

ОБ ОБЩЕМ КРИТЕРИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

Р. С. Кузнецкий, М. К. Лихт

(Харьков)

Возникновение турбулентности связано с возмущениями конечной интенсивности [1]. Можно указать отдельные попытки теоретических построений в этой области, например, [2]. Экспериментально установлена неоднородность ламинарного течения жидкости по сечению трубы в отношении степени его локальной устойчивости¹ [3,4,1]. Этот факт служит исходным для объяснения ряда особенностей перехода к турбулентному течению и в их числе характерной особенностью зависимости коэффициента сопротивления шероховатых труб от числа Рейнольдса при промежуточном режиме [5].

Вводимая в качестве меры устойчивости величина (1.1) и критерий q_* позволяют получить при этом количественно удовлетворительные результаты.

1. Будем характеризовать степень локальной устойчивости стационарного ламинарного течения жидкости в цилиндрической (в широком смысле) трубе симплексом

$$\frac{\rho v |\nabla_{xy} v|}{|dp/dz|} = \frac{1}{2} q(x, y) \quad (1.1)$$

аналогичным вводимому для плоскопараллельных течений местному числу Рейнольдса [2], пропорциональному поперечному градиенту скорости и обратно пропорциональному вязкости. Здесь v , p , ρ — скорость, давление и плотность жидкости; x , y — декартовы координаты в поперечном сечении F трубы; z — координата вдоль ее оси. Симплекс (1.1) представляет собой отношение изменений энергии элемента жидкости при малых смещениях в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Независимо от степени устойчивости ламинарного течения в целом в F всегда существует область произвольной малости q . Поэтому наступления неустойчивости следует ожидать при достаточно больших значениях q . В соответствии с этим предположим существование такого числа q_* , что $q \leq q_*$ во всем F есть условие устойчивости течения, а наличие в F областей с $q > q_*$ — условие неустойчивости, т. е. возможности турбулентного режима.

Приведем (1.1) к критериальному виду. Для Пуазейлева течения

$$\Delta_{xy} v = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0, \quad v|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

где $\mu = \rho \nu$ — динамическая вязкость и Γ — контур сечения F . Введя безразмерные скорость и координаты (s — гидравлический радиус трубы)

$$u = \frac{\mu}{|dp/dz| s^2} v, \quad \xi = \frac{x}{s}, \quad \eta = \frac{y}{s} \quad (1.3)$$

¹ Под локальной устойчивостью (неустойчивостью) будем понимать отрицательную (положительную) реакцию течения в данной малой области на вводимые возмущения.

(аналогично для радиус-вектора $\xi = r/s$ в полярной системе координат и для любой линейной координаты в произвольной системе), будем иметь

$$\Delta_{\xi\eta} u = -i, \quad u|_{\Gamma_{\xi\eta}} = 0 \quad (1.4)$$

Выразив q через безразмерные переменные и $R = 2s\langle v \rangle / \nu$, где угловые скобки означают усреднение по F , преобразуем (1.1) к виду

$$q = R \frac{u | \nabla_{\xi\eta} u |}{\langle u \rangle} \quad (1.5)$$

Симплекс q пропорционален числу Рейнольдса и равен нулю на контуре Γ и в точках (или на линиях) экстремумов и стационарности скорости. Следовательно, точка (линия) максимальной неустойчивости, в которой достигается $\sup \{u | \nabla_{\xi\eta} u|\}$, всегда находится вне их окрестности.

Потеря ламинарным течением устойчивости и возможность его турбулизации наступают при $\sup\{q\} = q_*$, откуда следует критическое число Рейнольдса

$$R_* = q_* f, \quad f \equiv \frac{\langle u \rangle}{\sup_{F_{\xi\eta}} \{u | \nabla_{\xi\eta} u|\}} \quad (1.6)$$

равное произведению q_* на определенный функционал $f\{\Gamma\}$ от формы сечения (т. е. от F или Γ , с точностью до подобия).

В реальных условиях турбулизация течения наступает при числах Рейнольдса, больших R_* (затянутый ламинарный режим), поскольку в жидкости имеются не все виды возмущений.

2. Оценим влияние формы сечения F на R_* и определим значение q_* , сопоставив соответственные отношения R_* и f для ряда сечений:

а) для трубы кругового сечения ($0 \leq \zeta \leq 1$) имеем

$$u = 1/4 (1 - \zeta^2), \quad q = R \zeta (1 - \zeta^2), \quad f^0 = 3/2 \sqrt{3} \quad (2.1)$$

Экспериментально получено $R_*^0 \approx 2100$ [6,7].

б) для плоского канала ($|\eta| \leq 1/2$)

$$u = 1/8 (1 - 4\eta^2), \quad q = 3/2 R \eta (1 - 4\eta^2), \quad f = 2\sqrt{3} \quad (2.2)$$

Для труб прямоугольного сечения с большим отношением сторон (104 : 1 и 165 : 1) экспериментально получено $R_* \approx 2800$ [6-8].

Для труб и каналов с сечением более сложной формы, чем круг и бесконечная полоса, соответствующий расчет приходится выполнять численными методами.

в) для трубы квадратного сечения ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$) был произведен на ЭВМ расчет f при помощи метода сеток с шагом сетки, равным $1/64$ стороны квадрата. Было получено значение $f \approx 2.103$.

Экспериментально получено $R_* \approx 2000$ [9,8].

г) для трубы кольцевого сечения

$$k \leq \kappa \leq 1 \quad (k = r_1 / r_2, \kappa = (1 - k)\zeta = r / r_2,$$

где r_1, r_2, r — радиус-векторы стенок и текущий) [5-7]

$$u = \frac{1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2}{4(1 - k)^2}, \quad \langle u \rangle = \frac{1 + k^2 - 2\kappa_0^2}{8(1 - k)^2}, \quad u_{\max} = \frac{1 - \kappa_0^2 \ln e / \kappa_0^2}{4(1 - k)^2} \quad (2.3)$$

Значение $\kappa_0^2 = -(1 - k^2) / \ln k^2$ соответствует максимуму u . Симплекс (1.1) равен

$$q = R \frac{(1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2) |\kappa_0^2 - \kappa^2|}{(1 - k)(1 + k^2 - 2\kappa_0^2)\kappa} \quad (2.4)$$

Отсюда (фиг. 1)

$$f = (1-k)(1+k^2-2\kappa_0^2) \frac{\kappa}{(1-\kappa^2+\kappa_0^2 \ln \kappa^2)(\kappa_0^2-\kappa^2)} =$$

$$= \frac{(1-k)(1+k^2-2\kappa_0^2)}{2} \frac{\kappa_0^2+\kappa^2}{(\kappa_0^2-\kappa^2)^3} \quad (2.5)$$

Здесь κ^2 есть меньший из двух корней $\kappa_i^2(k)$ ($k < \kappa_1 < \kappa_0 < \kappa_2 < 1$) (фиг. 2) уравнения

$$2(\kappa_0^2 - \kappa^2)^2 = (\kappa_0^2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2) \quad (2.6)$$

Из соответствующих экспериментов [10-13] воспользуемся, например, тремя, в которых турбулизация была обнаружена при $R \approx 2000, 2700$ и 2640 соответственно для $k \approx 0.186$ [12], 0.514 и 0.639 [11].

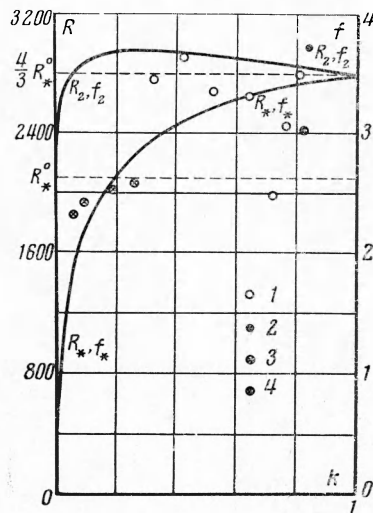
	Труба кругового сечения	Плоский канал	Труба квадратного сечения	Труба кольцевого сечения		
				$k = 0.186$	$k = 0.514$	$k = 0.631$
R_* / R_*^0 , эксперимент	1	$\frac{4}{3}$ [8]	0.95 [9]	0.952 [12]	1.28 [11]	1.26 [11]
f / f^0 , теория	1	$\frac{4}{3}$	0.81	1.00	1.23	1.26

Сопоставление вычисленных значений f / f^0 с экспериментальными значениями R_* / R_*^0 приведено в таблице. Они практически (т. е. в пределах точности экспериментов и связанных с ними вспомогательных расчетов) совпадают. Если учесть также отмеченный факт затягивания ламинарного режима, естественно сделать заключение об универсальности значения q_* для труб произвольных сечений.

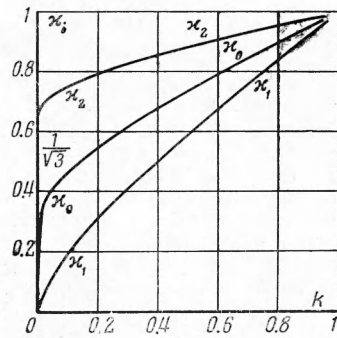
Определим q_* , пользуясь наиболее достоверными результатами многочисленных экспериментов для труб кругового сечения [6,7]

$$q_* = R_*^0 / f^0 \approx 2100 : \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 808.3 \quad (2.7)$$

Точность полученного значения q_* определяется точностью экспериментального измерения R_*^0 .



Фиг. 1



Фиг. 2

Тем самым получаем $R_* = q_* f$ равным 2800 для плоского канала (в полном согласии с результатом эксперимента) и около 1700 для трубы с квадратным сечением (что на 15% меньше экспериментально обнаруженного).

3. Приведем результаты расчетного определения точек (линий) максимальной неустойчивости для труб различных сечений и сопоставления с имеющимися данными.

а) В трубе кругового сечения максимум q , т. е. окружность максимальной неустойчивости, согласно (2.1) характеризуется $\zeta = 1 / \sqrt{3} \approx 0.57735$.

Эксперименты, проведенные при значениях R , близких к R_*^0 , обнаружили наиболее слабое затухание вносимых возмущений в области $0.4 < \xi < 0.6$ [3] и наибольшую устойчивость возникающих пульсаций при $\xi \approx 0.6$ [4] и, таким образом, подтверждают теоретический результат.

Можно ожидать, что область максимальной неустойчивости ламинарного течения отличается при турбулентном режиме максимальной интенсивностью турбулентности λ тем самым максимальной турбулентной вязкостью. Действительно, максимум турбулентной вязкости при $\xi \approx 0.6$ был установлен экспериментально [14].

б) В плоском канале плоскости максимальной неустойчивости согласно (2.2) характеризуются $\eta = \pm 1/2 \sqrt{3}$.

Таким образом, в плоском канале и трубе кругового сечения максимум q достигается при совпадающих значениях относительной ординаты $2|\eta|$ и радиус-вектора ξ . Этот вывод следует также из независимых теоретических соображений [15].

в) В трубе квадратного сечения точки максимальной неустойчивости лежат на осях симметрии квадрата, параллельных его сторонам

$$\xi = 0, \quad \eta \approx \pm 0.625, \quad \xi \approx \pm 0.625, \quad \eta = 0$$

Расположение этих точек легко осмыслить физически при сопоставлении квадрата с вписанным в него кругом (п. а).

г) В трубе кольцевого сечения достигаются два максимума q , больший (основной) из которых характеризуется меньшим κ_1 , а меньший — большим корнем κ_2 уравнения (2.6) (фиг. 2).

Поскольку вероятность турбулизации течения резко увеличивается при появлении второй из зон неустойчивости $\kappa \sim \kappa_1$, $\kappa \sim \kappa_2$, в реальных условиях следует ожидать наступления турбулизации при числе Рейнольдса, удовлетворяющих неравенству $R_* = R_1 < R \lesssim R_2$, где R_i (и $f_i = R_i / q_*$) соответствует κ_i согласно (2.4) при $q = q_*$ (фиг. 1). Вероятность близости R к R_2 возрастает при приближении k к единице (т. е. с уменьшением асимметрии потока).

В предельном случае малой кривизны стенок $1 - k \equiv \alpha \ll 1$ приближаемся к результатам для плоского канала

$$\begin{aligned} \kappa_0 &\approx 1 - 1/2 \alpha - 1/24 \alpha^2, & \kappa_{1,2} &\approx 1 - 1/2 (1 \pm 1 / \sqrt{3}) \alpha + 1/4 (11/27 \pm 1 / \sqrt{3}) \alpha^2 \\ R_{1,2} &\approx 2q_* (\sqrt{3} \mp 1/6 \alpha) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В противоположном предельном случае $k \rightarrow 0$ (круглая труба с тонкой коаксиальной вставкой) R_* неограниченно уменьшается, а окружность наибольшей неустойчивости быстро стягивается к центру

$$\kappa_0 \approx (2 \ln k)^{-1} \rightarrow 0, \quad \kappa_1 \approx ek \rightarrow 0, \quad \kappa_1 / \kappa_0 \rightarrow 0, \quad R_2 \approx 2eq_* k \ln^2 k \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Для второго локального максимума неустойчивости получаем в пределе то же, что и для кругового сечения

$$\begin{aligned} \kappa_2 &\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{6 - \ln 3}{4 \ln k} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ R_2 &\approx R_*^0 \left(1 - \frac{2 - \ln 3}{4 \ln k} - \frac{12 + 7 \ln 3 - 2 \ln^2 3}{8 \ln^2 k} \right) \rightarrow R_*^0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Однако наступление турбулизации при $R \sim R_2 \approx R_*^0$ уже маловероятно.

При увеличении k величины κ_0 , κ_1 и R_* ($0 < R_* < 4/3 R_*^0$) монотонно возрастают, κ_2 убывает; R_2 ($R_*^0 < R_2 \lesssim 2962$) при $k \approx 0.30$ имеет слабый максимум (фиг. 1, 2). В частности, $R_* = R_*^0$ при $k \approx 0.18531$ и $R_2 \approx 4/3 R_*^0$ при $k \approx 0.03323$.

На фиг. 1 представлены также экспериментально обнаруженные значения R , при которых наступала турбулизация. Точки 1, 2, 3, 4, соответствуют данным работ [10-13]. Согласно (2.4), (2.5) с результатами экспериментов можно признать вполне удовлетворительным, если учесть затягивание ламинарного режима и возрастающее при сужении кольцевой щели влияние конструктивных погрешностей ее изготовления на уменьшение действительного R_* .

4. Рассмотрим вопрос о влиянии шероховатости стенки на турбулизацию течения и коэффициент λ сопротивления трубы.

Естественно ожидать, что начиная со значения R , при котором распределенная шероховатость $\Delta = \delta$ проникает в область неустойчивости $q > q_*$

$$R' = q_* \frac{\langle u \rangle}{\sup_{\delta} \{u | \nabla_{\xi, \eta} u\}} \quad (4.1)$$

шероховатость существенно изменяет характер зависимости $\lambda(R)$ в сторону возрастания, или более интенсивного возрастания. Здесь индекс δ соответствует геометрическому месту точек, отстоящих от точек контура $\Gamma_{\xi\eta}$ на расстоянии δ (контур Γ сечения F соответствует расстояние Δ) по внутренней (обезразмеренной аналогично координатам) нормали n ; индекс 0 относится тем самым к контуру $\Gamma_{\xi\eta}$.

Поскольку относительная шероховатость δ обычно весьма мала, (4.1) можно представить в виде

$$R' \approx \frac{q_*}{\delta} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_0 \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 + \frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_0 \right] \right\} \approx \frac{q_*}{\delta} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_0^2 \right\} \quad (4.2)$$

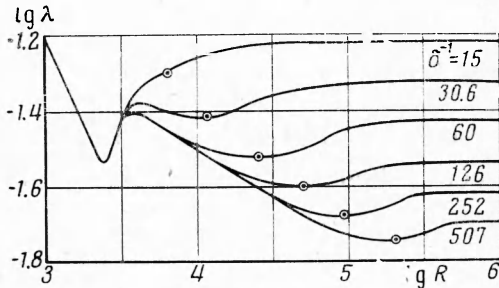
или

$$R_{\Delta} \equiv \frac{\langle v \rangle \Delta}{\nu} = \frac{R' \delta}{2} \approx \frac{q_*}{2} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_0^2 \right\} \quad (4.3)$$

В частности, для трубы кругового сечения

$$R' \approx \frac{q_*}{\delta(1-\delta)(2-\delta)} \approx \frac{q_*}{2\delta} = \frac{R_*^0}{3\delta \sqrt{3}} \approx \frac{404.2}{\delta}, \quad R_{\Delta} \approx \frac{q_*}{4} \approx 202.1 \quad (4.4)$$

На фиг. 3 приведены экспериментальные кривые $\lambda(R)$ Никурадзе для шероховатых труб кругового сечения [5]. На кривых выделены точки с $R = R'$. В них действительно начинается возрастание λ , продолжающееся далее вплоть до области автомодельности.



Фиг. 3

Отсюда следует вывод о том, что в шероховатой трубе при $R_* < R < R'$ турбулентные пульсации имеют некоторую тенденцию к затуханию, которое становится невозможным, как только в область $q > q_*$ начинают проникать постоянные источники возмущений.

Непосредственное экспериментальное определение «допускаемой» высоты распределенной шероховатости было произведено для трубы кольцевого сечения [16,1]. Было по-

лучено в среднем $R_{\Delta}^* \approx 120$, а для реальных отрицательных градиентов давления — $R_{\Delta} \approx 130 \div 140$.

Для плоского канала, гидравлически близкого к трубе с сечением в виде узкого кольца, из (4.2), (4.3) следует:

$$R' \approx \frac{q_*}{3\delta} \approx \frac{269.4}{\delta}, \quad R_{\Delta} \approx \frac{q_*}{6} \approx 134.7 \quad (4.5)$$

т. е. совпадение с экспериментальным результатом [16] оказывается хорошим.

5. Отметим некоторую аналогию признака $q \leq q_*$ устойчивости ламинарного течения в трубах с признаком Рэля устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами [17], который также будет результатом локального энергетического анализа течения. Согласно признаку Рэля последнее устойчиво, если квадрат циркуляции скорости нигде не убывает с увеличением радиус-вектора

$$\frac{d}{dr} (vr)^2 \geq 0 \quad (5.1)$$

и обратно. Условию (5.1) можно придать следующую форму:

$$\frac{\rho v (-dv/dr)}{\rho v^2 / r} \leq 1 \quad (5.2)$$

Знаменатель дроби в (5.2) есть величина градиента давления, числитель с точностью до знака — плотности кинетической энергии жидкости.

При $dv/dr > 0$ (5.2) выполняется автоматически в отличие от противоположного случая, когда $-dv/dr_* = |\nabla v|$.

Принятое выше в качестве признака устойчивости ламинарного течения в трубах неравенство того же смысла и физического содержания

$$\frac{1}{2} q \equiv \left| \frac{\rho v \nabla_{xy} \bar{v}}{dp/dz} \right| \leq \frac{1}{2} q_* \quad (5.3)$$

где q_* — определенная константа, представляется естественным аналогом условия (5.2).

Поступила 24 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Schlichting H. Entstehung der Turbulenz. Berlin, Springer, 1959. (Рус. перев.: Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1962).
2. Хазен Э. М. К теории турбулентности в неоднородных потоках. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 1.
3. Sibulkin M. Transition from turbulent to laminar pipe flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3.
4. Rotta J. C. Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. Ing.—Arch., 1956, Bd 24, Nr. 4.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа М., Физматгиз, 1959.
6. Schiller L. Strömung in Rohren. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1932. (Рус. перев.: Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. М.—Л., ОНТИ, 1936).
7. Modern developments in fluid dynamics. Oxford Clarendon Press, 1938, vol. 1. (Рус. перев.: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1948, т. 1).
8. Davies S. J., White C. M. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1928, vol. 119, No. 781, p. 92.
9. Schiller L. Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades. Z. angew. Math. und Mech., 1923, Bd 3, H. 1.
10. Winkel R. Die Wasserbewegungen in Leitungen mit Ringsspalt — Durchflusssquerschnitt. Z. angew. Math. und Mech., 1923, Bd 3, H. 4.
11. Lonsdale T. The flow of water in the annular space between two coaxial cylindrical pipes. Philos. Mag. & J. Sci., Ser. 6, 1923, vol. 46, No. 271, p. 163.
12. Lea F. C., Tardos A. G. Flow of water through a circular tube with a central core and through rectangular tubes. Philos. Mag. & J. Sci., Ser. 7, 1931, vol. 11, No. 74, p. 1235.
13. Fage A. The influence of wall oscillations, wall rotation and entry eddies on the breakdown of laminar flow in an annular pipe. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1938, vol. 165, No. 923, p. 520.
14. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA, 1954, TN 1174.
15. Лихт М. К., Рожанская И. А. О классах возмущений при исследовании гидродинамической неустойчивости. III Всес. конференц. по теор. и прикл. механ. Анн. докл., М., «Наука», 1968.
16. Feindt E. G. Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar — turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. Jahrbuch 1956 der schiffsbautechnische Gesellschaft, Bd 50, S. 180.
17. Rayleigh. On the dynamics of revolving fluids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1916, vol. 93, No. 648, p. 148.