

УДК 539.375

## ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ПО ДЛИНЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО НАКЛОННОГО РАЗРЕЗА В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

Н. П. Лазарев

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного  
федерального университета им. М. К. Аммосова, 677000 Якутск, Россия  
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: nyurgun@ngs.ru

Исследуются зависимости решения задачи о равновесии пластины Тимошенко и функционала полной энергии пластины от возмущения поверхности, представляющей собой наклонную трещину. Нелинейность задачи обусловлена граничными условиями в виде неравенств (условиями типа условий Синьорини), которые моделируют взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Установлена непрерывная зависимость решения задачи от возмущения длины трещины. Получена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения длины трещины.

**Ключевые слова:** наклонная трещина, вариационное неравенство, пластина Тимошенко, условие непроникания, производная функционала энергии.

DOI: 10.15372/PMTF20150614

**Введение.** Исследованию задач о пластинах и оболочках с трещинами посвящено большое количество работ (см., например, [1–12]). При этом, как правило, рассматриваются вертикальные трещины, моделируемые цилиндрическими поверхностями, образующие которых перпендикулярны срединной плоскости пластины. Как известно, в классическом подходе используются линейные краевые условия в виде равенств на кривой, описывающей трещину [1, 2]. Заметим, что во многих случаях этот подход допускает решения, противоречащие физике твердого тела. Например, в этих решениях наличие перемещений вблизи трещины приводит к взаимному прониканию точек противоположных берегов трещины [2]. Сравнительно недавно был предложен альтернативный подход к изучению задач математической теории трещин, в котором используются краевые условия в виде системы равенств и неравенств. Эти условия учитывают взаимное непроникание противоположных берегов трещины. С помощью вариационных методов изучен широкий круг краевых задач, моделирующих деформирование твердого тела, с нелинейными условиями непроникания, заданными на кривой (поверхности) (см., например, [4–12]).

В механике разрушения известен критерий разрушения Гриффитса, согласно которому развитие трещины происходит в том случае, если производная функционала энергии по длине трещины достигает критической величины, определяемой физико-механическими свойствами материала [2, 13]. С использованием вариационных методов дифференцируе-

мость функционалов энергии для краевых задач теории трещин с односторонними ограничениями изучена в работах [5, 8–12, 14]. В рамках метода скоростей доказана общая формула производной по форме трещины для квадратичных функционалов [15]. Обобщения теоремы о дифференцируемости по форме трещины в случае ее криволинейной геометрии выполнены в [9] на основе  $\Gamma$ -сходимости и в [16] с помощью метода Лагранжа. В [10] получена формула производной функционала энергии пластины Тимошенко, содержащей криволинейную вертикальную трещину. При исследовании напряженно-деформированного состояния и возможности роста трещины наряду с критерием разрушения Гриффитса используются коэффициенты интенсивности напряжений, скачки смещений и т. д. (см., например, [17, 18]).

Задачи для пластин с наклонными трещинами, в которых контактное взаимодействие берегов трещины моделируется с помощью системы равенств и неравенств, исследованы в [4, 6–8]. В работах [4, 6, 7] выводится условие непроникания берегов трещины и обосновывается корректность соответствующих краевых задач. В [6–8] дополнительно предполагается, что положение трещины незначительно отличается от вертикального. В [8] получена формула производной функционала энергии для пластины Кирхгофа — Лява с плоской наклонной трещиной. Асимптотика функционала энергии для пластины Тимошенко с условиями непроникания для наклонной трещины ранее не исследовалась.

В настоящей работе исследуется задача о равновесии пластины Тимошенко с краевыми условиями в виде неравенств, описывающими взаимное непроникание противоположных берегов трещины. При этом рассматриваются такие поверхности (представляющие собой трещины), нормали к которым образует малый угол со срединной плоскостью. Выводится формула для производной функционала энергии по параметру  $\delta$ , характеризующему возмущение трещины.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ . Предположим, что область  $\Omega$  делится кривой  $\Sigma$  на две подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , т. е.  $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega}$ ,  $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \overline{\Sigma}$ . При этом границы  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$  областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  являются липшицевыми и, кроме того,  $\text{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma) > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Кривая  $\Sigma$  на плоскости  $(x_1, x_2)$  задается функцией  $g \in C_{loc}^3(\mathbb{R})$  таким образом, что  $\Sigma = \{(x_1, x_2): x_2 = g(x_1), -l_0 < x_1 < l_1\}$ ,  $l_0 > 0$ ,  $l_1 > 0$ . Обозначим через  $\nu = \nu(x_1) = (\nu_1, \nu_2) = (-g_{,1}(x_1), 1)/\sqrt{1 + g_{,1}^2(x_1)}$  вектор нормали к  $\Sigma$ . Выберем число  $l \in (0, l_1)$ . Поставим в соответствие каждому неотрицательному параметру  $\delta$  ( $l + \delta < l_1$ ) кривую  $\Gamma_\delta \subset \Sigma$ , лежащую внутри области  $\Omega$ :

$$\Gamma_\delta = \{(x_1, x_2): x_2 = g(x_1), 0 < x_1 < l + \delta\}$$

( $\delta$  — параметр, определяющий длину проекции  $\Gamma_\delta$  на ось  $x_1$ ). Обозначим через  $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Gamma_\delta}$  область в плоскости  $(x_1, x_2)$  (рис. 1).

Рассмотрим модель, описывающую равновесие трансверсально-изотропной пластины с наклонной трещиной [7]. Пластина имеет постоянную толщину  $2h$ . При фиксированном значении  $\delta$  задача о равновесии формулируется в области с разрезом  $\Omega_\delta$ .

Следуя [6, 7], для фиксированного  $\delta \in [0, l_1 - l]$  определим следующие поверхности:

$$\Xi_\delta = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, z): |z| \leq h, (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - z\nu(x_1) \text{tg} \alpha(x_1), \mathbf{x} \in \Gamma_\delta\}.$$

Здесь  $\alpha(x_1) \in C_{loc}^3(\mathbb{R})$  — гладкая функция, характеризующая угол между нормалью  $\mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}, z)$  к поверхности  $\Xi_\delta$  и срединной поверхностью (рис. 2). С учетом предположений, использованных при построении моделей пластин с наклонными трещинами (см. [6, 7]), будем считать, что  $|\alpha(x_1)| \ll 1$  для всех  $x_1 \in (-l_0, l_1)$  и нормаль  $\mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}, z)$  к поверхности  $\Xi_\delta$  при  $|z| \leq h$  и фиксированном значении  $\mathbf{x} \in \Gamma_\delta$  остается неизменной. Далее примем, что при  $\delta = 0$  поверхность  $\Xi_0$  соответствует невозмущенной трещине, а при  $\delta > 0$  — возмущенной.

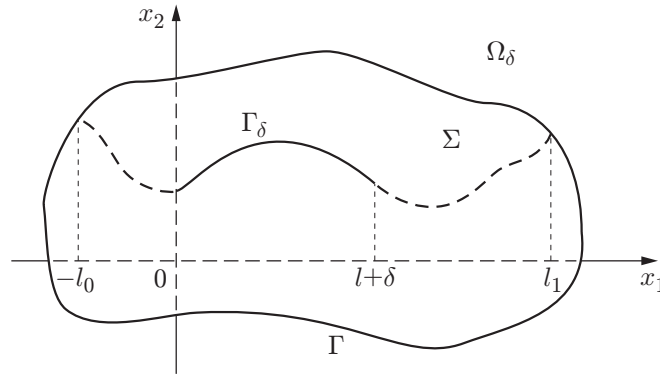


Рис. 1. Область  $\Omega_\delta$

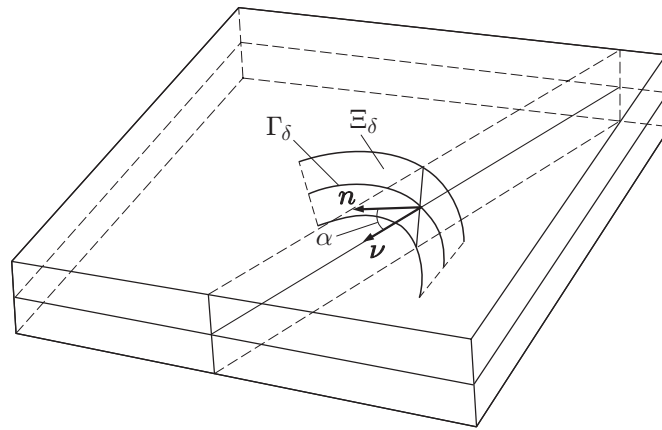


Рис. 2. Схема пластины с наклонной трещиной

Для каждого фиксированного значения  $\delta \in [0, l_1 - l]$  в исходном недеформированном состоянии пластину, содержащую трещину, будем задавать в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  множеством  $\Omega \times [-h, h] \setminus \Xi_\delta$ . При этом поверхность  $\Xi_\delta$  пересекается со срединной плоскостью  $z = 0$  по кривой  $\Gamma_\delta$ .

Обозначим через  $\chi = \chi(\mathbf{x}) = (\mathbf{U}, u)$  вектор перемещений точек срединной поверхности  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  ( $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$  и  $u$  — горизонтальные (вдоль плоскости  $(x_1, x_2)$ ) и вертикальные перемещения соответственно). Углы поворота нормальных сечений обозначим через  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Пусть  $H^1(\Omega_\delta)$  — пространство Соболева,  $H^{1,0}(\Omega_\delta)$  — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе  $\Gamma$ . Введем следующие обозначения:

$$H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta)^5, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_0)}.$$

Тензоры, описывающие деформацию пластины  $\varepsilon(\varphi) = \{\varepsilon_{ij}(\varphi)\}$ ,  $\varepsilon(\mathbf{U}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{U})\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , определяются по формулам [19]

$$\varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Для моментов  $m(\varphi) = \{m_{ij}(\varphi)\}$  и усилий  $\sigma(\mathbf{U}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{U})\}$ ,  $i, j = 1, 2$  имеют место равенства

$$m_{ij}(\varphi) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\varphi), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{U}) = 3h^{-2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{U})$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), в которых ненулевые коэффициенты тензора  $c_{ijkl}$  определяются соотношениями

$$c_{iii} = D, \quad c_{iij} = D\kappa, \quad c_{ijji} = c_{ijji} = D(1 - \kappa)/2, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $0 < \kappa < 1/2$  — коэффициент Пуассона [19]. Поперечные силы находятся по формулам

$$q_i = q_i(u, \varphi) = \Lambda(u_{,i} + \varphi_i), \quad i = 1, 2,$$

где  $\Lambda = 2k'Gh$ ;  $k'$  — коэффициент сдвига;  $G$  — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины [19];  $v_{,i} = \partial v / \partial x_i$ . Считаем, что  $D$ ,  $\kappa$ ,  $\Lambda$  — постоянные. Определим билинейную форму  $B_\delta: H(\Omega_\delta) \times H(\Omega_\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  с помощью интеграла

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_\delta} b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

где

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{U}, u, \varphi), \quad \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{W}, w, \boldsymbol{\mu}),$$

$$b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \{ \sigma_{ij}(\mathbf{W}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) + m_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\mu}) + q_i(u, \varphi)(w_{,i} + \mu_i) \}.$$

Гладкость границ областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  позволяет применять в каждой из этих областей неравенство Корна и обобщенное неравенство Пуанкаре [5], с помощью которых можно вывести оценку

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geq c_\delta \|\boldsymbol{\xi}\|_{H(\Omega_\delta)}^2, \quad (1)$$

где постоянная  $c_\delta > 0$  не зависит от  $\boldsymbol{\xi}$  [7]. Выражение для функционала потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область  $\Omega_\delta$ , имеет вид

$$\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - \int_{\Omega_\delta} \mathbf{F} \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{U}, u, \varphi),$$

где  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in C^1(\bar{\Omega})^5$  — вектор заданных внешних нагрузок [19].

Считаем, что на внешней границе выполнены краевые условия защемления

$$u = 0, \quad \varphi = \mathbf{U} = (0, 0) \quad \text{на } \Gamma. \quad (2)$$

В соответствии с направлением  $\boldsymbol{\nu}$  имеются положительный  $\Gamma_\delta^+$  и отрицательный  $\Gamma_\delta^-$  берега кривой (разреза)  $\Gamma_\delta$ , при этом для функции  $v \in H^{1,0}(\Omega_\delta)$  на кривой  $\Gamma_\delta$  определены следы  $v^+ = v|_{\Gamma_\delta^+}$ ,  $v^- = v|_{\Gamma_\delta^-}$ ,  $[v] = v^+ - v^-$ . Условие взаимного непроникания противоположных берегов для наклонной трещины пластины имеет вид

$$[\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu} + [u] \operatorname{tg} \alpha \geq h |[\varphi]\boldsymbol{\nu}|, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\delta, \quad (3)$$

где  $[\mathbf{U}]\boldsymbol{\nu} = [u_i]\nu_i$ ;  $[\varphi]\boldsymbol{\nu} = [\varphi_i]\nu_i$ . Вывод и обоснование условия (3) представлены в [7]. Заметим, что условие (3) можно записать в виде

$$[\mathbf{U}](-g_{,1}(x_1), 1) + [u]t(x_1) \geq h |[\varphi](-g_{,1}(x_1), 1)|, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\delta, \quad (4)$$

где  $t(x_1) = \operatorname{tg} \alpha(x_1) \sqrt{1 + (g_{,1}(x_1))^2}$  — функция, принадлежащая пространству  $C_{loc}^2(\mathbb{R})$ .

Задачу о равновесии пластины сформулируем в вариационном виде:

$$\inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}). \quad (5)$$

Здесь  $K_\delta(\Omega_\delta)$  — множество допустимых функций  $\xi = (\mathbf{U}, u, \varphi) \in H(\Omega_\delta)$ , таких что  $\xi$  удовлетворяет (3). Известно, что при каждом фиксированном  $\delta \in [0, l_1 - l)$  задача (5) имеет единственное решение  $\xi^\delta = (\mathbf{U}^\delta, u^\delta, \varphi^\delta)$ , удовлетворяющее вариационному неравенству [7]

$$B_\delta(\xi^\delta, \eta - \xi^\delta) \geq \int_{\Omega_\delta} \mathbf{F}(\eta - \xi^\delta) \quad \forall \eta \in K_\delta(\Omega_\delta). \quad (6)$$

Найдем производную функционала энергии по параметру  $\delta$ , характеризующему возмущение длины трещины (кривой  $\Gamma_0$ ), т. е. вычислим предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \xi^\delta) - \Pi(\Omega_0; \xi^0)}{\delta}, \quad (7)$$

где  $\xi^0, \xi^\delta$  — решения задач о равновесии в невозмущенной  $\Omega_0$  и возмущенной  $\Omega_\delta$  областях соответственно.

**2. Вспомогательные утверждения и формулы.** При анализе решения и физических параметров задач, соответствующих разным значениям  $\delta$ , будем использовать отображение возмущенной области  $\Omega_\delta$  на исходную область  $\Omega_0$ . Построим это отображение, аналогично тому как это сделано в [11]. Пусть  $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$  — шар радиусом  $\varepsilon > 0$  с центром, расположенным в вершине трещины  $(l, g(l))$ . Будем считать значение  $\varepsilon$  достаточно малым, так что  $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega$  и вторая вершина трещины  $(0, g(0))$  лежит вне замкнутого шара  $\overline{B_\varepsilon}$ . Выберем гладкую срезающую функцию  $\theta$ , такую что  $\text{supp } \theta \subset B_\varepsilon$  и  $\theta \equiv 1$  в  $B_{\varepsilon/2}$ . Для достаточно малых  $\delta < \varepsilon/2$ , таких что  $(l + \delta, g(l + \delta)) \in B_{\varepsilon/2}$  (такое включение возможно в силу гладкости функции  $g$ ), рассмотрим преобразование независимых переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \delta\theta(x_1, x_2), & y_2 &= x_2 + g(x_1 - \delta\theta(x_1, x_2)) - g(x_1), \\ (y_1, y_2) &\in \Omega_0, & (x_1, x_2) &\in \Omega_\delta, \end{aligned} \quad (8)$$

которое взаимно однозначно отображает возмущенную область  $\Omega_\delta$  на невозмущенную область  $\Omega_0$ . Функциональная матрица преобразования

$$A = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 - \delta\theta_{,1}(\mathbf{x}) & (1 - \delta\theta_{,1}(\mathbf{x}))g'(x_1 - \delta\theta(\mathbf{x})) - g'(x_1) \\ -\delta\theta_{,2}(\mathbf{x}) & 1 - \delta\theta_{,2}(\mathbf{x})g'(x_1 - \delta\theta(\mathbf{x})) \end{pmatrix}$$

( $g'(t) = dg(t)/dt$ ) имеет якобиан

$$J_\delta = 1 - \delta \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}, \quad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} + g'(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

строго положительный при малых  $\delta$ . Производная  $\partial/\partial\boldsymbol{\tau}$  обозначает дифференцирование вдоль кривой  $\Sigma$ , где  $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$  — вектор, касательный к кривой  $\Sigma$ .

Так как функции  $g'(x_1), t(x_1)$  принадлежат пространству  $C_{loc}^2(\mathbb{R})$ , в области  $\Omega_0$  справедливы формулы Тейлора

$$g'(x_1 \pm \delta\theta(\mathbf{x})) = g'(x_1) \pm \delta\theta(\mathbf{x})g''(x_1) + R_\pm(\delta, \mathbf{x}); \quad (9)$$

$$t(x_1 \pm \delta\theta(\mathbf{x})) = t(x_1) \pm \delta\theta(\mathbf{x})t'(x_1) + R_{t\pm}(\delta, \mathbf{x}), \quad (10)$$

где  $t(x_1) = \text{tg}(\alpha(x_1))\sqrt{1 + g'(x_1)^2}$ . При каждом  $\delta$  имеем функции  $R_\pm(\delta, \cdot), R_{t\pm}(\delta, \cdot)$  из пространства  $C_0^1(\Omega)$ , определяемые равенствами (9), (10), которые можно представить в виде остаточных членов Пеано

$$\|R_\pm(\delta, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} = o(\delta), \quad \|R_{t\pm}(\delta, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} = o(\delta) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (11)$$

В силу (9) функциональная матрица  $A$  допускает представление

$$A = I - \delta \begin{pmatrix} \theta_{,1}(\mathbf{x}) & \theta(\mathbf{x})g''(x_1) + \theta_{,1}(\mathbf{x})g'(x_1) \\ \theta_{,2}(\mathbf{x}) & \theta_{,2}(\mathbf{x})g'(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & R_1(\delta, \mathbf{x}) \\ 0 & R_2(\delta, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(\delta, \mathbf{x}) &= R_-(\delta, \mathbf{x}) - \delta^2\theta(\mathbf{x})\theta_{,1}(\mathbf{x})g''(x_1) + \delta\theta_{,1}(\mathbf{x})R_-(\delta, \mathbf{x}), \\ R_2(\delta, \mathbf{x}) &= \delta^2\theta_{,2}(\mathbf{x})g''(x_1) - \delta R_-(\delta, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11) в предположении гладкости функций  $\theta$  и  $g$  следует, что функции  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) равномерно ограничены по  $\delta, \mathbf{x}$  при малых  $\delta$  и, кроме того,  $R_i(\delta, \mathbf{x})/\delta \rightarrow 0$  в  $L_\infty(\Omega)$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Так как при преобразовании независимых переменных (8) область  $\Omega_\delta$  отображается на область  $\Omega_0$  взаимно однозначно [11], то существует обратное преобразование  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\delta, \mathbf{y})$ , отображающее область  $\Omega_0$  на область  $\Omega_\delta$ . Обозначим через  $\tilde{u}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_0$  преобразованную функцию  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ , т. е.  $\tilde{u}(\mathbf{y}) = \tilde{u}(x_1 - \delta\theta(\mathbf{x}), x_2 + g(x_1 - \delta\theta(\mathbf{x})) - g(x_1)) \equiv u(\mathbf{x})$ . Используя (12), формулы преобразования производных можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} - \delta l_1^\delta(\theta, \tilde{u}) + R_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}, & l_1^\delta(\theta, \tilde{u}) &= \theta_{,1}^\delta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + (\theta d)_{,1}^\delta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} - \delta l_2^\delta(\theta, \tilde{u}) + R_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}, & l_2^\delta(\theta, \tilde{u}) &= \theta_{,2}^\delta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + (\theta d)_{,2}^\delta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $d(x_1, x_2) = g'(x_1)$ ;  $\theta_{,i}^\delta(\mathbf{y}) = \theta_{,i}(\mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ,  $(\theta d)_{,i}^\delta(\mathbf{y}) = (\theta d)_{,i}(\mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ,  $i = 1, 2$ . Заметим, что при  $\delta \rightarrow 0$  справедливы следующие сходимости:

$$\theta_{,i}^\delta \rightarrow \theta_{,i}, \quad (\theta d)_{,i}^\delta \rightarrow (\theta d)_{,i} \quad \text{сильно в } L_\infty(\Omega_0), \quad i = 1, 2.$$

Пусть  $\xi, \eta$  — произвольные функции в пространстве  $H(\Omega_\delta)$ . Обозначим через  $\tilde{\xi} = (\tilde{U}, \tilde{u}, \tilde{\varphi})$ ,  $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\mu})$  соответствующие им функции, полученные с помощью преобразования (8). При малых  $\delta$  имеют место включения  $\tilde{\xi} \in H(\Omega_0)$ ,  $\tilde{\eta} \in H(\Omega_0)$ . В силу (14) компоненты преобразованных тензоров деформаций и напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) &= \varepsilon_{ij}(\tilde{U}) - \delta E_{ij}^\delta(\theta; \tilde{U}) + r_{ij}(\delta, \tilde{U}), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{U}) &= c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\tilde{U}) - \delta E_{kl}^\delta(\theta; \tilde{U}) + r_{kl}(\delta, \tilde{U})), \\ \|r_{ij}(\delta, \tilde{U})\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq p_1(\delta) \|\tilde{U}\|_{H^{1,0}(\Omega_0)^2}, \quad 0 \leq p_1(\delta) = o(\delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения для функций  $r_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют вид, аналогичный формулам (13). В (15) использовано обозначение

$$E_{ij}^\delta(\theta; \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left( \theta_{,j}^\delta \frac{\partial u_i}{\partial y_1} + \theta_{,i}^\delta \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + (\theta d)_{,j}^\delta \frac{\partial u_i}{\partial y_2} + (\theta d)_{,i}^\delta \frac{\partial u_j}{\partial y_2} \right).$$

Нетрудно показать, что для преобразованных функций  $m_{ij}(\varphi)$ ,  $\varepsilon_{ij}(\varphi)$ ,  $i, j = 1, 2$  справедливы формулы, аналогичные (15).

С помощью преобразования координат (8) запишем функции и интегралы, соответствующие возмущенной области  $\Omega_\delta$ , в новых координатах  $\mathbf{y} \in \Omega_0$ . С учетом гладкости функций  $g$ ,  $\mathbf{F}$  можно получить следующие представления для якобиана  $J_\delta^{-1}$  и функции  $f_i^\delta(\mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ,  $i = \overline{1, 5}$ :

$$J_\delta^{-1} = 1 + \delta \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \delta r_1(\delta) \text{ в } \Omega_0, \quad \|r_1(\delta)\|_{L_\infty(\Omega_0)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0; \quad (16)$$

$$f_i^\delta = f_i + \delta \theta \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \delta r_2(\delta) \text{ в } \Omega_0, \quad \|r_2(\delta)\|_{L_\infty(\Omega_0)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (17)$$

Тогда при  $i = \overline{1, 5}$  из (16), (17) следует

$$J_\delta^{-1} f_i^\delta = f_i + \delta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_i) + \delta r_3(\delta) \text{ в } \Omega_0, \quad \|r_3(\delta)\|_{L_\infty(\Omega_0)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (18)$$

Как и в работе [11], используя (18), получаем следующие разложения в ряд по  $\delta$ :

$$\int_{\Omega_\delta} \mathbf{F} \boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega_0} J_\delta^{-1} \mathbf{F}^\delta \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \int_{\Omega_0} \{(\mathbf{F} + \delta(\theta \mathbf{F})_\tau) \tilde{\boldsymbol{\xi}}\} + r_4(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}}). \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{F}^\delta(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ,

$$(\theta \mathbf{F})_\tau = \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_1), \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_2), \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_3), \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_4), \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\theta f_5) \right), \quad (20)$$

для остаточного члена  $r_4$  справедлива оценка  $\|r_4(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}})\|_{L^1(\Omega_0)} \leq p_4(\delta) \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|$ ,  $0 \leq p_4(\delta) = o(\delta)$ .  
С учетом формул (14)–(16) для билинейной формы имеем представление

$$B_\delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = B_0(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \delta \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} b(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) - L_\delta(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - L_\delta(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \right\} + r_5(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad (21)$$

где

$$L_\delta(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \sigma_{ij}(\tilde{\mathbf{U}}) E_{ij}^\delta(\theta; \tilde{\mathbf{W}}) + m_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) E_{ij}^\delta(\theta; \tilde{\boldsymbol{\mu}}) + q_i(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) l_i^\delta(\theta, \tilde{w}),$$

$$\|r_5(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})\|_{L^1(\Omega_0)} \leq p_5(\delta) \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\| \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|, \quad 0 \leq p_5(\delta) = o(\delta).$$

Выполнив замену переменных во всех интегралах функционала энергии  $\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi})$  при  $\delta > 0$ , получаем функционал  $\Pi_\delta(\Omega_0, \tilde{\boldsymbol{\xi}})$ , определенный в пространстве  $H(\Omega_0)$ . При этом в силу полученных разложений имеют место равенства

$$\Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}) = \Pi_\delta(\Omega_0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \Pi(\Omega_0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_0} \left[ 2L_\delta(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) + 2(\theta \mathbf{F})_\tau \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} b(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \right] + r_6(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}}); \quad (22)$$

$$\|r_6(\delta, \tilde{\boldsymbol{\xi}})\|_{L^1(\Omega_0)} \leq p_6(\delta) (\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|), \quad 0 \leq p_6(\delta) = o(\delta).$$

В результате выполнения преобразования (8) множество допустимых функций  $K_\delta(\Omega_\delta)$  переходит в множество  $K_\delta(\Omega_0)$ , состоящее из всех функций пространства  $H(\Omega_0)$ , удовлетворяющих неравенству

$$[\mathbf{U}] \boldsymbol{\nu}^\delta + \text{tg}(\alpha^\delta)[u] \geq h[|\boldsymbol{\varphi}| \boldsymbol{\nu}^\delta] \text{ на } \Gamma_0. \quad (23)$$

Здесь  $\boldsymbol{\nu}^\delta$  — преобразованный вектор нормали  $\boldsymbol{\nu}$ , т. е.  $\boldsymbol{\nu}^\delta(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\nu}(x_1(\delta, \mathbf{y}))$ ;  $\text{tg}(\alpha^\delta) = \text{tg}(\alpha(x_1(\delta, \mathbf{y})))$ ,  $\mathbf{y} \in \Gamma_0$ . Заметим, что вектор  $\boldsymbol{\nu}^\delta$ , вообще говоря, не совпадает с вектором нормали  $\boldsymbol{\nu}$  к  $\Gamma_0$ . Взаимная однозначность множеств  $K_\delta(\Omega_0)$  и  $K_\delta(\Omega_\delta)$  гарантирует выполнение равенства

$$\inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_\delta(\Omega_0)} \Pi_\delta(\Omega_0, \boldsymbol{\xi}) = \inf_{\boldsymbol{\xi} \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \boldsymbol{\xi}). \quad (24)$$

Обозначим через  $\xi_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$  функцию, соответствующую решению  $\xi^\delta \in K_\delta(\Omega_\delta)$  задачи (5), т. е.  $\xi_\delta = \tilde{\xi}^\delta$  ( $\xi_0 = \xi^0$ ). С учетом полученных разложений (19), (21) выполним замену переменных в обеих частях неравенства (6). В результате, оценивая в формулах (19), (21) выражения с множителем  $\delta$  и остаточные члены, для достаточно малых  $\delta > 0$  получаем

$$B_0(\xi_\delta, \tilde{\eta} - \xi_\delta) \geq \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\tilde{\eta} - \xi_\delta) - \delta c (\|\xi_\delta\| + \|\tilde{\eta}\|) (\|\xi_\delta\| + 1) \quad \forall \tilde{\eta} \in K_\delta(\Omega_0). \quad (25)$$

В неравенстве (25) постоянная  $c \geq 0$  в силу гладкости  $\theta$ ,  $\mathbf{F}$  не зависит от  $\delta$ ,  $\xi^\delta$ ,  $\tilde{\eta}$ . Подставляя в (25) пробную функцию  $\tilde{\eta} = \mathbf{0}$ , с учетом оценки (1) и неравенства Гельдера для достаточно малых  $\delta$  получаем следующую равномерную оценку:

$$\|\xi_\delta\| \leq c.$$

Для того чтобы выявить связи между множествами  $K_\delta(\Omega_0)$ ,  $K_0(\Omega_0)$  и решениями  $\xi^\delta$ ,  $\xi_0$ , приведем две леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\mathbf{U} = (u_1, u_2) \in H^{1,0}(\Omega_0)^2$  — произвольная функция. Тогда при достаточно малых  $\delta > 0$  функции  $P_\delta(\mathbf{U})$ , определенные равенством  $P_\delta(\mathbf{U}) = (0, \theta^\delta g'' u_1 + (R_+^\delta/\delta) u_1)$ , где  $R_+^\delta = R_+(\delta, \mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ; функция  $R_+(\delta, \mathbf{x})$  определена равенством (9), принадлежат пространству  $H^{1,0}(\Omega_0)^2$  и справедливы равенства

$$\mathbf{U}(-g_{,1}(y_1), 1) = (\mathbf{U} + \delta P_\delta(\mathbf{U}))(-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) \quad \text{на } \Gamma_0^\pm; \quad (26)$$

$$\mathbf{U}(-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) = (\mathbf{U} - \delta P_\delta(\mathbf{U}))(-g_{,1}(y_1), 1) \quad \text{на } \Gamma_0^\pm. \quad (27)$$

**Доказательство.** Выберем параметр  $\delta$  настолько малым, чтобы преобразование (8) было биективным отображением между областями  $\Omega_0$  и  $\Omega_\delta$ , и зафиксируем его. В силу гладкости функций  $g$ ,  $\theta$  и финитности  $\theta$  очевидно, что функция  $P_\delta(\mathbf{U})$  принадлежит пространству  $H^{1,0}(\Omega_0)^2$ . Покажем, что соответствующие условия на кривой  $\Gamma_0$  также выполняются. Так как преобразование координат (8) отображает область  $\Omega_\delta$  на область  $\Omega_0$ , то  $x_1 = y_1 + \delta\theta^\delta(\mathbf{y})$ , где  $\theta^\delta(\mathbf{y}) = \theta(\mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ . В силу разложения (9) получаем

$$\mathbf{U}(-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) = -g'(y_1)u_1 - \delta\theta^\delta g''(y_1)u_1 - R_+^\delta(\delta, \mathbf{y})u_1 + u_2 \quad \text{на } \Gamma_0^\pm,$$

$$\delta P_\delta(\mathbf{U})(-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) = \delta\theta^\delta g''(y_1)u_1 + R_+^\delta(\delta, \mathbf{y})u_1 \quad \text{на } \Gamma_0^\pm.$$

Суммируя эти равенства, получаем (26). Таким же способом, используя разложения (9), можно установить справедливость (27). Лемма доказана.

Введем обозначение  $R_{t+}^\delta = R_{t+}(\delta, \mathbf{x}(\delta, \mathbf{y}))$ , где функция  $R_{t+}(\delta, \mathbf{x})$  определяется равенством (10).

**Лемма 2.** Пусть вектор-функция  $\xi_\delta = (u_{\delta 1}, u_{\delta 2}, u_\delta, \varphi_{\delta 1}, \varphi_{\delta 2})$  получена преобразованием (8) функции  $\xi^\delta$ , являющейся решением задачи (5). Тогда при достаточно малых  $\delta > 0$  функции  $\xi_\delta^1$ ,  $\xi_\delta^2$ , определенные с помощью равенств

$$\xi_\delta^1 = \xi_0 + \delta \mathbf{Q}_\delta^1, \quad \xi_\delta^2 = \xi_\delta - \delta \mathbf{Q}_\delta^2,$$

где

$$\mathbf{Q}_\delta^1 = \left( 0, \theta^\delta g'' u_{01} + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} u_{01} - \left( \theta^\delta t_{,1}(y_1) + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} \right) u_{00}, 0, 0, \theta^\delta g'' \varphi_{01} + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} \varphi_{01} \right),$$

$$\mathbf{Q}_\delta^2 = \left( 0, \theta^\delta g'' u_{\delta 1} + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} u_{\delta 1} - \left( \theta^\delta t_{,1}(y_1) + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} \right) u_{\delta 0}, 0, 0, \theta^\delta g'' \varphi_{\delta 1} + \frac{R_{t+}^\delta}{\delta} \varphi_{\delta 1} \right),$$

удовлетворяют включениям  $\xi_\delta^1 \in K_\delta(\Omega_0)$ ,  $\xi_\delta^2 \in K_0(\Omega_0)$ .



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем параметр  $\delta$  настолько малым, чтобы преобразование (8) было биективным отображением между областями  $\Omega_0$  и  $\Omega_\delta$ . В силу гладкости функций  $g$ ,  $\theta$  и финитности  $\theta$  очевидно, что функции  $\xi_\delta^1$  и  $\xi_\delta^2$  принадлежат пространству  $H(\Omega_0)$ . Покажем, что соответствующие условия на кривой  $\Gamma_0$  также выполняются. Рассмотрим функцию  $\xi_\delta^1 = (\mathbf{U}_\delta^1, u_\delta^1, \varphi_\delta^1)$ . Докажем, что для этой функции справедливо неравенство (23). Подставляя  $\xi_\delta^1$  в неравенство (23), преобразуем его к виду

$$[\mathbf{U}_\delta^1](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_\delta^1]t^\delta(\mathbf{y}) \geq h|[\varphi_\delta^1](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1)|, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0, \quad (28)$$

где  $t^\delta(\mathbf{y}) = t(x_1(\delta, \mathbf{y}))$ . Докажем, что соотношение (28) выполнено. Преобразуем сначала выражение в правой части (28). В соответствии с леммой 1 имеем

$$\begin{aligned} h|[\varphi_\delta^1](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1)| &= h|[\varphi_0 + \delta P_\delta(\varphi_0)](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1)| = \\ &= h|[\varphi_0](-g_{,1}(y_1), 1)| \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Слагаемые в левой части (28) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_\delta^1](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_\delta^1]t^\delta(\mathbf{y}) &= [\mathbf{U}_0 + \delta P_\delta(\mathbf{U}_0)](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) - \\ &- [(0, (\delta\theta^\delta t_{,1}(y_1) + R_{t+}^\delta)u_0)](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_0]t^\delta(\mathbf{y}) = \\ &= [\mathbf{U}_0](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_0](t^\delta(\mathbf{y}) - \delta\theta^\delta t_{,1}(y_1) - R_{t+}^\delta) = \\ &= [\mathbf{U}_0](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_0]t(y_1) \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Таким образом, (28) эквивалентно неравенству

$$[\mathbf{U}_0](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_0]t(y_1) \geq h|[\varphi_0](-g_{,1}(y_1), 1)|, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку  $\xi_0 \in K_0(\Omega_0)$ . Следовательно, выполнено и (28). Это означает, что  $\xi_\delta^1 \in K_\delta(\Omega_0)$ .

Рассмотрим функцию  $\xi_\delta^2 = (\mathbf{U}_\delta^2, u_\delta^2, \varphi_\delta^2)$ . Для этой функции нужно доказать справедливость неравенства

$$[\mathbf{U}_\delta^2](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_\delta^2]t(y_1) \geq h|[\varphi_\delta^2](-g_{,1}(y_1), 1)|, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0. \quad (29)$$

В соответствии с леммой 1 для правой части соотношения (29) имеет место равенство

$$h|[\varphi_\delta^2](-g_{,1}(y_1), 1)| = h|[\varphi_\delta](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1)|, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0,$$

левую часть можно представить в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_\delta^2](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_\delta^2]t(y_1) &= [\mathbf{U}_\delta - \delta P_\delta(\mathbf{U}_\delta)](-g_{,1}(y_1), 1) + \\ &+ [(0, (\delta\theta^\delta t_{,1}(y_1) + R_{t+}^\delta)u_\delta)](-g_{,1}(y_1), 1) + [u_\delta^2]t(y_1) = \\ &= [\mathbf{U}_\delta](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_\delta](t(y_1) + \delta\theta^\delta t_{,1}(y_1) + R_{t+}^\delta) = \\ &= [\mathbf{U}_\delta](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_\delta]t^\delta(\mathbf{y}) \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[\mathbf{U}_\delta](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1) + [u_\delta]t^\delta(\mathbf{y}) \geq h|[\varphi_\delta](-g_{,1}(x_1(\delta, \mathbf{y})), 1)|, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0. \quad (30)$$

Включение  $\xi_\delta \in K_\delta(\Omega_0)$  гарантирует справедливость неравенства (30), из которого в свою очередь следует выполнение (29). Таким образом, имеет место включение  $\xi_\delta^2 \in K_0(\Omega_0)$ . Лемма доказана.

Докажем теорему о сходимости решений задач равновесия, определенных в возмущенных областях.

**Теорема 1.** Пусть  $\xi^\delta$  — решение возмущенной задачи (5),  $\xi_\delta(\mathbf{y}) = \xi^\delta(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega_0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ . Тогда при  $\delta \rightarrow 0$  имеет место сходимость

$$\xi_\delta \rightarrow \xi_0 \quad \text{сильно в } H(\Omega_0),$$

где  $\xi_0$  — решение невозмущенной задачи (5), соответствующей параметру  $\delta = 0$ . Более того, при достаточно малых  $\delta$  справедлива оценка

$$\|\xi_\delta - \xi_0\| \leq c\sqrt{\delta} \quad (31)$$

с не зависящей от  $\delta$  постоянной  $c > 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 2 в случае  $\delta = 0$  в вариационное неравенство (6) в качестве пробной функции можно подставить  $\eta = \xi_\delta^2$ , а в (25) — функцию  $\tilde{\eta} = \xi_\delta^1$ . Сложив полученные таким образом два неравенства, получаем

$$B_0(\xi_\delta - \xi_0, \xi_\delta - \xi_0) \leq \delta \left| \int_{\Omega_0} \{F(Q_\delta^2 - Q_\delta^1) - B_0(\xi_0, Q_\delta^2) + B_0(\xi_\delta, Q_\delta^1)\} \right| + \delta c(\|\xi_\delta\| + \|\xi_0 + \delta Q_\delta^1\|)(\|\xi_\delta\| + 1). \quad (32)$$

Заметим, что в правой части неравенства (32) интегралы и нормы при множителе  $\delta$  ограничены в силу равномерной ограниченности норм  $\|\xi_\delta\|$ ,  $\|Q_\delta^i\|$ ,  $i = 1, 2$ . Из оценки (1) для левой части неравенства (32) следует равномерная оценка (31). Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** Для  $\xi_\delta = (\mathbf{U}_\delta, u_\delta, \varphi_\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  справедливы следующие сходимости

$$\begin{aligned} Q_\delta^1 &\rightarrow Q_0 \quad \text{сильно в } H(\Omega_0), & Q_\delta^2 &\rightarrow Q_0 \quad \text{сильно в } H(\Omega_0), \\ l_i^\delta(\theta, u_0) &\rightarrow l_i(\theta, u_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), & l_i^\delta(\theta, u_\delta) &\rightarrow l_i(\theta, u_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), \\ E_{ij}^\delta(\theta; \mathbf{U}_0) &\rightarrow E_{ij}(\theta; \mathbf{U}_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), & E_{ij}^\delta(\theta; \mathbf{U}_\delta) &\rightarrow E_{ij}(\theta; \mathbf{U}_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), \\ E_{ij}^\delta(\theta; \varphi_0) &\rightarrow E_{ij}(\theta; \varphi_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), & E_{ij}^\delta(\theta; \varphi_\delta) &\rightarrow E_{ij}(\theta; \varphi_0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega_0), \\ & & i = 1, 2, & j = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_0 &= (0, \theta g'' u_{01} - \theta t_{,1} (y_1) u_0, 0, 0, \theta g'' \varphi_{01}), \\ l_i(\theta, u) &= \theta_{,i} \frac{\partial u}{\partial x_1} + (\theta d)_{,i} \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (d(x_1, x_2) = g'(x_1)), \\ E_{ij}(\theta; \mathbf{U}) &= \frac{1}{2} \left( \theta_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \theta_{,i} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + (\theta d)_{,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + (\theta d)_{,i} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right), \\ E_{ij}(\theta; \varphi) &= \frac{1}{2} \left( \theta_{,j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \theta_{,i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + (\theta d)_{,j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + (\theta d)_{,i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

**3. Вывод формулы для производной функционала энергии.** Используя вариационные свойства решений и известный метод [5, 12], выведем формулу для производной функционала энергии (7) по параметру  $\delta$ . Индекс 0, используемый для обозначения решения задачи (5) в невозмущенной области, далее опускается. Будем считать, что  $\xi_0 = \xi^0 = (\mathbf{U}^0, u^0, \varphi^0) = \xi = (\mathbf{U}, u, \varphi)$ . Рассмотрим сначала положительные параметры  $\delta$ . В силу (24) и леммы 2 имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\delta; \xi^\delta) - \Pi(\Omega_0; \xi)}{\delta} = \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \xi_\delta) - \Pi(\Omega_0; \xi)}{\delta} \leq \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \xi + \delta Q_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \xi)}{\delta}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi} + \delta \mathbf{Q}_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta}.$$

В силу следствия из теоремы 1 и формулы (22) получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi} + \delta \mathbf{Q}_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi} + \delta \mathbf{Q}_\delta^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta} = \\ &= B_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Q}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - 2(\sigma_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij}(\theta; \mathbf{U}) + \right. \\ &\quad \left. + m_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) E_{ij}(\theta; \boldsymbol{\varphi}) + q_i(u, \boldsymbol{\varphi}) l_i(\theta, u) + (\theta \mathbf{F})_\tau \boldsymbol{\xi} + \mathbf{F} \mathbf{Q}_0 \right\}. \end{aligned}$$

В то же время справедливо соотношение

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta} \geq \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta - \delta \mathbf{Q}_\delta^2)}{\delta},$$

поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi})}{\delta} \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta - \delta \mathbf{Q}_\delta^2)}{\delta}.$$

С учетом теоремы 1 и следствия из нее с помощью (22) находим

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta - \delta \mathbf{Q}_\delta^2)}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\Pi_\delta(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}_\delta - \delta \mathbf{Q}_\delta^2)}{\delta} = \\ &= B_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Q}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - 2(\sigma_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij}(\theta; \mathbf{U}) + \right. \\ &\quad \left. + m_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) E_{ij}(\theta; \boldsymbol{\varphi}) + q_i(u, \boldsymbol{\varphi}) l_i(\theta, u) + (\theta \mathbf{F})_\tau \boldsymbol{\xi} + \mathbf{F} \mathbf{Q}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, нижний предел последовательности  $\{(\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}^\delta) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\xi}))/\delta\}$  оценивается снизу той же константой, которой оценивается верхний предел этой последовательности сверху. Следовательно, предел справа существует и равен этой константе. Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Производная функционала энергии  $\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}^\delta)$  по параметру возмущения  $\delta$  наклонной трещины  $\Xi_\delta$  существует и задается формулой

$$\begin{aligned} \Pi'(l) = \frac{d\Pi(\Omega_\delta; \boldsymbol{\xi}^\delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} &= B_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Q}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) + \right. \\ &\quad \left. + m_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) + q_i(u, \boldsymbol{\varphi}) (u_{,i} + \varphi_i)) - 2(\sigma_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij}(\theta; \mathbf{U}) + \right. \\ &\quad \left. + m_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) E_{ij}(\theta; \boldsymbol{\varphi}) + q_i(u, \boldsymbol{\varphi}) l_i(\theta, u) + (\theta \mathbf{F})_\tau \boldsymbol{\xi} + \mathbf{F} \mathbf{Q}_0 \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

где функции  $\mathbf{Q}_0$ ,  $E_{ij}(\theta; \mathbf{U})$ ,  $E_{ij}(\theta; \boldsymbol{\varphi})$ ,  $l_i(\theta, u)$  определяются формулами (33), функция  $(\theta \mathbf{F})_\tau$  задается формулой (20).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Так как  $\Pi(\Omega_\delta; \xi^\delta)$  и  $\Pi(\Omega_0; \xi)$  не зависят от срезающей функции  $\theta$ , то производная  $((d\Pi(\Omega_\delta; \xi^\delta))/d\delta)|_{\delta=0}$  также не зависит от  $\theta$ , несмотря на то что  $\theta$  входит в формулу (34). Это означает, что для двух различных вспомогательных функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$  значения соответствующих интегралов (34) равны.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Если трещина является вертикальной ( $\alpha \equiv 0$ ), имеем  $\mathbf{Q}_0 = (0, \theta g'' u_{01}, 0, 0, \theta g'' \varphi_{01})$ , и в этом случае выражение (34) становится формулой для производной по параметру возмущения вертикальной трещины, полученной ранее в [10].

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В случае если поверхность наклонной трещины моделируется плоскостью и кривые  $\Gamma_\delta$  являются прямолинейными отрезками, имеем тождества  $g'' \equiv 0$ ,  $\alpha \equiv \text{const}$ ,  $t_{,1} \equiv 0$ , и, следовательно,  $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ . В этом случае формула (34) (с учетом равенства  $\mathbf{Q}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ ) совпадает с формулой производной функционала энергии для вертикальных трещин с условием непроникания берегов (см. [10]).

**Заключение.** В работе рассмотрена задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей наклонную трещину, с краевыми условиями в виде неравенств и доказана возможность дифференцирования функционала энергии по форме трещины. Таким образом, в рамках модели с краевыми условиями, описывающими взаимное непроникание противоположных берегов наклонной трещины, найдена формула для производной функционала энергии пластины по параметру возмущения трещины, которая может быть использована при анализе процесса разрушения пластины с использованием критерия Гриффитса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985.
2. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. **Шацкий И. П., Маковийчук Н. В.** Влияние закрытия коллинеарных трещин на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 159–166.
4. **Хлуднев А. М.** Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 117–121.
5. **Хлуднев А. М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
6. **Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М.** Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
7. **Лазарев Н. П.** Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 171–181.
8. **Лазарев Н. П.** Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, вып. 2. С. 62–73.
9. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине в пластине с возможным контактом берегов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 153–168.
10. **Лазарев Н. П.** Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 98–108.
11. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.
12. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunencko. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
13. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

14. **Соколовский Я., Хлуднев А. М.** О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. АН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
15. **Hintermueller M., Kovtunen V. A.** From shape variation to topology changes in constrained minimization: a velocity method based concept // Optim. Methods Software. 2011. V. 26. P. 513–532.
16. **Kovtunen V. A.** Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. V. 71. P. 635–657.
17. **Гольдштейн Р. В.** Качественные методы в механике сплошных сред / Р. В. Гольдштейн, В. М. Ентов. М.: Наука, 1989.
18. **Шифрин Е. И.** Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
19. **Пелех Б. Л.** Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.

*Поступила в редакцию 30/VI 2014 г.,  
в окончательном варианте — 28/X 2015 г.*

---