промежуточной конфигурации, близкой к текущей:

$$F_E = (g + \varepsilon h_E) \cdot F_{E*}; \quad (1.3)$$

$$F_{IN} = (g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}) \cdot F_{IN*}; \quad (1.4)$$

$$F_\Theta = (g + \varepsilon F_{IN*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*} \cdot F_{IN*}) \cdot F_{\Theta*}. \quad (1.5)$$

Здесь g — единичный тензор; h_E , h_{IN} , h_Θ — градиенты относительно промежуточной конфигурации векторов упругих \mathbf{u}_E , неупругих \mathbf{u}_{IN} и температурных \mathbf{u}_Θ перемещений; ε — малый параметр (положительная величина), наличие которого при векторах перемещений является математической формализацией их малости. В действительности перемещения \mathbf{u}_E , \mathbf{u}_{IN} , \mathbf{u}_Θ по отдельности не существуют, так как не существует уравнений для их определения. Существует только величина $\mathbf{u} = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{IN} + \mathbf{u}_\Theta$ — полное приращение перемещений, поэтому конфигурация, определяемая этим перемещением в каком-либо термоупруго-неупругом процессе, является совместной. Градиенты h_E , h_{IN} , h_Θ существуют, и для определения их симметричных и кососимметричных частей имеются соответствующие соотношения.

Поскольку промежуточная и текущая конфигурации связаны вектором полного перемещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{IN} + \mathbf{u}_\Theta, \quad (1.6)$$

малость величин в правых частях (1.6) (наличие при них параметра ε) приводит к малости вектора полного перемещения, т. е. к формализации понятия близости промежуточной и текущей конфигураций. Будем полагать, что

$$\varepsilon \mathbf{u}(t, q^i) \equiv \Delta \mathbf{u}(t, q^i) = \dot{\mathbf{u}}(\tau, q^i) \Delta t, \quad \Delta t = t - t_*, \quad \tau \in [t_*, t], \quad (1.7)$$

где t, t_* — время, соответствующее текущей и промежуточной конфигурациям; знак Δ обозначает малое конечное приращение величины; q^i ($i = 1, 2, 3$) — лагранжевы (материальные, не зависящие от времени) координаты точки среды; $\dot{\mathbf{u}}$ — скорость изменения \mathbf{u} . Из (1.7) следует, что производные от малых величин по координатам также являются малыми величинами, а по времени — конечными:

$$[\dot{\mathbf{u}}(\tau, q^i) \Delta t]_{,q^i} = [\dot{\mathbf{u}}(\tau, q^i)]_{,q^i} \Delta t = \varepsilon [\mathbf{u}(t, q^i)]_{,q^i}, \quad \dot{\mathbf{u}}(t, q^i) = \lim_{t_* \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{u}(t, q^i)}{\Delta t}$$

$((\cdot)_{,q^i} \equiv \partial(\cdot)/\partial q^i)$. Поэтому в соотношениях (1.2)–(1.5) при градиентах перемещений имеется малый параметр ε . Из (1.6) следует, что градиент полных перемещений $h = h_E + h_{IN} + h_\Theta$. Выделяя в левой и правой частях этого равенства симметричные и косо-симметричные составляющие, получаем соотношения для деформаций $e = e_E + e_{IN} + e_\Theta$ и поворотов $d = d_E + d_{IN} + d_\Theta$ относительно промежуточной конфигурации, причем деформация скорости перемещений и скорость деформации совпадают: $D = \dot{e}$, $D_E = \dot{e}_E$, $D_{IN} = \dot{e}_{IN}$, $D_\Theta = \dot{e}_\Theta$.

Согласно [3] мощности упругого, неупругого и температурного деформирования зависят от выбора систем отсчета для описания неупругой и температурной кинематики. В общем случае такой выбор позволяет получить значения мощностей упругого деформирования, механической и тепловой диссипации произвольной величины и знака. Данные мощности инвариантны относительно изменения систем отсчета, только в случае если градиенты места F_{IN} , F_Θ являются чистыми деформациями без вращений. Это означает, что в полярных разложениях данных тензоров ортогональные тензоры равны единичным, $F_{IN} = U_{IN}$, $F_\Theta = U_\Theta$. Эти условия позволяют получить недостающие связи между e_{IN} и d_{IN} , e_Θ и d_Θ [4]:

$$\begin{aligned} A \cdot d_{IN} + d_{IN} \cdot A &= A \cdot e_{IN} - e_{IN} \cdot A, & A &= F_{E*} \cdot U_{IN*} \cdot F_{E*}^T, \\ A \cdot d_\Theta + d_\Theta \cdot A &= A \cdot e_\Theta - e_\Theta \cdot A, & A &= F_{E*} \cdot F_{IN*} \cdot U_{\Theta*} \cdot F_{IN*}^T \cdot F_{E*}^T. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) необходимы, так как малые деформации и малые вращения относительно промежуточной конфигурации содержатся в соотношениях (1.3)–(1.5). Если малые неупругие и температурные деформации (или скорости деформаций) определены уравнениями состояния (например, в теории пластичности это ассоциированный закон пластического течения, для вязких материалов — дифференциальное соотношение $\dot{e}_{IN} = T/\eta$, где T — тензор истинных напряжений; η — вязкость, в теории термоупругости — закон линейного температурного расширения), то малые вращения не определены, так как для них не существует соответствующих определяющих уравнений. Каждое из уравнений (1.8) имеет единственное решение, и для частного, но широко распространенного случая, когда температурные деформации определяются по закону линейного температурного расширения, из третьего уравнения (1.8) следует, что $d_\Theta = 0$.

В работе [3] вводятся два приращения и две скорости изменения меры деформации Коши — Грина C : полное приращение и полная скорость, а также приращение и скорость, связанные только с упругими деформациями. Последние имеют вид

$$(dC)_* = 2F^T \cdot de_E \cdot F, \quad \dot{C}_* = 2F^T \cdot \dot{e}_E \cdot F = 2F^T \cdot D_E \cdot F,$$

где C_* — тензор C , изменяющийся только за счет упругих деформаций.

1.2. *Определяющее уравнение.* В работах [2, 5, 6] на основе соотношения, описывающего поведение упругого материала [1]:

$$T = J^{-1} F \cdot \tilde{g}(C) \cdot F^T$$

($\tilde{g}(C)$ — функция отклика материала; J — якобиан, характеризующий отношение элементарных объемов в текущей и начальной конфигурациях), получено не противоречащее

законам термодинамики и удовлетворяющее принципу объективности определяющее уравнение для термоупруго-неупругого процесса при конечных деформациях:

$$T(t) = 4J^{-1}(t)F(t) \cdot \left[\int_0^t \left(F(\tau) \circ \frac{\partial^2 W(C_E(\tau), \mu_i(t))}{\partial C_E^2} \cdot F^T(\tau) \right) \cdot D_E(\tau) d\tau \right] \cdot F^T(t). \quad (1.9)$$

Здесь W — упругий потенциал, являющийся функцией меры упругих деформаций $C_E = F_E^T \cdot F_E$ с коэффициентами, зависящими от параметров μ_i ; запись $A \circ B^{IV}$ означает операцию скалярного умножения слева тензора второго ранга A на третий базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} . При выводе (1.9) использованы правила дифференцирования тензорной функции тензорного аргумента по тензорному аргументу [8]. Разбивая интеграл в (1.9) от 0 до t на интегралы от 0 до t_* и от t_* до t , уравнение (1.9) представим в рекуррентной форме

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e)]T_* + \varepsilon h \cdot T_* + \varepsilon T_* \cdot h^T + \varepsilon \theta(T, \Theta)_* + \varepsilon \zeta_i(T, \mu_i)_* + \varepsilon L_*^{IV} \cdot (e - e_{IN} - e_\Theta), \quad (1.10)$$

где $I_1(e)$ — первый инвариант e ,

$$L_*^{IV} = 2J_*^{-1} \left(F_* \cdot \left(F_* \circ \frac{\partial^2 W(C_E, \Theta_*, \mu_{i*})}{\partial C_E^2} \Big|_{C_E=C_{E*}} \cdot F_*^T \right) \cdot F_*^T \right), \quad (1.11)$$

в качестве одного из параметров μ_i принята температура Θ , а остальные параметры μ_i являются мерами структурных изменений, происходящих в материале в процессе неупругого деформирования; θ , ζ_i — приращения Θ , μ_i при переходе из промежуточной конфигурации в текущую, запись $B^{IV} \cdot A$ означает операцию скалярного умножения справа тензора второго ранга A на второй базисный вектор тензора четвертого ранга B^{IV} . Приближенное уравнение (1.10) (при его получении сохранялись только линейные слагаемые относительно ε) сводится к точному эволюционному соотношению

$$T^{Tr} = \dot{\Theta} T_{,\Theta} + \dot{\mu}_i T_{,\mu_i} + L^{IV} \cdot (\dot{e} - \dot{e}_{IN} - \dot{e}_\Theta),$$

где $T^{Tr} \equiv \dot{T} - \dot{h} \cdot T - T \cdot \dot{h}^T + I_1(\dot{e})T$ — автоматически появляющаяся объективная производная Трусделла; тензор четвертого ранга L^{IV} имеет те же аргументы, что и тензор (1.11), но значения соответствуют текущей конфигурации. Вводя уравнения для \dot{e}_{IN} , \dot{e}_Θ , завершаем построение определяющего уравнения.

1.3. *Термодинамика и уравнение теплопроводности.* В работах [3, 5, 6] выражение для свободной энергии представлено в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от C_* , μ_i , Θ , а другое — только от Θ , причем первое слагаемое представляет собой функцию C_* , коэффициенты которой зависят от μ_i и Θ . Без потери общности далее ограничимся одним параметром μ , являющимся мерой структурных изменений, происходящих в материале в процессе неупругого деформирования. Будем полагать, что меру структурных изменений, возникающих в материале, например в результате пластических деформаций, в общем случае можно представить в виде $\mu = \mu(\Lambda_P, \Theta)$, где Λ_P — мера пластических деформаций и от Θ зависят только параметры (коэффициенты) этой функции. Поэтому если $\Lambda_P = 0$, то $\mu = 0$. Такая структура функции μ позволяет описать процесс рекристаллизации, в результате которого при достижении температурой определенного значения, называемого температурой рекристаллизации, накопленные в материале структурные изменения исчезают (параметры функции μ , зависящие от Θ , становятся равными нулю), при этом мера накопленных пластических деформаций Λ_P остается неизменной. Для того чтобы учесть изменения в выражении для свободной энергии, происходящие за счет

структурных превращений в материале, введем в дополнение к двум указанным выше слагаемым функцию Ψ , зависящую только от μ (причем $\Psi(\mu) = 0$, если $\mu = 0$). Как и в работах [3, 5, 6], представим второй закон термодинамики в виде неравенства Клаузиуса — Дюгема, выделим из него определяющее уравнение, уравнение для энтропии, а оставшееся неравенство запишем в виде

$$T \cdot \cdot D_{IN} - J^{-1} (W_{1,\mu} + \rho_0 \Psi_{,\mu}) \mu_{,\Lambda P} \dot{\Lambda}_P - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0, \quad (1.12)$$

где ρ_0 — плотность массы в начальной конфигурации; \mathbf{q} — тепловой поток; $\tilde{\nabla}$ — оператор Гамильтона в текущей конфигурации. Функционал W_1 в (1.12) имеет вид [2]

$$W_1(t) = 4 \int_0^t \left\{ F(\tau_1) \cdot \left[\int_0^{\tau_1} \left(F(\tau_2) \cdot \frac{\partial^2 W(C_E(\tau_2), \Theta(t), \mu(t))}{\partial C_E^2} \cdot F^T(\tau_2) \right) \cdot \cdot D_E(\tau_2) d\tau_2 \right] \cdot F^T(\tau_1) \right\} \cdot \cdot D_E(\tau_1) d\tau_1. \quad (1.13)$$

В чисто упругом процессе, когда $F_{IN} \cdot F_\Theta \equiv g$, функционал W_1 становится упругим потенциалом W . Из (1.9), (1.13) получаем

$$W_1(t) = \int_0^t J(\tau) T(t, \tau) \cdot \cdot D_E(\tau) d\tau, \quad (1.14)$$

откуда следует, что функционал W_1 — это упругая работа в термоупруго-неупругом процессе. Аналогично представлению соотношения (1.9) в рекуррентной форме уравнение (1.13) или (1.14) также представим в форме

$$W_1 = W_{1*} + \varepsilon \theta (W_{1,\Theta})_* + \varepsilon \zeta (W_{1,\mu})_* + \varepsilon J_* T_* \cdot \cdot e_E, \quad (1.15)$$

где W_{1*} , $(W_{1,\Theta})_*$, $(W_{1,\mu})_*$ — значения W_1 , $W_{1,\Theta}$, $W_{1,\mu}$ в промежуточной конфигурации, близкой к текущей. Это приближенное соотношение сводится к точному эволюционному соотношению

$$\dot{W}_1 = \dot{\Theta} W_{1,\Theta} + \dot{\mu} W_{1,\mu} + J T \cdot \cdot D_E,$$

которое с учетом $J T \cdot \cdot D_E = W_{1,C_*} \cdot \cdot \dot{C}_*$ принимает вид

$$\dot{W}_1 = \dot{\Theta} W_{1,\Theta} + \dot{\mu} W_{1,\mu} + W_{1,C_*} \cdot \cdot \dot{C}_*.$$

В результате определяющее уравнение, вытекающее из второго закона термодинамики, представляется в виде (1.9), а из соотношения для энтропии и первого закона термодинамики получаем уравнение теплопроводности

$$c \dot{\Theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho_0 J^{-1} \dot{\Omega} + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta), \quad (1.16)$$

где теплоемкость c определяется из соотношения

$$c = J^{-1} \rho_0 c_T + \Theta [(\beta_{,\Theta} + 2\beta^2) I_1(T) + \beta (I_1(T, \Theta) + I_1(T, \mu) \mu, \Theta) - J^{-1} (W_{1,\Theta\Theta} + 2W_{1,\Theta\mu} \mu, \Theta + (W_{1,\mu\mu} + \rho_0 \Psi_{,\mu\mu}) \mu_{,\Theta}^2 + (W_{1,\mu} + \rho_0 \Psi_{,\mu}) \mu, \Theta\Theta)]. \quad (1.17)$$

Выражения для скорости производства тепла упругими деформациями \dot{Q}_E и неупругими деформациями и структурными изменениями в материале \dot{Q}_{IN} имеют соответственно вид

$$\dot{Q}_E = \Theta (T_{,\Theta} + T_{,\mu} \mu, \Theta - 2\beta T - \beta g \cdot \cdot L^{IV}) \cdot \cdot D_E; \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\Theta)T \cdot \cdot D_{IN} + J^{-1}\dot{\Lambda}_P [(\Theta W_{1,\Theta\mu} - W_{1,\mu} - \rho_0\Psi_{,\mu} - \\ - J\beta\Theta I_1(T,\mu))\mu_{,\Lambda_P} + \Theta(W_{1,\mu\mu} + \rho_0\Psi_{,\mu\mu})\mu_{,\Theta\Lambda_P} + \\ + \Theta(W_{1,\mu} + \rho_0\Psi_{,\mu})\mu_{,\Theta\Lambda_P}]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В уравнениях (1.16)–(1.19) c_T — теплоемкость при нулевом напряжении; $\dot{\Omega}$ — скорость производства тепла внутренними источниками; β — коэффициент линейного температурного расширения; λ — теплопроводность. При выводе этих уравнений использовался закон Фурье для теплового потока \mathbf{q} .

Полученные кинематические соотношения, определяющее уравнение и уравнение теплопроводности позволяют построить модель термоупруго-неупругого процесса при наличии конечных деформаций и структурных изменений в материале. Для этого необходимо конкретизировать зависимости Ψ от μ и μ от Λ_P и Θ .

2. Пластическая работа, преобразованная в тепло. Как известно, часть пластической работы, затраченной на деформирование материала, переходит в тепло, а другая часть расходуется на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. Для того чтобы оценить величину работы, перешедшей в тепло, введем функцию

$$\gamma = \dot{Q}_{IN}/\dot{W}_P, \quad \dot{W}_P = T \cdot \cdot D_P, \quad (2.1)$$

где D_P — деформация скорости пластических перемещений. Зависимость γ от меры накопленных пластических деформаций определяется экспериментально. Величину

$$\Lambda_P = \int_0^t \xi_P(\tau) d\tau = \int_0^t \sqrt{(2/3) D_P(\tau) \cdot \cdot D_P(\tau)} d\tau \quad (2.2)$$

можно принять в качестве такой меры, где ξ_P — интенсивность деформации скорости.

На рис. 1 представлена типичная зависимость $\gamma(\Lambda_P)$, построенная на основе экспериментальных данных о динамическом испытании на одноосное сжатие на установке Гопкинсона — Кольского алюминиевого сплава 2024-T351 (аналога российского материала D16T), свойства которого не зависят от скорости деформации [9, 10]. На этапе возникновения структурных изменений в материале большая часть пластической работы переходит в тепло. Для дальнейших структурных изменений требуется дополнительная энергия, и величина пластической работы, перешедшей в тепло, уменьшается. Когда процесс структурных изменений заканчивается, эта величина вновь увеличивается.

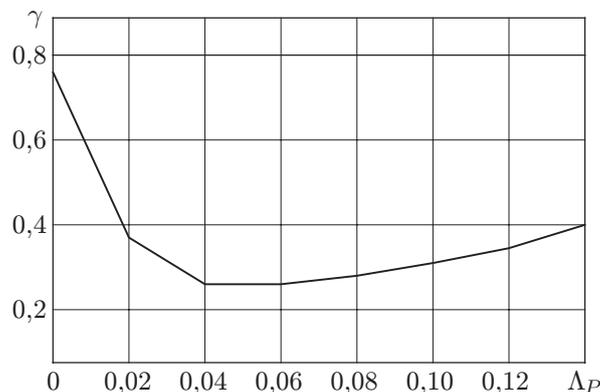


Рис. 1. Типичная зависимость $\gamma(\Lambda_P)$

Используем соотношения (1.1)–(1.19) для описания результатов, полученных в работах [9, 10] для алюминиевого сплава 2024-T351 (D16T) (модуль сдвига $G = 27,5$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$, предел текучести $T_S = 325$ МПа, плотность массы $\rho_0 = 2,81 \cdot 10^3$ кг/м³, теплоемкость $c_T = 0,922$ КДж/(кг · К), коэффициент линейного температурного расширения $\beta = 22,7 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹), поведение которого не зависит от скорости деформации. В работах [9, 10] осуществляется процесс одноосного напряженного сжатия, при этом положение точки в текущей конфигурации определяется в декартовой системе координат радиус-вектором $\mathbf{R} = \alpha_1(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \alpha_2 z\mathbf{k}$, где единичный вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси образца; $\alpha_1 = \alpha_{1*} + \varepsilon\xi$, $\alpha_2 = \alpha_{2*} + \varepsilon\eta$ — относительное удлинение (укорочение) в поперечном и осевом направлениях в текущей конфигурации, α_{1*} , α_{2*} — в промежуточной конфигурации; ξ , η — их приращения; α_{2*} , η — заданные величины; значение α_{1*} известно из решения задачи на предыдущем шаге. Действительно, в соответствии с выражением для \mathbf{R} градиент места имеет вид

$$F = (\nabla \mathbf{R})^T = \alpha_1(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + \alpha_2 \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad F_* = \alpha_{1*}(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + \alpha_{2*} \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad (2.3)$$

где ∇ — оператор Гамильтона относительно начальной конфигурации. Тогда выражение для тензора полных деформаций $E = (C - g)/2$, где $C = F^T \cdot F$, можно представить в виде $E = E^{11}(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + E^{33} \mathbf{k}\mathbf{k}$, где $E^{11} = (\alpha_1^2 - 1)/2$; $E^{33} = (\alpha_2^2 - 1)/2$. Из последнего равенства следует

$$\alpha_{2*} = \sqrt{1 + 2E_*^{33}}, \quad \eta = \sqrt{1 + 2E_*^{33}} - \alpha_{2*}. \quad (2.4)$$

С использованием данных об осевой деформации E_*^{33} в процессе деформирования находим величины α_{2*} , η .

Положение материальной точки в промежуточной конфигурации определяется радиус-вектором $\mathbf{R}_* = \alpha_{1*}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \alpha_{2*} z\mathbf{k}$, откуда следует, что $\mathbf{u} = \xi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \eta z\mathbf{k}$, где $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_*$ — вектор перемещения, переводящий промежуточную конфигурацию в текущую. Как и в работе [7], оператор Гамильтона $\overset{*}{\nabla}$ и градиент перемещения h относительно промежуточной конфигурации имеют вид

$$\overset{*}{\nabla} = \frac{1}{\alpha_{1*}} \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{\alpha_{2*}} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad h = \frac{\xi}{\alpha_{1*}} (\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + \frac{\eta}{\alpha_{2*}} \mathbf{k}\mathbf{k},$$

тензор e , определяющий малые деформации, соответствующие преобразованию промежуточной конфигурации в текущую, равен тензору h . Для рассматриваемой задачи градиенты упругих и пластических малых перемещений h_E , h_P относительно промежуточной конфигурации имеют структуру, подобную структуре градиента перемещения h , и совпадают с тензорами малых упругих и пластических деформаций

$$h_E = e_E = e_E^1(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + e_E^3 \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad h_P = e_P = e_P^1(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + e_P^3 \mathbf{k}\mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Используем ассоциированный закон пластического течения с поверхностью текучести Мизеса

$$D_P = \frac{3\dot{\Lambda}_P}{2\sigma_i} S, \quad (2.6)$$

где σ_i — интенсивность напряжений; S — девиатор тензора T . Отсюда следует, что e_P — девиатор и для рассматриваемой задачи $e_P^1 = -e_P^3/2$. Из выражений (1.3), (1.4) находим

$$\begin{aligned} F_E &= F_E^1(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + F_E^3 \mathbf{k}\mathbf{k}, & F_E^1 &= (1 + \varepsilon e_E^1) F_{E*}^1, & F_E^3 &= (1 + \varepsilon e_E^3) F_{E*}^3; \\ F_P &= F_P^1(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + F_P^3 \mathbf{k}\mathbf{k}, & F_P^1 &= (1 - \varepsilon e_P^3/2) F_{P*}^1, & F_P^3 &= (1 + \varepsilon e_P^3) F_{P*}^3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В дополнение к тензору полных деформаций E построим тензоры упругих и пластических деформаций

$$E_E = (C_E - g)/2, \quad C_E = F_E^T \cdot F_E, \quad E_P = (C_P - g)/2, \quad C_P = F_P^T \cdot F_P. \quad (2.8)$$

Эти деформации можно вычислить, используя величины $\alpha_1, \alpha_2, e_E^1, e_E^3, e_P^3$, рекуррентные соотношения (2.7) и определяющее уравнение (1.10).

Экспериментальные данные, приведенные в работах [9, 10], свидетельствуют о том, что осевое напряжение слабо зависит от скорости деформации и изменения температуры. В других экспериментальных работах, посвященных исследованию пластичности, обсуждается зависимость упругих параметров материала от предварительной пластической деформации. В частности, в работах [11–15] (60-е гг. XX в.) показано, что упругие свойства металлов зависят от пластических деформаций. Так, предварительное пластическое растяжение на 2 % приводит к уменьшению модуля сдвига на 19 %, а в результате предварительного пластического сдвига с деформацией 4 % модуль Юнга уменьшается на 20 %. При длительном отдыхе пластически деформированного материала его начальные упругие свойства почти полностью восстанавливаются. Результаты, полученные в работах [16, 17], качественно согласуются с экспериментальными данными [11–15], но в этих экспериментах наблюдается незначительное (на 5–7 %) уменьшение начальных значений параметров материала. В [16, 17] указываются причины, по которым авторы [11–15] получили некорректные результаты.

Согласно современной концепции пластического процесса как процесса сдвига по плоскостям скольжения в кристалле если данный процесс не приводит к дроблению зерна в материале или к появлению в нем новой фазы, что может иметь место при некоторых историях деформирования, то сдвиг по плоскостям скольжения в кристалле не изменяет упругого взаимодействия атомов и, следовательно, упругие свойства материала не зависят от предварительной пластической деформации. Это может служить объяснением результатов экспериментов, полученных в [16, 17].

Итак, считая, что упругие свойства материала не зависят от предварительной пластической деформации и температура меняется незначительно, можно положить равными нулю все производные относительно скалярных структурных параметров μ_i и температуры в выражении для тензора напряжений T (1.10) и в функционале W_1 (1.14), (1.15). Тогда определяющее уравнение (1.10) принимает вид

$$T = [1 - \varepsilon I_1(e)]T_* + \varepsilon h \cdot T_* + \varepsilon T_* \cdot h^T + \varepsilon L_*^{IV} \cdot \cdot (e - e_P). \quad (2.9)$$

В качестве упругого потенциала используем упрощенный закон Синьорини [18], который справедлив для умеренных упругих деформаций металлов и сплавов. Из закона Синьорини следует определяющее уравнение

$$T_E = k_1(A_E)g + 2k_2(A_E)A_E,$$

где

$$A_E = (g - F_E^T \cdot F_E^{-1})/2,$$

$$k_1(A_E) = \Lambda I_1(A_E) + (\Lambda + G)I_1^2(A_E)/2, \quad k_2(A_E) = G - (\Lambda + G)I_1(A_E),$$

T_E — истинные напряжения, соответствующие чисто упругой деформации. В случае малых деформаций это уравнение сводится к закону Гука. Используя соотношение (1.11), для упрощенного закона Синьорини строим выражение $L_*^{IV} \cdot \cdot e$, имеющееся в (2.9):

$$L_*^{IV} \cdot \cdot e = [C_1(C_1 \cdot \cdot e) - 2C_1 \cdot e \cdot C_1][k_1(A_E) + k_2(A_E)] + (\Lambda + G)C_2(C_2 \cdot \cdot e) - [C_1(C_2 \cdot \cdot e) + C_2(C_1 \cdot \cdot e) - 2C_1 \cdot e \cdot C_2 - 2C_2 \cdot e \cdot C_1]k_2(A_E); \quad (2.10)$$

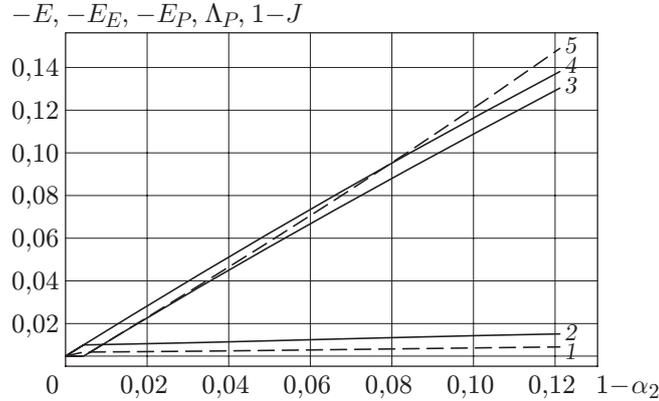


Рис. 2. Деформационные характеристики процесса адиабатического сжатия алюминиевого сплава 2024-T351 (D16T):
 1 — $1 - J$, 2 — E_E , 3 — E_P , 4 — E , 5 — Λ_P

$$C_1 = F_* \cdot C_{E_*}^{-1} \cdot F_*^T, \quad C_2 = F_* \cdot C_{E_*}^{-2} \cdot F_*^T, \quad (2.11)$$

где материальные параметры Λ , G не зависят от температуры и предварительной пластической деформации.

В рассматриваемой задаче об одноосном сжатии напряжения однородны, тензор напряжений имеет структуру $T = T^{11}(\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}) + T^{33}\mathbf{k}\mathbf{k}$, где $T^{11} = 0$, зависимость T^{33} от E^{33} известна из экспериментов [10]. Из соотношений (2.9), (2.10) получаем систему двух линейных уравнений для вычисления ξ , e_P^3 в случае упругопластического процесса, в случае чисто упругого процесса при $T^{33} < T_S$ остается только одно уравнение для ξ . При решении задачи использовались начальные значения $T_*^{33} = 0$, $E_*^{33} = 0$, $\alpha_{1*} = 1$, $F_{E_*}^1 = F_{E_*}^3 = F_{P_*}^1 = F_{P_*}^3 = 1$. Следовательно, $C_{E_*} = C_{P_*} = g$. Учитывая, что в любой момент времени $T^{11} = 0$, $e_P^3 = 0$ при $T^{33} < T_S$, и задавая шаг изменения E^{33} , из уравнений (2.4) находим α_{2*} , η , из второго выражения (2.3) — F_* , из (2.11) — тензоры C_1 , C_2 . Затем строим и решаем полученную из (2.9), (2.10) систему и определяем деформационные характеристики процесса, зависимости которых от осевого относительного укорочения образца $1 - \alpha_2$ приведены на рис. 2. Изменение объема образца $1 - J$ происходит только за счет упругого процесса, поэтому для описания пластичности использовалось соотношение (2.6). Упругая E_E и пластическая E_P осевые деформации рассчитывались по выражениям (2.8). При $E_E \leq 0,0055$ осуществляется чисто упругий процесс. Графики, представленные на рис. 2, позволяют установить соответствия между полными E , упругими E_E , пластическими E_P деформациями и накопленной интенсивностью пластических деформаций Λ_P для рассматриваемого процесса адиабатического сжатия образца.

Из соотношений (2.5) следует, что тензоры малых вращений d_E , d_P , сопровождающих рассматриваемый процесс, равны нулю. Для тензора d_P это следует также из решения первого уравнения (1.8). Действительно, с учетом соотношений (2.7) для F_E , F_P и выражения (2.5) для e_P получаем нулевую правую часть в первом уравнении (1.8), в силу единственности решения которого $d_P = 0$.

Входящая в (2.1) скорость производства тепла неупругими деформациями и структурными изменениями в материале определяется выражением (1.19). Поскольку упругие свойства материала не зависят от предварительной пластической деформации, тензор напряжений T и функционал W_1 не зависят от μ . Более того, с достаточной степенью точности можно считать, что в случае процесса с малыми изменениями температуры упругие свойства материала не зависят и от нее. Поэтому T , W_1 также не зависят от Θ . Для про-

песов, в которых структурной температурной рекристаллизации не происходит, $\mu_{\Theta} = 0$. В результате соотношение (1.19) принимает вид

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\Theta)T \cdot \cdot D_P - J^{-1}\rho_0\Psi_{,\mu\mu,\Lambda_P}\dot{\Lambda}_P,$$

с учетом (2.6) находим

$$T \cdot \cdot D_P = S \cdot \cdot D_P = \frac{2\sigma_i}{3\dot{\Lambda}_P} D_P \cdot \cdot D_P = \sigma_i\dot{\Lambda}_P, \quad (2.12)$$

тогда выражение (2.1) представляется в виде

$$\gamma = (1 - 2\beta\Theta) - J^{-1}\frac{\rho_0}{\sigma_i}\Psi_{,\mu\mu,\Lambda_P}. \quad (2.13)$$

Будем полагать, что при малых значениях Λ_P $\mu(\Lambda_P)$ меняется незначительно, затем скорость этого изменения существенно увеличивается и, наконец, кривая выходит на насыщение. Такое поведение зависимости $\mu(\Lambda_P)$ аппроксимировалось функцией

$$\mu = \begin{cases} B(\exp(d\Lambda_P) - 1), & \Lambda_P \leq \Lambda_{P0}, \\ A[1 - \exp(-c(\Lambda_P - \Lambda_{P0}))] + B(\exp(d\Lambda_{P0}) - 1), & \Lambda_P \geq \Lambda_{P0}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где A , B , d , c — параметры, определяющие поведение функции μ . Из условий непрерывности этой функции и ее производных в точке Λ_{P0} следует

$$A = \frac{d}{D} \exp(d\Lambda_{P0}), \quad B = \frac{c}{D}, \quad D = (c + d) \exp(d\Lambda_{P0}) - c.$$

Поведение функции μ при $d = 30$, $\Lambda_{P0} = 0,1$ и различных значениях параметра c показано на рис. 3.

В соответствии с ограничениями, налагаемыми в подп. 1.3, функцию Ψ представим в виде

$$\Psi = a\mu + b\mu^2. \quad (2.15)$$

Определим параметры функции Ψ и параметры c , d , Λ_{P0} функции μ , минимизируя величину Φ , которая определяет максимальное отклонение кривой, описываемой соотношением (2.13) с учетом (2.14), (2.15), от экспериментальной кривой (см. рис. 1), в N точках Λ_P (значение N больше числа определяемых параметров). Сначала выберем достаточно широкую область Ω_0 изменения параметров c , d , Λ_{P0} и достаточно большой шаг, с которым

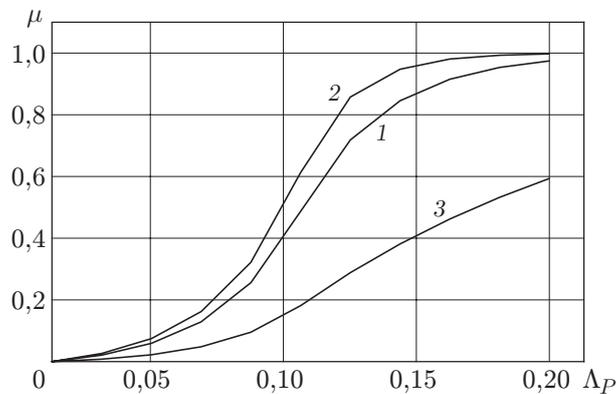


Рис. 3. Зависимость $\mu(\Lambda_P)$ при $d = 30$, $\Lambda_{P0} = 0,1$ и различных значениях параметра c :

1 — $c = 30$, 2 — $c = 50$, 3 — $c = 7$

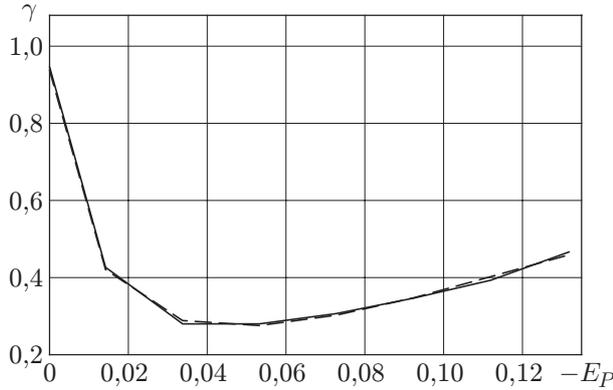


Рис. 4

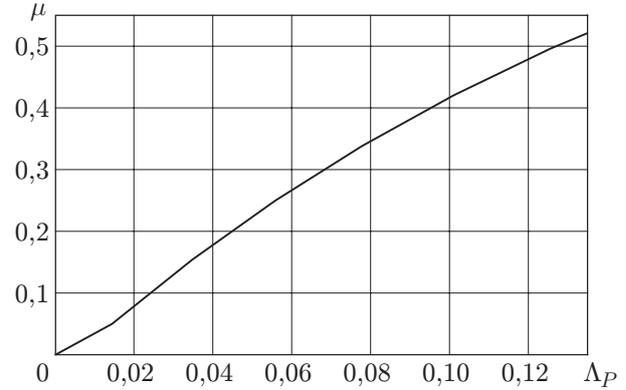


Рис. 5

Рис. 4. Аппроксимация функции γ для алюминиевого сплава 2024-T351 (D16T): сплошная линия — экспериментальная кривая, показанная на рис. 1, штриховая — аппроксимация этой кривой выражением (2.13)

Рис. 5. Зависимость меры структурных изменений μ от меры пластических деформаций Λ_P для алюминиевого сплава 2024-T351 (D16T)

каждый параметр пробегает эту область. Для каждой точки M области Ω_0 с координатами c, d, Λ_{P0} , $M = M(c, d, \Lambda_P)$ с использованием метода наименьших квадратов определим параметры a, b функции Ψ . Сканируя с заданным шагом l по каждой координате всю область Ω_0 , определяем точку M_* , в которой величина $\Phi = \Phi_*$ достигает минимального значения на сетке сканирования. Затем область сканирования Ω_0 переопределяется: точка M_* становится ее центром, а областью изменения параметров c, d, Λ_{P0} является интервал $(-l, l)$ по каждой координате. Шаг сканирования уменьшается, и процедура повторяется. Процесс заканчивается, когда точность определения координат-параметров, соответствующих минимуму функционала Φ , достигает заданного значения.

На рис. 4 приведены результаты аппроксимации зависимости $\gamma(-E_P)$. Видно, что максимальное поточечное абсолютное отклонение теоретической кривой от экспериментальной не превышает 0,7 %. В (2.15) параметры функции Ψ имеют значения $a = 15,067 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $b = 29,6997 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Безразмерные параметры функции μ в (2.14) равны $c = 5,7$, $d = 59,5$, $\Lambda_{P0} = 0,015$ (рис. 5). Будем полагать, что для материалов, свойства которых зависят от скорости деформации, эти параметры являются функциями скорости деформации.

Отметим, что при таком описании процесса адиабатического деформирования выполняется термодинамическое неравенство (1.12). Действительно, с учетом того, что упругие свойства материала не зависят от пластических деформаций, неравенство (1.12) записывается в виде

$$T \cdot \cdot D_P - J^{-1} \rho_0 \Psi_{,\mu} \mu_{,\Lambda_P} \dot{\Lambda}_P - q \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0,$$

а с учетом (2.12) представляется следующим образом:

$$\left(\sigma_i - J^{-1} \rho_0 \Psi_{,\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P} \right) \dot{\Lambda}_P - q \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0. \tag{2.16}$$

Из выражения (2.13) получаем

$$\gamma \sigma_i + 2\beta \Theta \sigma_i = \sigma_i - J^{-1} \rho_0 \Psi_{,\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P}.$$

Так как левая часть этого выражения является положительной величиной, правая часть также положительная величина. В силу положительности $\dot{\Lambda}_P$ первое слагаемое в (2.16) также положительно. Это свидетельствует о выполнении неравенства (2.16), так как в рассматриваемом процессе отсутствует мощность, которая могла бы направить тепловой поток по градиенту температуры (из менее нагретой области в более нагретую), поэтому $\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \leq 0$.

3. Изменение температуры в процессе адиабатического сжатия. С использованием значений параметров, полученных для функций μ , Ψ , рассмотрим изменение температуры для случая адиабатического сжатия образца. Для того чтобы решить эту связанную термоупругопластическую задачу, используем систему вариационных уравнений [7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_0} P_{II} \cdot \delta C dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{S_0} J_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 = 0, \\ \int_{V_0} J[\lambda \nabla \Theta \cdot C^{-1} \cdot \delta(\nabla \Theta) + (A\dot{\Theta} + B\Theta + C) \delta\Theta] dV_0 - \\ - \int_{V_0} \rho_0 \Omega \delta\Theta dV_0 + \int_{S_0} J_S q_n \delta\Theta dS_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь V_0 , S_0 — объем и полная площадь поверхности тела в начальной конфигурации; \mathbf{f} , \mathbf{p} — массовые и поверхностные силы; \mathbf{u} — вектор полных перемещений; δ — знак вариации; J_S — якобиан, определяющий отношение площадей элементарных поверхностей в текущей и начальной конфигурациях.

Будем полагать, что в уравнениях (3.1) отсутствуют массовые силы, внешние и внутренние источники тепла и поле температуры в образце является однородным. Нагружение образца происходит в результате последовательных приращений сжимающей силы, соответствующей истинным напряжениям [10]. Поскольку в рассматриваемом процессе температура меняется незначительно, полагаем, что упругие параметры материала не зависят от температуры (выше обоснована независимость этих параметров от пластических деформаций). Поэтому используем определяющее уравнение (2.9) (вместо общей формы (1.10)), в котором выражение $L_*^{IV} \cdot \cdot (\cdot)$ определяется соотношениями (2.10), (2.11) и член $L_*^{IV} \cdot \cdot (e - e_P)$ заменяется на член $L_*^{IV} \cdot \cdot (e - e_P - e_\Theta)$. Пластические деформации e_P определяются по ассоциированному закону пластического течения с поверхностью текучести Мизеса (2.6), а для температурных деформаций используется закон линейного температурного расширения $e_\Theta = \beta \theta g$. Тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа второго рода P_{II} определяется из соотношения $P_{II} = JF^{-1} \cdot T \cdot F^{-T}$. С учетом уравнений теплопроводности (1.16)–(1.19) и допущений, сформулированных в п. 2, выражения для функций A , B , C в (3.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} A = J^{-1} \rho_0 c_T + 2\beta^2 \Theta I_1(T), \quad B = (2\beta T + \beta g \cdot \cdot L^{IV}) \cdot \cdot D_E, \\ C = -(1 - 2\beta \Theta) T \cdot \cdot D_{IN} + J^{-1} \rho_0 \Psi_{,\mu} \mu_{,\Lambda P} \dot{\Lambda}_P. \end{aligned}$$

До тех пор пока значение ненулевой составляющей тензора напряжений не превышает предела текучести, решается только термоупругая задача. В результате на каждом шаге нагружения строится и решается система трех линейных уравнений для трех неизвестных величин: приращений температуры и осевых и поперечных составляющих вектора перемещений. На рис. 6 приведена расчетная зависимость приращения температуры от полной осевой деформации E в процессе адиабатического сжатия.

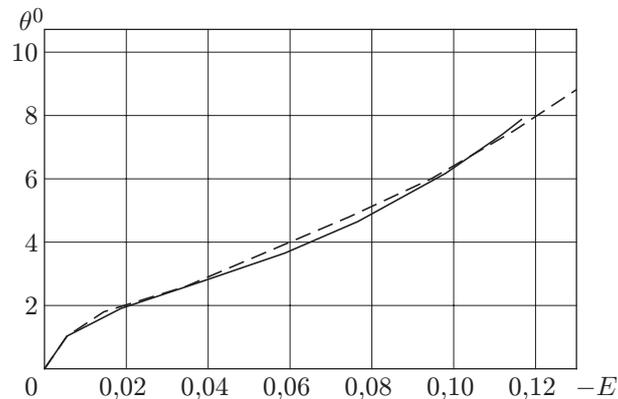


Рис. 6. Зависимость приращения температуры от полной осевой деформации в процессе адиабатического сжатия алюминиевого сплава 2024-T351 (D16T): сплошная линия — расчет, выполненный в настоящей работе, штриховая — данные экспериментов [9, 10]

Дальнейшие исследования должны быть направлены на установление связей между неупругой энергией, затраченной на изменение структуры материала, и параметрами в соотношениях, описывающих пластический процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новокшанов Р. С., Роговой А. А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
3. Роговой А. А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 144–153.
4. Роговой А. А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 165–172.
5. Роговой А. А. Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. [Электрон. ресурс]. 2008. Т. 7. Режим доступа: www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf.
6. Rogovoy A. A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mech. Thermodynamics. 2012. V. 24. P. 81–114. DOI: 10.1007/s00161-011-0220-y.
7. Роговой А. А., Столбова О. С. Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3. С. 184–196.
8. Роговой А. А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Динамика и прочность машин. 2001. № 2. С. 83–90.
9. Rosakis P., Rosakis A. J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. P. 581–607.
10. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A. J., Rosakis P. Partition plastic work into heat and stored energy in metals // Exp. Mech. 2000. V. 40. P. 113–123.
11. Жуков А. М. Некоторые особенности кривой нейтрального нагружения // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 8. С. 32–40.

12. **Жуков А. М.** Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение // Инж. сб. Ин-та механики АН СССР. 1960. Т. 30, вып. 3. С. 3–16.
13. **Жуков А. М.** Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке // Инж. журн. 1961. Т. 1, вып. 1. С. 124–133.
14. **Жуков А. М.** Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом нагружении // Вопр. теории пластичности. М.: АН СССР, 1961. С. 30–57.
15. **Ленский В. С.** Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций // Вопр. теории пластичности. М.: АН СССР, 1961. С. 58–82.
16. **Шишмарев О. А., Кузьмин Е. Я.** О зависимости упругих постоянных металла от пластических деформаций // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С. 167–169.
17. **Созонов Ю. А.** Об изменении модулей упругости меди и никеля в процессе пластической деформации // Тр. Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина. 1967. № 278. С. 35–37.
18. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 18/VIII 2014 г.
