УДК 539.422

ТОЧНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЫВЕ ПРОНИЦАЕМОГО ПЛАСТА

Ю. Н. Гордеев, Д. О. Бабаева, Е. Б. Сандаков

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва
E-mail: yuGordeyev@yandex.ru

В рамках модели трещины Перкинса — Керна построено точное решение задачи о распространении гидроразрыва в проницаемой среде при постоянном режиме закачивания жидкости в частично вскрываемый пласт. С использованием поля давления фильтрующейся жидкости, определяемой уравнением Щелкачева (типа пьезопроводности), находится объем утечки этой жидкости из трещины. Получены универсальные профили распределения давления жидкости в трещине и скорости вытекания жидкости из нее. Показано, что в вершине трещины Перкинса — Керна имеет место резкое увеличение объема утечек из трещины.

Ключевые слова: трещина Перкинса — Керна, точное решение, фильтрация жидкости разрыва в пласте.

Рассматривается распространение вертикальной трещины гидроразрыва, имеющей постоянную высоту, под действием закачиваемой в нее при постоянном давлении вязкой жидкости. Трещина (модель, промежуточная между двумерной и псевдотрехмерной моделями [1]) частично вскрывает кровлю и подошву [2]. Использовалась модель Перкинса — Керна, в которой вертикальные сечения не взаимодействуют друг с другом и в каждом вертикальном сечении трещина описывается моделью Христиановича с условием плавного смыкания ее берегов. В работе [2] с использованием метода итераций решалась задача в аналогичной постановке, когда вязкость жидкости разрыва существенно отличалась от вязкости пластовой жидкости.

В настоящей работе в предположении о квазистационарности движения жидкости в трещине, равенстве вязкостей пластовой жидкости и жидкости в трещине и локально-одномерном характере фильтрационных утечек построено точное решение задачи, соответствующей режиму нагнетания при постоянном давлении. Полученное решение (распределение давления в трещине) представлено в виде одной универсальной безразмерной функции, не зависящей от параметров.

1. Постановка задачи. Для расчета процессов разрыва пласта использовалась модель Перкинса — Керна [3, 4].

Пусть при гидравлическом разрыве пласта толщиной $2h$ образуется вертикальная трещина, имеющая постоянную высоту $2H$ и длину $2l \gg 2H > 2h$ и симметричная относительно скважины (рис. 1). Тогда в каждый момент времени в любом вертикальном сечении трещины $x = \mathrm{const}$ давление в ней можно считать постоянным: $p = p_c(x, t)$. В силу большой протяженности трещины примем гипотезу плоских сечений, в соответствии с которой в каждом сечении $x = \mathrm{const}$ раскрытие трещины $2w$ определяется решением плоской

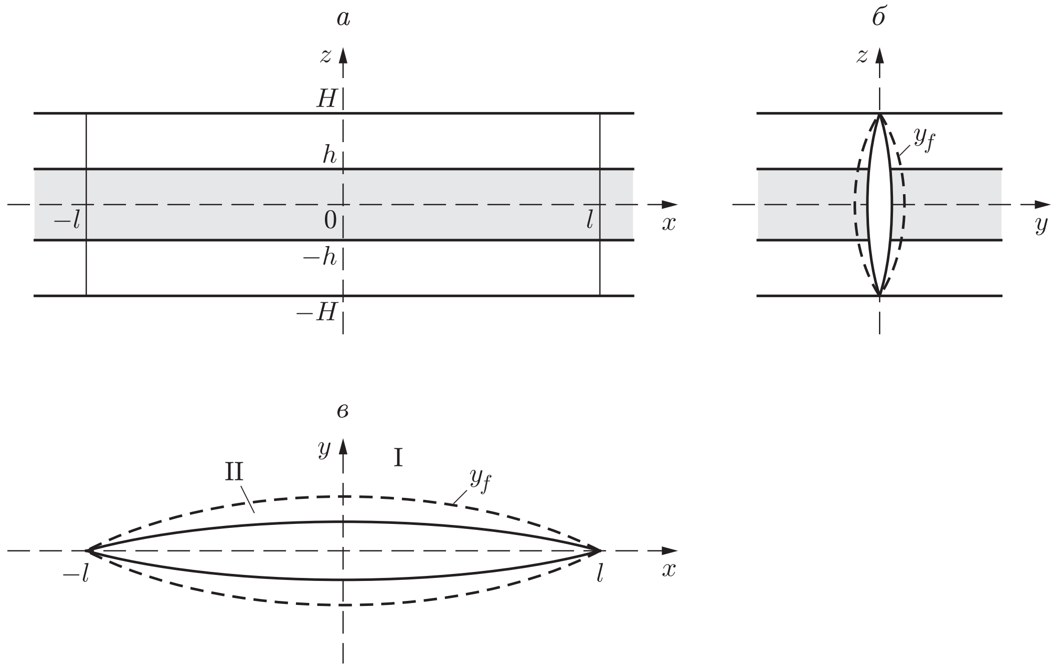

Рис. 1. Схема вертикальной трещины гидроразрыва Перкинса — Керна:
а — положение трещины в плоскости (x, z), *б* — форма трещины в плоскости (y, z),
в — форма трещины в плоскости (x, y)

задачи теории упругости и пропорционально разности между локальным значением давления в трещине $p_c(x,t)$ и боковым горным давлением $\sigma = \text{const}$. При этом на концах трещины $x = \pm l(t)$ смыкание поверхностей определяется условием $p_c = \sigma$, аналогичным условию Христиановича [5]. Движение пластовой жидкости будем считать плоским, подчиняющимся уравнениям упругого режима фильтрации [6].

В рамках сделанных предположений процесс гидравлического разрыва пласта описывается системой уравнений [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle wu\rangle = -\langle 2hv_L\rangle, \qquad u = -\frac{w^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v_L = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1.1}$$

где

$$\langle f\rangle = \frac{1}{H}\int\limits_{-H}^{H} f(z)\,dz;$$

$$w(x,z,t) = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\sqrt{H^2 - z^2}\,[p_c(x,t) - \sigma], \qquad |x| \leqslant l(t), \quad |z| \leqslant H; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\Big(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\Big), \qquad |x| \leqslant l(t), \quad |y| \geqslant 0, \tag{1.3}$$

u — скорость движения жидкости в трещине; v_L — скорость фильтрации жидкости через боковые поверхности трещины в пласт; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пласта и окружающих пород; $p(x,y,t)$ — давление в пласте, $p_c(x,t)$ — давление в трещине; $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности.

Уравнения (1.1) представляют собой уравнение неразрывности потока в трещине, формулу Буссинеска для движения вязкой жидкости в узкой щели, закон фильтрации Дарси;

уравнение (1.2) является решением плоской задачи теории упругости о трещине при однородном нагружении ее поверхностей; (1.3) — уравнение непрерывности для течения пластовой жидкости [6].

Для замыкания системы (1.1)–(1.3) используем условие плавного смыкания поверхностей трещины

$$p_c(\pm l(t), t) = \sigma \tag{1.4}$$

и условия непрерывности давлений и потоков на поверхностях трещины

$$p_c(x,t) = p(x,0,t), \qquad v_L(x,t) = v(x,0,t)$$

($v(x,y)$ — нормальная к плоскости трещины компонента скорости фильтрующейся жидкости). Кроме того, зададим начальные условия: пластовое давление p^0, начальный размер трещины l_0, а также режим нагнетания жидкости в трещину:

$$p(x,y,0) = p^0, \qquad l(0) = l_0, \qquad p(0,t) = p_0, \tag{1.5}$$

где $p_0 > \sigma$ — давление нагнетания жидкости разрыва.

Далее будем использовать естественные упрощения задачи, перенося условия на поверхностях трещины в плоскость $y = 0$.

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем уравнение для распределения давления в трещине

$$\begin{gathered} a\,\frac{\partial}{\partial t}\,(p_c - \sigma) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(p-\sigma)^4 + bv_L = 0, \\ |x| \leqslant l(t), \qquad a = \frac{\mu E^2}{4(1-\nu^2)^2 H^2}, \qquad b = \frac{h\mu E^3}{2\pi(1-\nu^2)^3 H^4}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

содержащее неизвестную скорость фильтрационных утечек $v_L(x,t)$.

Таким образом, для определения неизвестных функций $p(x,t)$, $v_L(x,t)$ имеем уравнения (1.6), (1.1); входящая в них функция $p(x,y,t)$ должна удовлетворять уравнению пьезопроводности (1.3), а для отыскания размера трещины $l(t)$ используем условие (1.4). Вместе с условиями (1.5) выражения (1.6), (1.1), (1.4) образуют полную систему уравнений для решения поставленной задачи.

2. Переход к безразмерным переменным. Перейдем к новым переменным по формулам

$$\begin{gathered} \tau = \frac{t}{t_0}, \qquad X = \frac{x}{l(t)}, \qquad L(\tau) = \frac{l(t)}{l_0}, \qquad Y = \frac{y}{y_0 L^2}, \\ P_c(X,\tau) = \frac{p_c}{\sigma}, \qquad P(X,Y,\tau) = \frac{p}{\sigma}, \qquad V_L = -\frac{\partial P}{\partial Y}, \\ P_0 = \frac{p_0}{\sigma}, \qquad P^0 = \frac{p^0}{\sigma}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где t_0, y_0 — масштабные коэффициенты; $L(\tau)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

После ряда преобразований система уравнений рассматриваемой задачи в переменных (2.1) принимает вид

$$\begin{gathered} -\varepsilon L^2\Big(\frac{\partial}{\tau} - \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,X\frac{\partial}{\partial X}\Big)(P_c - 1) + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\,(P_c-1)^4 = V_L, \\ V_L = -\frac{\partial}{\partial Y}\,P, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$L^4\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,X\,\frac{\partial}{\partial X} - 2\,\frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,Y\,\frac{\partial}{\partial Y}\Big)P = \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\,P + \Big[\frac{y_0}{l_0}\,L\Big]^2\,\frac{\partial^2}{\partial X^2}\,P,$$

где

$$y_0 = \frac{8}{\pi}\Big[\frac{E}{(1-\nu^2)\sigma}\Big]^3\frac{kl_0^2h}{H^4}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{\varkappa}, \quad \varepsilon = \frac{4\mu\varkappa}{\sigma}\Big[\frac{E}{(1-\nu^2)H\sigma}\Big]^2,$$

условие плавного смыкания поверхностей трещины (1.4) записывается в виде

$$P_c(1,\tau) = 1, \tag{2.3}$$

а из условий (1.5) получаем

$$P(X,Y,0) = P^0, \qquad L(0) = 1, \qquad P_c(0,\tau) = P_0. \tag{2.4}$$

3. Квазистационарный режим распространения трещины. Из системы (2.2), содержащей малый параметр $(y_0/l_0)^2$, характеризующий отношение толщины зоны проникновения в пласт жидкости разрыва к размеру трещины, получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon L^2\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,X\,\frac{\partial}{\partial X}\Big)(P_c-1) + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\,(P_c-1)^4 = V_L, \qquad V_L = -\frac{\partial}{\partial Y}\,P_c,\\ L^4\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,X\,\frac{\partial}{\partial X} - 2\,\frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt}\,Y\,\frac{\partial}{\partial Y}\Big)P = \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\,P.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Найдем стационарные решения $P(X)$, $V_L(X)$, $P(X,Y)$ системы (3.1).

В предположении, что $L(\tau)$ является решением уравнения $L^3\,dL/d\tau = \alpha = \text{const}$ или $L(\tau) = (1+4\alpha\tau)^{1/4}$ с учетом $L(0) = 1$, все уравнения (3.1), кроме первого, при $\partial\,(\cdot)/\partial t = 0$ не зависят от времени. При этом первое уравнение принимает вид

$$\frac{\varepsilon\alpha}{L^2}\,X\,\frac{\partial}{\partial X}\,(P_c-1) + \frac{\partial^2}{\partial X^2}\,(P_c-1)^4 = V_L. \tag{3.2}$$

Зависимость от времени в уравнении (3.2) сохраняется вследствие наличия коэффициента $\varepsilon\alpha/L^2$ перед первым членом, который учитывает изменение объема трещины при изменении в ней давления. В случаях, когда фильтрационные утечки V_L велики, вклад первого члена уравнения (3.2) в перераспределение потока жидкости в трещине становится малым ($\varepsilon\alpha \ll 1$) и им можно пренебречь. Параметр α и функции $P(X)$, $V_L(X)$, $P(X,Y)$ определим из системы уравнений

$$\frac{d^2}{dX^2}\,(P_c-1)^4 = V_L, \qquad V_L = -\frac{\partial}{\partial Y}\,P_c(X,0); \tag{3.3}$$

$$-\alpha\Big(X\,\frac{\partial}{\partial X} + 2Y\,\frac{\partial}{\partial Y}\Big)P = \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\,P, \qquad P(X,Y) = P^0(X^2+Y^2 \to \infty). \tag{3.4}$$

Поскольку в приближении (3.3), (3.4) изменением объема трещины можно пренебречь, количество втекающей в трещину жидкости равно количеству вытекающей из нее за счет утечек.

В соответствии с (2.3), (2.4) функции $P(X)$, $P(X,Y)$ должны удовлетворять условиям

$$P_c(1) = 1, \qquad P(0) = P_0 \tag{3.5}$$

и условию невозмущенности на бесконечности. Однако постановка последнего в данном случае оказывается нетривиальной. Действительно, после понижения порядка уравнения пьезопроводности по переменной X, означающего переход к схеме локально-одномерных утечек, и с учетом симметрии задачи относительно оси $X = 0$ его решение должно отыскиваться в области $0 \leqslant X \leqslant 1$, $Y \in [-\infty, \infty]$. При этом на границах области задаются граничные условия, причем возмущения не должны опережать вершину трещины:

$$(X,Y) = P^0 \quad (0 \leqslant X < 1,\ Y \to \infty), \qquad \frac{\partial P(X=0,Y)}{\partial X} = 0, \qquad P(1+0,Y) = P^0. \quad (3.6)$$

Невозмущенность потока на границах полосы $|X| = 1$ имеет простой физический смысл: в силу одномерного характера утечек возмущения потока перед концами трещины ($|X| > 1$) отсутствуют. Следовательно, они отсутствуют и на границах возмущенной и невозмущенной областей — прямых $|X| = 1$. Таким образом обеспечивается непрерывность решения задачи.

4. Автомодельное решение. Для решения автомодельной задачи (3.3)–(3.6) в первую очередь необходимо найти метод решения. Рассмотрим уравнение (3.5). Целесообразно перейти к новым координатам

$$\xi = X^2, \qquad \eta = \sqrt{\alpha}\, Y, \qquad \Phi = P - P^0.$$

Тогда функция $\Phi(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Big(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta}\Big)\Phi = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\Phi. \quad (4.1)$$

Стандартный подход к решению уравнения (4.1) предполагает использование метода разделения переменных.

Подставляя в (4.1) равенство

$$\Phi(\xi,\eta) = R(\xi)F(\eta),$$

получаем

$$\xi \frac{d}{d\xi} R = \lambda R, \qquad \frac{d^2}{d\eta^2} F + \eta \frac{d}{d\eta} F = -\lambda F. \quad (4.2)$$

Решения уравнений (4.2) имеют вид:

— при $\lambda = 0$

$$R_0(\xi) = c_0 = \text{const}, \qquad F_0(\eta) = \operatorname{erfc}\,(|\eta|/\sqrt{2}\,); \quad (4.3)$$

— при $\lambda = n+1$, $n \geqslant 0$

$$R_{n+1} = \xi^{(n+1)}, \qquad F_{n+1} = \exp\,(-\eta^2/2) H_n(\eta/\sqrt{2}\,), \quad (4.4)$$

где $H_n(\eta)$ — многочлены Эрмита, ортогональные на прямой $-\infty < \eta < \infty$ с весом $\exp\,(-\eta^2)$ [8].

Система функций $F_{n+1}(\eta)$, $n \geqslant 0$ является полной на прямой $-\infty < \eta < \infty$. Однако на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ связанная с ней система функций $R_{n+1} = \xi^{4(n+1)}$ не является полной, так как не содержит постоянной. Это не позволяет ограничиться разложением решения по произведениям функций (4.4) $R_{n+1}F_{n+1}$ и требует использования решения (4.3) R_0F_0. В результате общее решение уравнения (4.1) получаем в виде

$$\Phi(\xi,\eta) = c_0 \operatorname{erfc}\Big(\frac{|\eta|}{\sqrt{2}}\Big) + \exp\Big(-\frac{\eta^2}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\xi^{n+1} H_n\Big(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\Big). \quad (4.5)$$

Так как распределение давления в пласте симметрично, а распределение фильтрационного поля скоростей антисимметрично относительно оси $y = 0$, то в разложение (4.5) входят как четные, так и нечетные полиномы Эрмита, причем четные коэффициенты связаны с полем давления в среде, а нечетные — с полем скорости фильтрующейся жидкости. Связь этих групп коэффициентов осуществляется с помощью нелинейного уравнения на берегах трещины.

При граничных условиях

$$\frac{\partial \Phi(0,\eta)}{\partial X} = 0, \qquad \Phi(1+0,\eta) = 0 \tag{4.6}$$

и условии на трещине

$$\Phi(\xi, 0) = P_c(\xi) - P^0$$

решение (4.5) можно использовать для решения общей задачи, например методом итераций по нелинейному граничному условию.

Из (4.5) следует, что первое условие (4.6) выполняется, поскольку $2\xi\,\partial\Phi(0,\eta)/\partial\xi = 0$. Зная распределение на трещине $P_c(\xi)$, из выражения $H_{2n+1}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ находим

$$P_c = P^0 + c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \, \frac{(2n)!}{n!} \, \xi^{2n+1}. \tag{4.7}$$

При $\xi = 0$ получаем $c_0 = P_0 - P^0$, $dP_c(X = 0)/dX = 0$.

Коэффициенты c_{2n+1} вычислим путем разложения функции P_c на отрезке $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ по полной на этом отрезке системе функций ξ^{2n+1}. Так как при $\xi = 1 \quad P - 1 = 0$, имеем

$$c_0 = 1 - P^0 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \, \frac{(2n)!}{n!}.$$

Если коэффициенты c_{2n+1} найдены, то с использованием второго условия (4.7) можно определить коэффициенты c_{2n} при четных степенях ξ. При $\xi = 1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n+1}\Big(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\Big) = G(\eta); \tag{4.8}$$

$$G(\eta) = -c_0 \exp\Big(\frac{\eta^2}{2}\Big) \operatorname{erfc}\Big(\frac{|\eta|}{\sqrt{2}}\Big) - \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} H_{2n}\Big(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\Big).$$

В соответствии с теоремой [9] (случай $P_0 \neq P^0$ рассматривается отдельно) коэффициенты c_{2n} можно найти из выражения (4.8) с использованием свойства ортогональности этих полиномов. Получаем

$$\begin{gathered} c_{2n} = -\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}\,(2n)!2^{2n-1}} \int\limits_0^{\infty} \operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\Big) H_{2n+1}\Big(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\Big)\, d\eta = -\frac{c_0(-1)^n}{\pi n! 2^{2n-1}}\, \varphi(n), \\ \varphi(n) = {}_3F_2\Big(-2n, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1\Big) = {}_2F_1\Big(-2n, 1, \frac{3}{2}; 1\Big) = \frac{(1/2)_{2n}}{(3/2)_{2n}} = \frac{1}{1+4n}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Подставляя (4.5) во второе уравнение (3.3) и используя (4.9), находим

$$V_L(\xi) = \beta\omega(\xi) = \beta\bar{\omega}(X); \tag{4.10}$$

$$\omega(\xi) = \bar{\omega}(X) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{(2(n+1))!!(5+4n)}\, X^{4(n+1)};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\,\Big(P^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{(2n)!}{n!}\, c_{2n+1}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\,(P_0 - P^0). \tag{4.11}$$

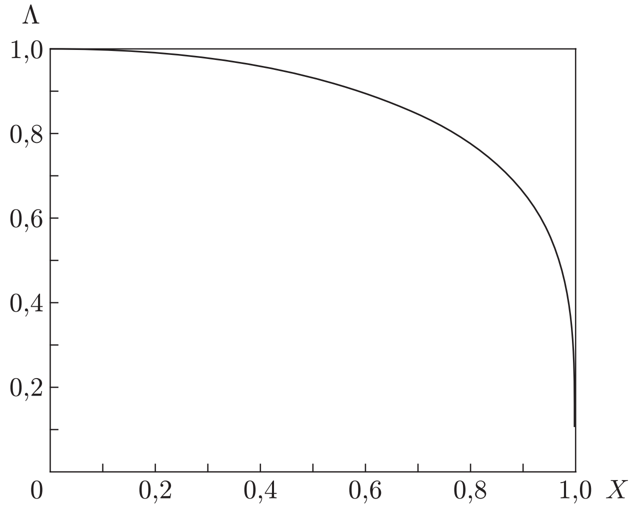

Рис. 2. Распределение давления в трещине при $\beta = 1{,}0106$

Подставляя c_0 в (4.7), получаем

$$P_c(\xi) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_{2n+1}\,\frac{(2n)!}{n!}\,(1-\xi^{2n+1}). \tag{4.12}$$

Непосредственно из уравнений (3.3), (4.12), условий (3.5) и второго условия (3.6) находим распределение давления жидкости в трещине

$$P_c(\xi) = 1 + (P^0 - 1)\Bigl[\Bigl((1-X)\int\limits_0^X \bar\omega(\xi)\,d\xi + \int\limits_X^1 \bar\omega(\xi)(1-\xi)\,d\xi\Bigr) \Big/ \Big/ \int\limits_0^1 \bar\omega(\xi)(1-\xi)\,d\xi\,\Bigr]^{1/4}; \tag{4.13}$$

$$\beta = (P_0 - 1)^4 \Big/ \int\limits_0^1 \bar\omega(\xi)(1-\xi)\,d\xi. \tag{4.14}$$

Проинтегрировав (4.13), получаем

$$\frac{P_c(\xi)-1}{P_0-1} = \Lambda(X) = \Bigl[1 - \rho X^2\Bigl(1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{4(n+1)}\Bigr)\Bigr]^{1/4},$$

$$a_n = \frac{2(2n+3)!!}{(2(n+1))!!(4n+5)^2(4n+6)}, \qquad \rho^{-1} = 1 + \sum_{n-0}^{\infty} a_n.$$

5. Обсуждение результатов. Универсальная функция $\Lambda(X)$ приведена на рис. 2. Видно, что в квазистационарном приближении распределение давления в трещине близко к распределению давления в идеальной трещине, т. е. является постоянным всюду, за исключением вершины трещины. Неизвестную константу α, которая характеризует характерную величину проникновения жидкости из разрыва в пласт, входящую в выражение (4.11), найдем из условия (4.14) и условия (4.10), которые в новых переменных имеют вид

$$\alpha = 2(P_0 - P^0)^2/(\pi\beta^2).$$

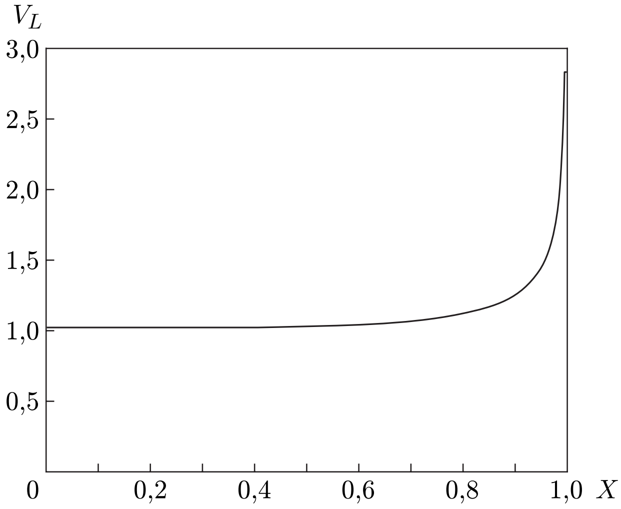

Рис. 3. Распределение скорости фильтрации жидкости из трещины при $\beta = 1{,}0106$

Скорость фильтрации жидкости из трещины задается выражением

$$V_L(X^2) = \beta\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{(2(n+1))!!(5+4n)}\, X^{4(n+1)}\Big)$$

и показана на рис. 3. Видно, что в квазистационарном приближении как в модели Перкинса — Керна, так и в модели Христиановича скорость фильтрации стремится к бесконечности, т. е. решения расходятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cleary M. P., Settari A.** Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry // SPE Product. Engng. 1986. V. 1. P. 449–466.
2. **Гордеев Ю. Н., Зазовский А. Ф.** Автомодельное решение задачи о глубокопроникающем гидравлическом разрыве пласта // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 119–131.
3. **Kern L. R., Perkins T. K.** Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. P. 937–949.
4. **Nordgren R. P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Engng J. 1972. V. 12. P. 306–314.
5. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
6. **Щелкачев В. Н.** Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52, № 2. С. 103–106.
7. **Снедон И.** Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
8. **Абрамовиц М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
9. **Суетин П. К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2005.

Поступила в редакцию 1/XI 2012 г.,
в окончательном варианте — 11/III 2013 г.