

12. Иванов А. Г. Феноменология разрушения и откол.— В кн.: Доклад на I Всесоюз. симпоз. по макрокинетике и химической газодинамике. Тез. докл. Т. 2, ч. 2, № 549. Черноголовка, 1984; ФГВ, 1985, № 2.
13. Иванов М. А. Температурная зависимость прочности глицерина при отколе.— ПМТФ, 1981, № 1.
14. Hoggatt C. R., Recht B. F. Fracture behaviour of tubular bombs.— J. Appl. Phys., 1968, v. 39, p. 1856.
15. Al-Hassani S. T. S., Johnson W. The dynamics of the fragmentation process for spherical shells containing explosives.— Int. J. Mech. Sci., 1969, v. 11, p. 811.

Поступила 11/II 1985 г.

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАРЕНИЮ

Н. Х. АРУТЮНЯН, М. Н. МИХАЙЛОВ, В. Д. ПОТАПОВ
(Москва)

В [1, 2] рассмотрена задача об устойчивости на конечном и бесконечном промежутках времени сжатых растущих неоднородно стареющих вязкоупругих стержней. Устойчивость понималась в смысле устойчивости движения динамических систем по Четаеву и Ляпунову. Показано, что механизм роста стержня, а также характеристики роста оказывают существенное влияние на показатели деформированного состояния стержня и на значения критического времени.

Цель данной работы — исследование устойчивости сжатых растущих тонкостенных оболочек, вязкоупругий материал которых обладает свойством старения. Уравнения состояния материала описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно стареющих тел [3]. Оболочка находится под действием собственного веса и внешних нагрузок, меняющихся во времени.

1. Модель растущей оболочки. Рассмотрим тонкостенную оболочку, геометрические параметры которой вследствие наращивания материала меняются во времени. Выберем в оболочке поверхность S , которая может быть срединной поверхностью или эквидистантной ей. Положение точек оболочки будем определять координатами α_i , z ($i = 1, 2$), причем криволинейные координаты α_i отсчитываются вдоль линий главных кривизн поверхности S , а z — вдоль нормали к этой поверхности, направленной в сторону центров положительной кривизны координатной поверхности (со стороны вогнутости поверхности S , если она эллиптическая).

Предположим, что материальные точки с координатами α_i впервые зарождаются на поверхности S , после чего образуются стены оболочки. Будем считать, что в каждый момент времени оболочка ограничена краевым контуром Γ , состоящим из отдельных частей Γ_i , где $\alpha_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$). Если поверхность S — внутренняя (внешняя) поверхность оболочки, то рост ее стенки происходит в сторону внешней (внутренней) нормали. Если же поверхность S занимает промежуточное положение, то рост стенки происходит в направлении и внутренней, и внешней нормалей.

Предложенный механизм роста не исключает тот случай, когда часть толщины стенки оболочки зарождается одновременно с соответствующей частью поверхности S , а дальнейший рост происходит в сторону внешней или внутренней, или внутренней и внешней нормалей одновременно. Последний вариант наращивания толщины стенки имеет смысл, например, при усилении (реконструкции) оболочек.

2. Уравнения движения растущей вязкоупругой оболочки. Рассмотрим точку оболочки с координатами α_i , z , которая зародилась в момент времени $t = \tau^*(\rho)$, где $\rho = \{\alpha_i, z\}$. При $\tau^*(\rho)$ перемещения в точке координатной поверхности с координатами α_i равны $u_i^* = u_i(\tau^*(\rho), \rho^0)$, $w^* = w(\tau^*(\rho), \rho^0)$. Здесь $\rho^0 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, u_i — перемещение по направлению i -й координатной оси, w — дополнительный прогиб оболочки (перемещение вдоль нормали к координатной поверхности). Если $t > \tau^*(\rho)$, перемещения той же точки координатной поверхности равны $u_i = u_i(t, \rho^0)$, $w = w(t, \rho^0)$. Если материальная частица с координатами ρ в момент зарождения $\tau^*(\rho)$ ненапряженная, деформации в ней при $t \geq \tau^*(\rho)$ могут быть найдены с помощью модифицированной гипотезы Кирхгофа — Лява

$$(2.1) \quad \epsilon_{ij} = \Delta e_{ij} - z \Delta \chi_{ij},$$

где $\Delta e_{ij} = e_{ij}(t, \rho^0) - e_{ij}(\tau^*(\rho), \rho^0)$; $\Delta \chi_{ij} = \chi_{ij}(t, \rho^0) - \chi_{ij}(\tau^*(\rho), \rho^0)$.

Деформации e_{ij} , кривизны и кручение χ_{ij} координатной поверхности S определяются выражениями, известными в теории оболочек (см., например, [4]). Приращения Δe_{ij} , $\Delta \chi_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям неразрывности деформаций поверхности S , которые в случае малых прогибов оболочки имеют вид

$$(A_2 \Delta \chi_{22})_{,1} - (A_1 \Delta \chi_{12})_{,2} - A_{2,1} \Delta \chi_{11} - A_{1,2} \Delta \chi_{12} + \frac{1}{R_1} \left[2 (A_1 \Delta e_{12})_{,2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (A_2 \Delta e_{22})_{,1} + A_{2,1} \Delta e_{11} + \frac{2R_1}{R_2} A_{1,2} \Delta e_{12} \Big] = 0, \\
& (A_1 \Delta \chi_{11})_{,2} - (A_2 \Delta \chi_{12})_{,1} - A_{1,2} \Delta \chi_{22} - A_{2,1} \Delta \chi_{12} + \\
& + \frac{1}{R_2} \left[2(A_2 \Delta e_{12})_{,1} - (A_1 \Delta e_{11})_{,2} + A_{1,2} \Delta e_{22} + \frac{2R_2}{R_1} A_{2,1} \Delta e_{12} \right] = 0, \\
& \frac{\Delta \chi_{11}}{R_2} + \frac{\Delta \chi_{22}}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \frac{1}{A_1} [(A_2 \Delta e_{22})_{,1} - (A_1 \Delta e_{12})_{,2} - A_{2,1} \Delta e_{11} - A_{1,2} \Delta e_{12}] \right\} + \\
& + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \frac{1}{A_2} [(A_1 \Delta e_{11})_{,2} - (A_2 \Delta e_{12})_{,1} - A_{1,2} \Delta e_{22} - A_{2,1} \Delta e_{12}] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

где A_i , R_i — коэффициенты Ламэ и радиусы главных кривизн поверхности S ; индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате α_i .

В частности, для пологих оболочек уравнения совместности деформаций сводятся к одному уравнению ($A_1 = A_2 = 1$)

$$\begin{aligned}
\Delta e_{11,22} + \Delta e_{22,11} - 2\Delta e_{12,12} &= -\frac{1}{R_1} [w(t, \rho^0) - w(\tau^*(\rho), \rho^0)]_{,22} - \\
& - \frac{1}{R_2} [w(t, \rho^0) - w(\tau^*(\rho), \rho^0)],
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
\Delta e_{11} &= [u_1(t, \rho^0) - u_1(\tau^*(\rho), \rho^0)]_{,1} - \frac{1}{R_1} [w(t, \rho^0) - w(\tau^*(\rho), \rho^0)], \\
\Delta e_{22} &= [u_2(t, \rho^0) - u_2(\tau^*(\rho), \rho^0)]_{,2} - \frac{1}{R_2} [w(t, \rho^0) - w(\tau^*(\rho), \rho^0)], \\
2\Delta e_{12} &= [u_1(t, \rho^0) - u_1(\tau^*(\rho), \rho^0)]_{,2} + [u_2(t, \rho^0) - u_2(\tau^*(\rho), \rho^0)]_{,1}.
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия для наращиваемой оболочки такие же, как и для нерастянутой оболочки (см., например, [4]). Следует только иметь в виду, что

$$\begin{aligned}
N_{11}(t, \rho^0) &= \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \sigma_{11} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) dz, \dots, \\
M_{11}(t, \rho^0) &= \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \sigma_{11} \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) zdz, \dots,
\end{aligned}$$

где $z_+(t, \rho^0)$, $z_-(t, \rho^0)$ — координаты точек, принадлежащих внутренней и внешней поверхностям оболочки, измеряемые вдоль нормали к поверхности S .

Для тонкостенных оболочек обычно считаются справедливыми выражения

$$N_{ij}(t, \rho^0) \approx \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij}(t, \rho^0) \approx \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \sigma_{ij} zdz.$$

Соотношения между напряжениями и деформациями принимаются в виде

$$\sigma_{11} = A_{1111} \varepsilon_{11} + A_{1122} \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = A_{2211} \varepsilon_{11} + A_{2222} \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} = A_{1212} \varepsilon_{12},$$

причем [3]

$$A_{ijkl} \varepsilon_{kl} = E_{ijkl} (t - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{kl}(t, \rho) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{kl}(\tau, \rho) d\tau.$$

При нахождении усилий N_{ij} , M_{ij} необходимо вычислить интегралы вида

$$J = \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \left[E_{ijkl} (t - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{kl}(t, \rho) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{kl}(\tau, \rho) d\tau \right] dz.$$

Подставим сюда выражения (2.1) и проделаем некоторые преобразования

$$(2.2) \quad J = E_{ijkl} F(t, \rho^0) e_{kl}(t, \rho^0) - \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) e_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) dz - \\ - E_{ijkl} S(t, \rho^0) \chi_{kl}(t, \rho^0) + \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) \chi_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) z dz - \\ - \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \{e_{kl}(\tau, \rho^0) - e_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) - \\ - [\chi_{kl}(\tau, \rho^0) - \chi_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0)] z\} d\tau dz,$$

где $E_{ijkl} F(t, \rho^0) = \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) dz$; $E_{ijkl} S(t, \rho^0) = \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) z dz$.

Учитывая равенства

$$R(t, \tau) = \frac{\partial L(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad L(t, \tau) = E(\tau) - T(t, \tau)$$

($E(\tau)$ — модуль упругомгновенной деформации, $T(t, \tau)$ — мера релаксации, $T(t, t) = T(\tau, \tau) = 0$), запишем

$$\int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \int_{\tau^*(\rho^0)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) e_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) d\tau dz = \\ = \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} e_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) [E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) - L_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), 0)] dz.$$

Аналогично можно представить такой же интеграл, содержащий $\chi_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) z$. Тогда выражение (2.2) примет вид

$$(2.3) \quad J = E_{ijkl} F(t, \rho^0) e_{kl}(t, \rho^0) - E_{ijkl} S(t, \rho^0) \chi_{kl}(t, \rho^0) - \\ - \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) [e_{kl}(\tau, \rho^0) - z \chi_{kl}(\tau, \rho^0)] d\tau dz - \\ - \int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} L(t - \tau^*(\rho), 0) [e_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0) - z \chi_{kl}(\tau^*(\rho), \rho^0)] dz.$$

Нетрудно показать, что справедливо равенство [2]

$$\int_{z_-(t, \rho^0)}^{z_+(t, \rho^0)} \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) [e_{kl}(\tau, \rho^0) - z \chi_{kl}(\tau, \rho^0)] d\tau dz = \\ = \int_{\tau_1^*(\rho)}^t [\tilde{R}_{ijkl}^{(0)}(t, \tau) e_{kl}(\tau, \rho^0) - \tilde{R}_{ijkl}^{(1)}(t, \tau) \chi_{kl}(\tau, \rho^0)] d\tau,$$

где

$$\tilde{R}_{ijkl}^{(\gamma)}(t, \tau) = \int_{\tau_1^*(\rho)}^{\tau} R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) z^{\gamma}(\tau^*(\rho)) dz (\tau^*(\rho)), \quad \gamma = 0, 1;$$

$\tau_1^*(\rho^0)$ — момент зарождения материальной частицы на поверхности S с координатами α_i .

Окончательно соотношение (2.3) получим в виде

$$(2.4) \quad J = \tilde{L}_{ijkl}^{(0)}(t, t, \rho^0) e_{kl}(t, \rho^0) - \tilde{L}_{ijkl}^{(1)}(t, t, \rho^0) \chi_{kl}(t, \rho^0) - \\ - \int_{\tau_1^*(\rho^0)}^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_{ijkl}^{(0)}(t, \tau, \rho^0) e_{kl}(\tau, \rho^0) - \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_{ijkl}^{(1)}(t, \tau, \rho^0) \chi_{kl}(\tau, \rho^0) \right] d\tau,$$

где $L_{ijkl}^{(\gamma)}(t, \tau, \rho^0) = \int_{\tau_1^*(\rho^0)}^t L_{ijkl}(t - \xi, \tau - \xi) z^\gamma(\xi) dz(\xi)$, $\gamma = 0, 1$.

Используя обозначения

$$L_{ijkl}^{(\gamma)}(t, t, \rho^0) f_{kl}(t, \rho^0) - \int_{\tau_1^*(\rho^0)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}_{ijkl}^{(\gamma)}(t, \tau, \rho^0) f_{kl}(\tau, \rho^0) d\tau \equiv \tilde{L}_{ijkl}^{(\gamma)} f_{kl} \quad (\gamma = 0, 1, 2),$$

перепишем выражение (2.4)

$$J = \tilde{L}_{ijkl}^{(0)} e_{kl} - \tilde{L}_{ijkl}^{(1)} \chi_{kl}.$$

Усилия и моменты соответственно равны

$$\begin{aligned} N_{11}(t, \rho^0) &= \tilde{L}_{1111}^{(0)} e_{11} + \tilde{L}_{1122}^{(0)} e_{22} - \tilde{L}_{1111}^{(1)} \chi_{11} - \tilde{L}_{1122}^{(1)} \chi_{22}, \dots, \\ N_{12}(t, \rho^0) &= \tilde{L}_{1212}^{(0)} e_{12} - \tilde{L}_{1212}^{(1)} \chi_{12}, \\ M_{11}(t, \rho^0) &= \tilde{L}_{1111}^{(1)} e_{11} + \tilde{L}_{1122}^{(1)} e_{22} - \tilde{L}_{1111}^{(2)} \chi_{11} - \tilde{L}_{1122}^{(2)} \chi_{22}, \dots, \\ M_{12}(t, \rho^0) &= \tilde{L}_{1212}^{(1)} e_{12} - \tilde{L}_{1212}^{(2)} \chi_{12}. \end{aligned}$$

Границные условия на кромках оболочки записываются с учетом возможного изменения границ области, занимаемой поверхностью S . Решение разрешающей системы уравнений, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям на кромках оболочки, описывает ее невозмущенное движение.

3. Уравнения возмущенного движения растущей вязкоупругой оболочки. Допустим, что начальное искривление координатной поверхности, внешние нагрузки и т. п. имеют малые возмущения $\delta w^0, \delta q_i, \delta q_z$. Движение оболочки, обусловленное этими возмущениями, назовем возмущенным. Перемещения и внутренние усилия в возмущенном движении будут отличаться от тех же величин в невозмущенном движении на величины возмущений $\delta u_i, \delta w, \delta N_{ij}, \delta M_{ij}, \delta Q_i$.

Уравнения равновесия и совместности деформаций в координатной поверхности в возмущенном движении имеют тот же вид, что и в невозмущенном, если в них вместо $N_{ij}, M_{ij}, Q_i, \Delta e_{ij}, \Delta \chi_{ij}$ подставить значения $N_{ij} + \delta N_{ij}, M_{ij} + \delta M_{ij}, Q_i + \delta Q_i, \Delta e_{ij} + \delta \Delta e_{ij}, \Delta \chi_{ij} + \delta \Delta \chi_{ij}$. Вычитая из них уравнения, отвечающие невозмущенному движению, получим уравнения для возмущенного движения, записанные в возмущениях. Построенная таким образом система уравнений позволяет провести исследование устойчивости невозмущенного движения растущей оболочки по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Далее будем считать, что габариты оболочки с увеличением времени стремятся к предельным. Относительно модулей упругости $E_{ijkl}(t)$ и ядер релаксации $R_{ijkl}(t, \tau)$ предположим, что они удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{ijkl}(t) = E_{ijkl}^0 = \text{const}, \lim_{\substack{t > \tau \\ \tau \rightarrow \infty}} R_{ijkl}(\tau, \tau) = R_{ijkl}(t - \tau), \\ 0 \leq \int_0^\infty R_{ijkl}(\tau) d\tau < E_{ijkl}^0.$$

Если внешние нагрузки достаточно малы и во времени также стремятся к предельным значениям, то можно показать, что перемещения оболочки в невозмущенном движении $u_i(t, \rho^0), w(t, \rho^0)$, усилия $M_{ij}(t, \rho^0), N_{ij}(t, \rho^0)$ стремятся к постоянным во времени величинам $u_i(\rho^0), w(\rho^0), M_{ij}(\rho^0), N_{ij}(\rho^0)$.

Для исследования устойчивости оболочки на бесконечном промежутке времени воспользуемся линеаризованными уравнениями возмущенного движения. При решении задачи в перемещениях эти уравнения в операторной форме можно записать в виде

$$A\delta u = \delta f, \quad \delta u = \{\delta u_i, \delta w\},$$

где A — оператор линеаризованной задачи; δf — вектор, зависящий от исходных возмущений $\delta w^0, \delta q_i, \dots$

Оболочка будет устойчивой на бесконечном промежутке времени (устойчивой по Ляпунову), если параметр внешней нагрузки не превосходит значения, соответствующего условию вырождения оператора A^0 , являющегося предельным для оператора A . Оператор A^0 формируется, как и для упругой задачи, путем замены перемещений невозмущенного движения их предельными величинами $u_i(\rho^0), w(\rho^0)$, а мгновенных упругих модулей E_{ijkl}^0 длительными модулями

$$E_{ijkl}^{\text{дл}} = E_{ijkl}^0 - \int_0^\infty R_{ijkl}(\tau) d\tau.$$

Принципиальное значение в оценке поведения растущих вязкоупругих оболочек из-за их повышенной чувствительности к всевозможным несовершенствам и в особенности к начальным искривлениям срединной поверхности приобретает исследование устойчивости невозмущенного движения на конечном промежутке времени. Здесь возможны различные постановки задачи. Рассмотрим две из них.

1. Пусть задан конечный интервал времени $[0, T]$. Требуется найти критические значения параметров, определяющих рост оболочки (например, значения скоростей роста, закон изменения нагрузки во времени и т. п.), при которых максимальное значение искомых возмущений (например, δw) не превышает наперед заданного значения Δ

$$\sup_{\rho^0} |\delta w(t, \rho^0)| < \Delta, t \in [0, T].$$

2. Известна величина предельно допустимых значений возмущений перемещений Δ . Требуется найти момент времени t_k , называемый критическим временем, когда максимальная величина возмущений перемещений оболочки впервые становится равной Δ .

4. Вариационная постановка задачи. В некоторых случаях исследование напряженно-деформированного состояния растущих вязкоупругих оболочек целесообразно производить на основе вариационных принципов. Введем функционал Лагранжа [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_{V(t)} \left[\frac{1}{2} E_{ijkl}(t - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{ij}(t, \rho) \varepsilon_{kl}(t, \rho) - \right. \\ \left. - \varepsilon_{ij}(t, \rho) \int_{\tau^*(\rho)}^t R_{ijkl}(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \varepsilon_{kl}(\tau, \rho) d\tau \right] dV - \Pi, \end{aligned}$$

где Π — потенциал внешних нагрузок;

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{S(t)} (q_i u_i + q_3 w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\Gamma_1(t)} (N_{1i}^* u_i + Q_1^* w + M_{11}^* \omega_1) A_2 d\alpha_2 + \\ + \int_{\Gamma_2(t)} (N_{2i}^* u_i + Q_2^* w + M_{22}^* \omega_2) A_1 d\alpha_1; \end{aligned}$$

$N_{ij}^*, Q_i^*, M_{ij}^*$ — внешние усилия, приложенные к контуру Γ_i ; ω_i — углы поворота нормали к поверхности S на контуре Γ_i .

Условие стационарности функционала — равенство нулю его первой вариации по перемещениям в текущий момент времени

$$(4.1) \quad \delta \mathcal{E} = 0.$$

Представляя искомые перемещения в виде разложений по полной системе функций, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям, из уравнения (4.1) получим систему разрешающих уравнений относительно коэффициентов разложений, являющихся функциями времени.

При исследовании устойчивости невозмущенного движения оболочки, находящейся под действием консервативных нагрузок, формируется функционал \mathcal{E}^* , который находится из функционала \mathcal{E} путем подстановки в него вместо перемещений u_i, w , соответствующих невозмущенному движению, перемещений $u_i + \delta u_i, w + \delta w$. Внешние возмущения учитываются введением вместо функций $w^0, q_i, q_3, Q_i^*, \dots$ выражений $w^0 + \delta w^0, q_i + \delta q_i, q_3 + \delta q_3, Q_i^* + \delta Q_i^*, \dots$ В результате функционал \mathcal{E}^* можно представить в виде

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} + \delta \mathcal{E} + \delta^2 \mathcal{E} + \dots,$$

где $\delta\mathcal{E}$, $\delta^2\mathcal{E}$ — слагаемые, содержащие соответственно первые степени и произведения возмущений δu_i , δw , ...

Учитывая равенство (4.1), запишем

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} + \delta^2\mathcal{E} + \dots$$

Условие стационарности функционала \mathcal{E}^* — по-прежнему равенство нулю его первой вариации

$$\delta\mathcal{E}^* = 0,$$

причем слагаемое \mathcal{E} , отвечающее невозмущенному движению, не варьируется. Тогда (4.2)

$$\delta(\delta^2\mathcal{E} + \dots) = 0.$$

Из равенства (4.2) можно получить уравнения и граничные условия краевой задачи, отвечающей возмущенному движению оболочки в возмущениях.

5. Растущая цилиндрическая оболочка. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, рост которой происходит в направлении образующей, а также допускается наращивание материала симметрично относительно срединной поверхности. Оболочка находится под действием собственного веса и осевой сжимающей нагрузки $P(t)$, равномерно распределенной вдоль свободной кромки. Оболочка имеет внешнее постоянное действующее возмущение в виде начального осесимметричного искривления срединной поверхности, которое задается в виде

$$w^0(x_1) = \delta w^0(x_1) = -c + \left(c + \lambda cx_1 + \sum_{i=2}^n a_i x_1^i \right) \exp(-\lambda x_1),$$

где c , a_i , λ — константы.

Координата x_1 отсчитывается вдоль образующей срединной поверхности, начиная координат рас положено на нижнем конце оболочки.

Деформации при осесимметричном деформировании оболочки в случае малых прогибов определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t, \rho) &= u_{1,1}(t, x_1) - u_{1,1}(\tau^*(\rho), x_1) - [w_{,11}(t, x_1) - w_{,11}(\tau^*(\rho), x_1)]z, \\ \varepsilon_{22}(t, \rho) &= -\frac{1}{R} [w(t, x_1) - w(\tau^*(\rho), x_1)], \end{aligned}$$

где $\tau^*(\rho)$ — момент зарождения материальной частицы оболочки с координатами x_1 , z .

Материал оболочки изотропный, вязкоупругий, неоднородно стареющий, с постоянным во времени коэффициентом Пуассона μ . В этом случае

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1-\mu^2} E (\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{1}{1-\mu^2} E (\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}),$$

$$\text{где } E\psi = E(t - \tau^*(\rho)) \Psi(t, x_1) - \int_{\tau^*(\rho)}^t R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho)) \Psi(\tau, x_1) d\tau.$$

Пример 1. Рассмотрим оболочку постоянной длины l . В начальный момент времени ($t_0 = 0$) толщина оболочки постоянна и равна h_0 . В последующем наращивание материала происходит симметрично относительно срединной поверхности так, что толщина остается постоянной во всех точках и равной $h(t)$. Материал оболочки считается вязкоупругим, не стареющим, для которого справедливы выражения

$$E(t) = E = \text{const}, \quad R(t, \tau) = \gamma c \exp(-\gamma(t - \tau)).$$

Оболочка сжата осевой нагрузкой $P(t)$. Кромки имеют шарнирное опирание, обеспечивающее при сжатии идеальной оболочки безмоментное напряженное состояние.

Допустим, что срединная поверхность оболочки обладает малым осесимметричным искривлением $w^0(x_1) = f^0[\sin(m\pi/l)]x_1$. Уравнение относительно дополнительного прогиба $w(t, x_1)$ записывается следующим образом:

$$(5.1) \quad D(t) \frac{\partial^4 w(t, x_1)}{\partial x_1^4} - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} L^{(2)}(t, \tau) \frac{\partial^4 w(\tau, x_1)}{\partial x_1^4} d\tau + \frac{Eh(t)}{R^2} w(t, x_1) -$$

$$- \frac{1}{R^2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} L^{(0)}(t, \tau) w(\tau, x_1) d\tau + P(t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [w(t, x_1) + w^0(x_1)] = 0,$$

$$\text{где } L^{(2)}(t, \tau) = \frac{h^3(\tau)}{12(1-\mu^2)} \omega(t, \tau); \quad L^{(0)}(t, \tau) = h(\tau) \omega(t, \tau);$$

$$\omega(t, \tau) = E - C[1 - \exp(-\gamma(t - \tau))]; D(t) = \frac{Eh^3(t)}{12(1 - \mu^2)}.$$

Ищем прогиб $w(t, x_1)$ в виде

$$(5.2) \quad w(t, x_1) = f(t)[\sin(m\pi/l)]x_1.$$

Тогда из уравнения (5.1) имеем

$$(5.3) [1 - \alpha(t)]f(t) - \frac{1}{N(t)} \int_0^t \left[\frac{m^2\pi^2}{l^2} \frac{\partial L^{(2)}(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{l^2}{m^2\pi^2} \frac{\partial L^{(0)}(t, \tau)}{\partial \tau} \right] f(\tau) d\tau = \alpha(t)f^0.$$

$$\text{Здесь } N(t) = \frac{m^2\pi^2}{l^2} D(t) + \frac{Eh(t)}{m^2\pi^2 R^2}; \alpha(t) = \frac{P(t)}{N(t)}.$$

Движение оболочки, соответствующее безмоментному напряженному состоянию, назовем невозмущенным. Уравнение (5.3) описывает изменение амплитуды прогиба оболочки в возмущенном движении.

Предположим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_\infty$. Из уравнения (5.3) видно, что невозмущенное движение оболочки устойчиво на бесконечности по отношению к возмущению f^0 , если соблюдаются условия [6]

$$\alpha(t) < 1 \quad \forall t \geq 0, \alpha_{\text{дл}} < 1,$$

причем

$$\alpha_{\text{дл}} = P_\infty/N_{\text{дл}}, \quad N_{\text{дл}} = \frac{m^2\pi^2}{l^2} D_{\text{дл}} + \frac{E_{\text{дл}} h_\infty l^2}{m^2\pi^2 R^2},$$

$$E_{\text{дл}} = E - C, \quad D_{\text{дл}} = \frac{E_{\text{дл}} h_\infty^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Далее рассмотрим упругую оболочку ($C = 0$). Уравнение (5.1) в этом случае запишем так:

$$(5.4) \quad D(t) \frac{\partial^4 w(t, x_1)}{\partial x_1^4} - \frac{E}{4(1 - \mu^2)} \int_0^t h''(\tau) \dot{h}(\tau) \frac{\partial^4 w(\tau, x_1)}{\partial x_1^4} d\tau + \frac{Eh(t)}{R^2} w(t, x_1) -$$

$$- \frac{E}{R^2} \int_0^t \dot{h}(\tau) w(\tau, x_1) d\tau + P(t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [w(t, x_1) + w^\circ(x_1)] = 0$$

(точкой обозначена производная по времени τ). Как видно, уравнение (5.4) принципиально отличается от аналогичного уравнения для нерастущей упругой оболочки.

Используя уравнение (5.2), из уравнения (5.4) находим

$$(5.5) \quad f(t) + f^0 = \frac{f^0}{1 - \alpha(0)} \exp \left[\int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{1 - \alpha(\tau)} \frac{P(\tau)}{P(\tau)} d\tau \right].$$

Допустим, что сжимающая сила меняется во времени по закону

$$P(t) = \kappa h^n(t).$$

Тогда, например, для пластины ($R \rightarrow \infty$) в момент времени t , соответствующий достижению ее толщиной значения $h(t) = \sqrt{2}h_0$, из уравнения (5.5) имеем ($\xi = (f(t) + f^0)/f^0$)

$$\text{при } n = 1 \quad \xi = \sqrt{\frac{1 - \alpha(t)}{(1 - \alpha(0))^3}}, \quad \alpha(t) = \frac{\alpha(0)}{2},$$

$$\text{при } n = 3 \quad \xi = \frac{1}{1 - \alpha(0)} 2^{\frac{3\alpha(t)}{2(1 - \alpha(t))}}, \quad \alpha(t) = \alpha(0).$$

На рис. 1 показано изменение величины ξ в зависимости от $\alpha(0)$ для растущей (сплошные) и нерастущей (штриховые кривые) пластин. В последнем случае величина ξ определяется выражением

$$\xi = 1/(1 - \alpha(t)).$$

На рис. 2 представлена зависимость величины ξ от отношения $\eta = h^2(t)/h^2(0)$ при $n = 1$ для растущей пластины (кривая I) в случае $\alpha(0) = 0,5$. Для сравнения по-

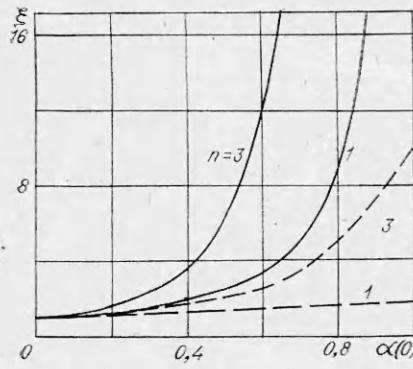


Рис. 1.

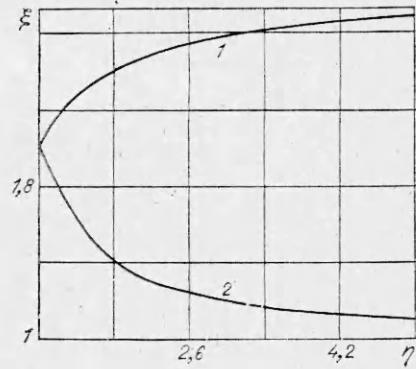


Рис. 2.

казана зависимость ξ от η для нерастущей пластины при том же начальном значении $\alpha(0)$ (кривая 2).

Анализ результатов, приведенных на рис. 1, 2, свидетельствует о том, что даже в упругой растущей пластине при неизменных во времени упругих постоянных прогиб в некоторых случаях может оказаться значительно больше по сравнению с прогибом в нерастущей пластине. Аналогичные результаты справедливы и для оболочек. Еще более существенно проявляется влияние роста, когда материал обладает вязкоупругими свойствами.

Пример 2. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, нижний конец которой жестко заделан, а верхний край свободен. Для решения задачи, связанной с анализом осесимметричного деформированного состояния оболочки, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Уравнение (4.1) в этом случае принимает вид

$$(5.6) \quad \frac{1}{1-\mu^2} \int_0^{l(t)} \left\{ \tilde{L}^{(2)}(t, t, x_1) w_{,11}(t, x_1) - \right. \\ \left. - \int_{\tau_1^*(x_1)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}^{(2)}(t, \tau, x_1) w_{,11}(\tau, x_1) d\tau \right\} \delta w_{,11}(t, x_1) + \\ + \frac{1}{R^2} \left[\tilde{L}^{(0)}(t, t, x_1) w(t, x_1) - \int_{\tau_1^*(x_1)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}^{(0)}(t, \tau, x_1) w(\tau, x_1) d\tau \right] \delta w(t, x_1) - \\ - \frac{\mu}{R} \left[\tilde{L}^{(0)}(t, t, x_1) u_{1,1}(t, x_1) - \int_{\tau_1^*(x_1)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}^{(0)}(t, \tau, x_1) u_{1,1}(\tau, x_1) d\tau \right] \delta w(t, x_1) \Big| dx_1 - \\ - \int_0^{l(t)} \left\{ P(t) + \int_{x_1}^{l(t)} ph(t, x_1) dx_1 \right\} [w_{,1}(t, x_1) + w_{,1}^0(x_1)] \delta w_{,1}(t, x_1) dx_1 = 0, \\ \frac{1}{1-\mu^2} \int_0^{l(t)} \left\{ \tilde{L}^{(0)}(t, t, x_1) u_{1,1}(t, x_1) - \int_{\tau_1^*(x_1)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}^{(0)}(t, \tau, x_1) u_{1,1}(\tau, x_1) d\tau \right\} \delta u_{1,1}(t, x_1) - \\ - \frac{\mu}{R} \left[\tilde{L}^{(0)}(t, t, x_1) w(t, x_1) - \int_{\tau_1^*(x_1)}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}^{(0)}(t, \tau, x_1) w(\tau, x_1) d\tau \right] \delta u_{1,1}(t, x_1) \Big| dx_1 + \\ + \int_0^{l(t)} ph(t, x_1) \delta u_{1,1}(t, x_1) dx_1 + P(t) \delta u_{1,1}(t, x_1) \Big|_{x_1=l(t)} = 0.$$

Здесь $l(t)$ — длина оболочки в момент времени t ; p — объемный вес материала оболочки.

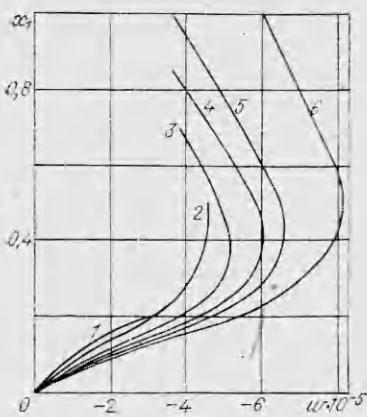


Рис. 3.

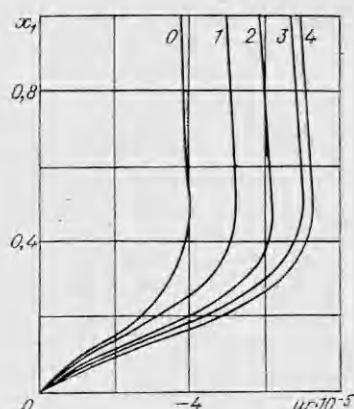


Рис. 4.

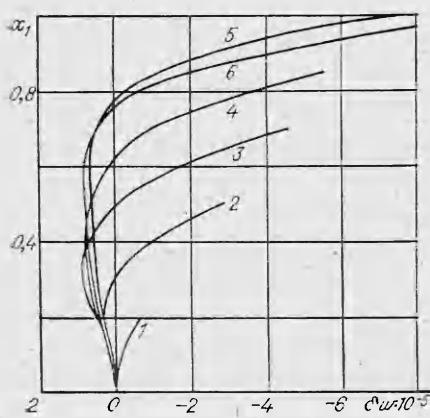


Рис. 5.

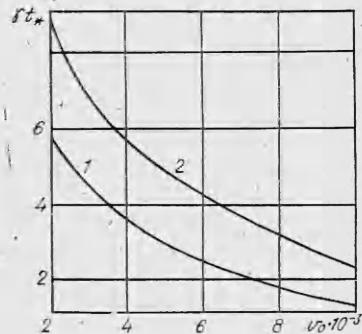


Рис. 6.

Прогиб оболочки w и осевое перемещение u_1 ищутся в виде сумм

$$w(t, x_1) = \sum_{i=2}^m a_i(t) x_1^i, \quad u_1(t, x_1) = \sum_{j=1}^k b_j(t) x_1^j.$$

Определение коэффициентов $a_i(t)$, $b_j(t)$ производится с помощью уравнений (5.6), в которых интегралы по длине вычисляются по квадратурной формуле Симпсона, а решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $a_i(t)$, $b_j(t)$ находится численно по методу Крылова — Боголюбова [7].

Далее рассмотрим оболочку, рост которой происходит только в направлении образующей (толщина стенки h постоянна во времени и по длине). Наращение материала идет с постоянной скоростью v_0 на отрезке $[0, T]$, после чего длина оболочки l_0 остается неизменной. Будем считать, что оболочка находится только под действием равномерно распределенной осевой нагрузки $P(t) = P_0 = \text{const}$, приложенной на свободной кромке.

Предположим, что

$$R(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \omega(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \}, \quad E(t) = E_0 = \text{const},$$

где $\omega(\tau)$ — функция, характеризующая степень старения материала оболочки. Примем эту функцию в виде

$$\omega(\tau) = C_0 + A_0 e^{-\beta \tau},$$

где C_0 , A_0 , β , γ — константы.

На рис. 3—6 представлены результаты расчетов для оболочки со следующими характеристиками: $R/l_0 = 1$, $h/l_0 = 0,04$, $C_0/E_0 = 0,075$, $A_0/E_0 = 0,75$, $P_0/E_0 h = 2,5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 0,02$ 1/сут, $\beta = 0,025$ 1/сут.

На рис. 3 показано положение образующих срединной поверхности оболочки в невозмущенном движении ($w^0 = 0$) в моменты времени $\gamma t = 0,4; 1; 1,4; 1,7; 2; 3,3$ (кривые 1—6).

Скорость роста оболочки равна $v_0 = 0,01$ 1/сут, $T = 100$ сут. Отрицательным значениям прогиба соответствует перемещение точек срединной поверхности в сторону внешней нормали. Для сравнения на рис. 4 приведено положение образующих нерастущей оболочки (с длиной l_0), нагруженной той же нагрузкой P_0 (кривые 0—4 соответствуют $\gamma t = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,4$). Сопоставление рис. 3 и 4 свидетельствует о том, что рост оболочки оказывает существенное влияние не только на величину прогиба w , но и на характер изменения его по длине.

На рис. 5 дано изменение возмущений прогиба δw по длине оболочки в различные моменты времени по мере ее роста. В качестве внешнего возмущения принято осесимметричное искривление срединной поверхности оболочки вида $w^0(x_1) = 0,01x^2$. Кривые 1—6 построены для $\gamma t = 0,4; 1; 1,4; 1,7; 2; 3,3$. Обращает на себя внимание характер изменения возмущений прогиба во времени и по длине оболочки.

Кривые, иллюстрирующие зависимость безразмерного критического времени γt_* от скорости роста оболочки для двух предельных значений возмущений прогиба оболочки $\Delta_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ (кривая 1) и $\Delta_2 = 8 \cdot 10^{-5}$ (кривая 2), показаны на рис. 6 и свидетельствуют о значительном влиянии скорости роста оболочки на величину γt_* , а следовательно, и на устойчивость оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Потапов В. Д. Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 4.
2. Арутюнян Н. Х., Михайлов М. Н., Потапов В. Д. Об устойчивости растущего вязкоупругого армированного стержня, подверженного старению.— ПМТФ, 1984, № 5.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
6. Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д. Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962.

Поступила 17/I 1985 г.

УДК 539.4.015

РАЗВИТИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В КРИСТАЛЛЕ ПРИ АНТИПЛОСКОМ СДВИГЕ

Д. Н. КАРПИНСКИЙ, С. В. САННИКОВ

(Ростов-на-Дону)

У вершины трещины в кристалле под действием внешней нагрузки возникает концентрация напряжения, которое релаксирует путем пластической деформации [1]. Область, охваченная пластической деформацией, называется пластической зоной. Ее форма и распределение деформации в ней определяются распределением напряжений и свойствами кристалла.

Исходя из опытных данных, обычно выделяют две основные части пластической зоны: собственно пластическую зону, которая занимает большую часть пластической области у вершины трещины, и небольшую зону, расположенную непосредственно перед вершиной, которую в зарубежной литературе (см., например, [2]) называют зоной процесса разрушения, а в [3] предложено название — зона неустойчивостей. Деформации в этой зоне обычно заметно превышают величину деформации в остальной части пластической зоны. Основную роль в зоне неустойчивостей играет ротационная пластическая мода деформирования, сопровождаемая зарождением и ростом микротрещин [4—6].

В некоторых случаях наблюдается у самой вершины трещины в кристалле отсутствие пластической деформации (зона, свободная от дислокаций) (см., например, [7, 8]).

Расчеты формы пластической зоны и распределения деформации в ней при различных видах напряженного состояния проводились в [9—12]. При этом использовалось механическое уравнение состояния, связывающее локальную пластическую деформацию ε и напряжение σ в той же точке.

Такой подход позволяет объяснить ряд особенностей пластической зоны, но не учитывает развитие пластической деформации во времени и ее нелокальный характер (напряжение в данном элементе объема $dV(r)$ зависит не только от деформации в точке r , но и от распределения деформации в соседних участках кристалла). В [13] исследована временная эволюция пластической зоны при постоянном напряжении, но не