

УДК 532.59:539.3

## КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА, ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ, ПРИ НАЛИЧИИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Решена линейная плоская задача о колебаниях эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины при наличии ледяного покрова конечной длины. Ледяной покров моделируется упругой пластиной постоянной толщины. Определены действующие на тело гидродинамические нагрузки, зависящие от частоты колебаний, положения цилиндра и пластины.

**Ключевые слова:** поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, колебания погруженного цилиндра, резонансные частоты, присоединенные массы, коэффициенты демпфирования, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20150619

Линейная задача о колебаниях тела, погруженного в жидкость, под свободной поверхностью исследована достаточно хорошо. В [1] содержится обзор существующих методов решения этой задачи. В последние годы проводятся исследования влияния плавающей упругой пластины на гидродинамические нагрузки, действующие на тело, совершающее колебания в жидкости [2–8]. Результаты решения этой задачи могут быть использованы при изучении влияния ледяного покрова или больших плавающих платформ на погруженное тело. В [2] изучена двумерная задача о колебаниях цилиндра в стратифицированной жидкости под бесконечным ледяным покровом. В [3–6] исследована трехмерная задача о колебаниях сферы в однородной и двухслойной жидкостях под бесконечным ледяным покровом. В [7, 8] представлены решения задач о колебаниях погруженного в жидкость цилиндра при наличии полубесконечного покрова с различными свойствами (твердая крышка, упругая пластина). В [7] применяются методы мультиполей и собственных функций. В [8] используются методы интегральных уравнений, граничных элементов, функция Грина построена с помощью разложения по собственным функциям в частичных областях и интегральной склейки.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о колебаниях эллиптического цилиндра при наличии ледяного покрова конечной длины. Функция Грина строится методом Винера — Хопфа [9].

**1. Постановка задачи.** Поверхность идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H_0$  частично закрыта тонкой упругой плавающей пластиной в виде полосы, имеющей толщину  $h$ , ширину  $L_0$  и бесконечную длину. Вводится декартова система координат

нат  $Oxy$  с центром в точке  $O$  на левой кромке пластины, осью  $Ox$ , направленной вдоль пластины, и осью  $Oy$ , направленной вертикально вверх. Жидкость полагается идеальной несжимаемой, а ее течение — безвихревым. Погруженный в жидкость эллиптический цилиндр, расположенный горизонтально, совершает периодические по времени колебания по трем степеням свободы: горизонтальные и вертикальные смещения и крутильные колебания  $\zeta_j e^{-i\omega t}$  относительно центра эллипса ( $\zeta_j$  — амплитуда колебаний).

Потенциал скоростей жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-H_0 < y < 0)$$

и граничным условиям, снесенным на невозмущенную поверхность воды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad (y = -H_0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = w_t \quad (y = 0), \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \quad (y = 0, \quad 0 < x < L_0), \quad p = -\rho(\varphi_t + gw), \\ p = 0 \quad (y = 0, \quad x < 0, \quad x > L_0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n, \quad (x, y) \in S, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (y = 0, \quad x = 0, L_0). \end{aligned}$$

Здесь  $w(x, t)$  — вертикальное смещение верхней границы (прогиб пластины или возвышение жидкости);  $\rho, \rho_1$  — плотности жидкости и пластины;  $p$  — давление жидкости;  $S$  — поверхность тела;  $V_n$  — нормальная скорость колебаний тела;  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к нему.

В дальнем поле ставится условие излучения, все волны являются уходящими от тела. Кроме того, задается условие ограниченности энергии.

Введем характерную длину  $l = g/\omega^2$  и следующие безразмерные переменные и параметры:

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad t' = \omega t, \quad H = \frac{H_0}{l}, \quad L = \frac{L_0}{l}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g l^4}, \quad \delta = \frac{\rho_1 h}{\rho l}.$$

Далее штрихи будем опускать. В силу линейности задачи потенциал скоростей жидкости и прогиб пластины можно искать в виде суперпозиции

$$\varphi(x, y, t) = -i\omega e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \zeta_j \varphi_j(x, y), \quad w(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \zeta_j w_j(x).$$

Потенциалы  $\varphi_j$  удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0 \quad (-H < y < 0)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} = 0 \quad (y = -H); \tag{1.1}$$

$$\Omega_1(\varphi_j) \equiv \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} - \varphi_j = 0 \quad (y = 0, \quad x < 0, \quad x > L); \tag{1.2}$$

$$\Omega_2(\varphi_j) \equiv \left( \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta \right) \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} - \varphi_j = 0 \quad (y = 0, \quad 0 < x < L); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial x^3 \partial y} = 0 \quad (y = 0, \quad x = 0, L); \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = n_j, \quad (x, y) \in S; \quad (1.5)$$

$$n_1 = \cos(n, x), \quad n_2 = \cos(n, y), \quad n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2.$$

В безразмерных координатах дисперсионное соотношение для поверхностных волн имеет вид

$$K_1(k) = k \operatorname{th}(kH) - 1 = 0,$$

где  $k$  — волновое число. Это соотношение имеет два действительных корня  $\pm \gamma_0$  и счетное множество чисто мнимых корней  $\pm \gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), расположенных симметрично относительно действительной оси, при  $n \rightarrow \infty$  имеет место асимптотика

$$\gamma_n = i \left( \frac{n\pi}{H} - \frac{1}{n\pi} + O(n^{-3}) \right).$$

Дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн

$$K_2(\alpha) = (\beta\alpha^4 + 1 - \delta)\alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$$

имеет два действительных корня  $\pm \alpha_0$ , счетное множество чисто мнимых корней  $\pm \alpha_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей. Обозначим через  $\alpha_{-1}$  корень, принадлежащий первому квадранту, через  $\alpha_{-2}$  — корень, принадлежащий второму квадранту. При  $n \rightarrow \infty$   $\alpha_n = in\pi/H + O(n^{-5})$ .

С помощью потенциала простого слоя поставленную задачу можно свести к решению интегрального уравнения. Введем функцию Грина  $G(x, y; \xi, \eta)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G = 2\pi\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$$

и всем краевым условиям, за исключением условия непротекания на цилиндре. Потенциалы  $\varphi_j$  будем искать в виде

$$\varphi_j(x, y) = \int_S \sigma_j(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi,$$

где  $\sigma_j(\xi, \eta)$  — неизвестное распределение массовых источников на контуре цилиндра. Из условия непротекания (1.5) получаем интегральное уравнение

$$\int_S \sigma_j(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial n} dS - \pi \sigma_j(x, y) = n_j, \quad (1.6)$$

решив которое находим все необходимые величины. Возвышение свободной поверхности или упругой пластины находится из соотношения

$$w_j(x) = \int_S \sigma_j(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} dS.$$

**2. Функция Грина.** При решении задачи используются два способа представления функции Грина. При использовании первого способа функцию Грина представим в виде

$$G(x, y; \xi, \eta) = G_0(x, y; \xi, \eta) + G_1(x, y; \xi, \eta), \quad (2.1)$$

где  $G_0$  — функция Грина для жидкости со свободной поверхностью и условием непротекания на дне;  $G_1(x, y; \xi, \eta)$  — добавочная функция, обеспечивающая выполнение условий (1.3), (1.4) на пластине. Такой способ представления целесообразно использовать в случае

близко расположенных точек  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ , так как при этом явно выделяется логарифмическая особенность. Однако реализация этого способа требует значительных затрат. Если точки расположены достаточно далеко друг от друга, удобнее использовать представление функции Грина в виде ряда. Для обоих способов построения функции Грина применяется метод Винера — Хопфа, аналогично тому как это сделано в [10]. Сначала изложим второй способ. Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\Delta G = 2\pi\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$$

и всем краевым условиям, за исключением условия непротекания на цилиндре. Введем преобразование Фурье и новые искомые функции:

$$\begin{aligned} \Psi_+(\alpha, y) &= \int_L^\infty e^{i\alpha(x-L)} G(x, y) dx, & \Psi_-(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} G(x, y) dx, \\ \Psi_1(\alpha, y) &= \int_0^L e^{i\alpha x} G(x, y) dx, & \Psi(\alpha, y) &= \Psi_-(\alpha, y) + \Psi_1(\alpha, y) + e^{i\alpha L} \Psi_+(\alpha, y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функция  $\Psi(\alpha, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \alpha^2 \Psi = 2\pi e^{i\alpha\xi} \delta(y - \eta),$$

решение которого с условием (1.1) на дне имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, y) &= C(\alpha)Y(\alpha, y) + \frac{2\pi}{\alpha} e^{i\alpha\xi} \begin{cases} \text{sh}(\alpha(y+H)) \text{ch}(\alpha(\eta+H)), & y > \eta, \\ \text{ch}(\alpha(y+H)) \text{sh}(\alpha(\eta+H)), & y < \eta, \end{cases} \\ Y(\alpha, y) &= \text{ch}(\alpha(y+H))/\text{ch}(\alpha H). \end{aligned}$$

Функция  $\Psi_+(\alpha, y)$  является аналитической в верхней полуплоскости  $\text{Im } \alpha > -|\gamma_1|$ , за исключением полюса  $\alpha = -\gamma_0$ , а функция  $\Psi_-(\alpha, y)$  — в нижней полуплоскости  $\text{Im } \alpha < |\gamma_1|$ , за исключением полюса  $\alpha = \gamma_0$  [10]. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости.

Обозначим через  $D_\pm(\alpha)$ ,  $D_1(\alpha)$  интегралы типа (2.2), в которых функция  $G$  заменяется на  $\Omega_1(G)$ , а через  $F_\pm(\alpha)$ ,  $F_1(\alpha)$  — аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции выбирается  $\Omega_2(G)$ . Введем функции  $D(\alpha)$  и  $F(\alpha)$ :

$$D(\alpha) = D_-(\alpha) + D_1(\alpha) + e^{i\alpha L} D_+(\alpha), \quad F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_1(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha),$$

представляющие собой образы Фурье в смысле обобщенных функций. Для этих функций выполняются соотношения

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{\alpha} e^{i\alpha\xi} [\alpha \text{ch}(\alpha H) - \text{sh}(\alpha H)] \text{ch}(\alpha(\eta+H)) + C(\alpha)K_1(\alpha); \quad (2.3)$$

$$F(\alpha) = \frac{2\pi}{\alpha} e^{i\alpha\xi} [(\beta\alpha^4 + 1 - \delta)\alpha \text{ch}(\alpha H) - \text{sh}(\alpha H)] \text{ch}(\alpha(\eta+H)) + C(\alpha)K_2(\alpha). \quad (2.4)$$

Из краевых условий (1.2), (1.3) следует

$$D_-(\alpha) = D_+(\alpha) = 0, \quad D_1(\alpha) = D(\alpha), \quad F_1(\alpha) = 0.$$

Исключая  $C(\alpha)$  из (2.3) и подставляя в (2.4), после некоторых преобразований получаем уравнение

$$F_-(\alpha) + e^{i\alpha L} F_+(\alpha) = 2\pi e^{i\alpha\xi} \frac{\delta - \beta\alpha^4}{K_1(\alpha)} Y(\alpha, \eta) + D_1(\alpha)K(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)}. \quad (2.5)$$

Факторизуем функцию  $K(\alpha)$  [9]:  $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ , где

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{(1 \pm \alpha/\alpha_0)(1 \pm \alpha/\alpha_{-1})(1 \pm \alpha/\alpha_{-2})}{1 \pm \alpha/\gamma_0} \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{1 \pm \alpha/\alpha_n}{1 \pm \alpha/\gamma_n} \right) \right].$$

Для улучшения сходимости ряда применяется способ, предложенный в [11]. Используя асимптотику корней, представим ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \left( \frac{1 + \alpha/\alpha_n}{1 + \alpha/\gamma_n} \right) + \frac{\alpha H^2}{i(n\pi)^3} + \frac{\alpha^2 H^3}{(n\pi)^4} \right] - \frac{\alpha H^2}{i\pi^3} \zeta(3) - \frac{\alpha^2 H^3}{\pi^4} \zeta(4),$$

где  $\zeta$  — дзета-функция Римана. При таком представлении ряда его члены имеют порядок  $O(n^{-5})$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом  $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$ .

Функции  $K_{\pm}(\alpha)$  должны быть регулярны в тех же областях, что и функции  $\Psi_{\pm}(\alpha)$ . Поскольку функции  $K_{\pm}(\alpha)$  имеют нули и полюсы в точках  $\mp\alpha_0, \mp\gamma_0$ , будем рассматривать области аналитичности  $\Pi_+$  и  $\Pi_-$  ( $\Pi_+$  — полуплоскость  $\text{Im } \alpha > -|\gamma_1|$  с разрезами, исключаяющими точки  $-\alpha_0$  и  $-\gamma_0$ ;  $\Pi_-$  — полуплоскость  $\text{Im } \alpha < |\gamma_1|$  с разрезами, исключаяющими точки  $\alpha_0$  и  $\gamma_0$ ).

Умножим уравнение (2.5) на  $e^{-i\alpha L}[K_-(\alpha)]^{-1}$  и преобразуем его к виду

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + U_+(\alpha) - M_+(\alpha) = D_1(\alpha)K_-(\alpha)e^{-i\alpha L} + M_-(\alpha) - U_-(\alpha). \quad (2.6)$$

Функции  $U_{\pm}(\alpha), M_{\pm}(\alpha)$  определяются выражениями [9]

$$U_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)},$$

$$M_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta(\xi-L)}(\delta - \beta\zeta^4)Y(\zeta, \eta) d\zeta}{K_1(\zeta)K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad \sigma < |\gamma_1|.$$

Разделим обе части уравнения (2.5) на  $K_-(\alpha)$  и преобразуем его к виду

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + V_-(\alpha) - N_-(\alpha) = D_1(\alpha)K_+(\alpha) - V_+(\alpha) + N_+(\alpha); \quad (2.7)$$

$$V_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} F_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)}, \quad N_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{1}{i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{e^{i\zeta\xi}(\delta - \beta\zeta^4)Y(\zeta, \eta) d\zeta}{K_1(\zeta)K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)}.$$

В левой части уравнения (2.6) содержится функция, аналитическая в области  $\Pi_-$ , а в правой части — функция, аналитическая в  $\Pi_+$ . С помощью аналитического продолжения этих функций можно определить аналитическую во всей комплексной плоскости функцию, которая согласно теореме Лиувилля является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Из условия ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше  $O(r^{-\lambda})$  ( $\lambda < 1$ ;  $r$  — расстояние до кромки пластины). Тогда при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  функция  $F_-(\alpha)$  имеет порядок не выше  $O(|\alpha|^{\lambda+3})$ , а  $D_+(\alpha)$  — не выше  $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ . Функции  $K_{\pm}(\alpha)$  имеют на бесконечности порядок  $O(|\alpha|^2)$ . Следовательно, степень полинома равна единице. Таким образом,

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + U_+(\alpha) - M_+(\alpha) = a_1 + a_2\alpha. \quad (2.8)$$

Аналогично из уравнения (2.7) находим

$$\frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + V_-(\alpha) - N_-(\alpha) = b_1 + b_2\alpha. \quad (2.9)$$

Здесь  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — неизвестные константы, которые определяются из условий на кромках (1.4). Из уравнений (2.8), (2.9) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \alpha)K_+(\zeta)} &= a_1 + a_2\alpha + M_+(\alpha), \\ \frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i\zeta L} F_+(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \alpha)K_-(\zeta)} &= b_1 + b_2\alpha + N_-(\alpha). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определим константы  $a_1$  и  $a_2$ . Имеем равенство

$$D_1(\alpha)K_-(\alpha)e^{-i\alpha L} + M_-(\alpha) - U_-(\alpha) = a_1 + a_2\alpha.$$

Подставляя в это равенство выражения для  $U_-(\alpha)$ ,  $M_-(\alpha)$ , получаем

$$\begin{aligned} D_1(\alpha) = \frac{e^{i\alpha L}}{K_-(\alpha)} \left( a_1 + a_2\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i\zeta(\xi-L)}(\delta - \beta\zeta^4)Y(\zeta, \eta) d\zeta}{K_1(\zeta)K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right). \end{aligned}$$

С помощью обратного преобразования Фурье при  $0 < x < L$  находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(L-x)} \alpha \operatorname{th}(\alpha H)}{K_-(\alpha)K_1(\alpha)} \left( a_1 + a_2\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{-i\zeta L} F_-(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{i} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i\zeta(\xi-L)}(\delta - \beta\zeta^4)Y(\zeta, \eta) d\zeta}{K_1(\zeta)K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} \right) d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(\xi-x)} Y(\alpha, \eta)}{K_1(\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

Достаточно рассмотреть случай  $\xi < L$ , т. е. случай, когда тело находится либо перед пластиной, либо частично перед и под пластиной, либо полностью под пластиной. Предполагается, что размеры тела значительно меньше размеров пластины. Умножим числитель и знаменатель первой дроби в выражении для  $\partial G/\partial y(x, 0)$  на  $K_+(\alpha)$ . Интегралы вычисляем с помощью теории вычетов. Из краевых условий (1.4) при  $x = L$  получаем два уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H) K_+(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)} \left( a_1 + a_2\alpha_m - 2\pi \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j(L-\xi)}(\delta - \beta\alpha_j^4)K_+(\alpha_j)Y(\alpha_j, \eta)}{K_2'(\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)} - \right. \\ \left. - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} F_-(\alpha_j)}{K_+'(\alpha_j)(\alpha_j + \alpha_m)} \right) + (-1)^n 2\pi \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m(L-\xi)} \alpha_m^{n-1} Y(\alpha_m, \eta)}{K_2'(\alpha_m)} + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m L} F_-(-\alpha_m) \alpha_m^n \operatorname{th}(\alpha_m H)}{K_2'(\alpha_m)} = 0, \quad n = 3, 4. \quad (2.11)$$

Из дисперсионного соотношения для изгибно-гравитационных волн следует

$$\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H) = -K_1(\alpha_m) / (\beta \alpha_m^4 - \delta).$$

В результате подстановки этого выражения в (2.11) и приведения полученного выражения к сумме вычетов в корнях полинома  $\beta \alpha^4 - \delta$ , аналогично тому как это сделано в [10], имеем два уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-2} (a_1 + a_2 z_k)}{K_-(z_k)} + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} F_-(-\alpha_j) K_+(\alpha_j) K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-2}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_j)} = \\ & = 2\pi \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j(L-\xi)} (\delta - \beta \alpha_j^4) K_+(\alpha_j) Y(\alpha_j, \eta)}{K_2'(\alpha_j)} \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-2}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_j)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $n = 1, 2$ ;  $z_k$  — корни полинома  $\beta \alpha^4 - \delta$ .

Найдем константы  $b_1$  и  $b_2$ . Из уравнений (2.7), (2.9) следует

$$D_1(\alpha) K_+(\alpha) - V_+(\alpha) + N_+(\alpha) = b_1 + b_2 \alpha.$$

Аналогично получаем два уравнения для  $b_1, b_2$ :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-2} (b_1 + b_2 z_k)}{K_+(z_k)} - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} F_+(\alpha_j) K_+(\alpha_j) K_1(\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{n-2}}{K_+(z_k)(z_k - \alpha_j)} = F_n^{(4)}. \quad (2.13)$$

Формула для  $F_n^{(4)}$  приведена ниже. Таким образом, построена система уравнений (2.10), (2.12), (2.13).

Введем новые неизвестные

$$q_j = \frac{F_+(\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_+(\alpha_j)}, \quad r_j = \frac{F_-(-\alpha_j)}{\alpha_j^2 K_-(-\alpha_j)},$$

для которых имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - C\mathbf{r} - A\mathbf{a} &= \mathbf{F}_1, & \mathbf{r} - C\mathbf{q} - A^-\mathbf{b} &= \mathbf{F}_2, \\ G\mathbf{r} + B\mathbf{a} &= \mathbf{F}_3, & S\mathbf{q} + D\mathbf{b} &= \mathbf{F}_4, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{q}, \mathbf{r}$  — векторы с коэффициентами  $q_j, r_j$ ;  $C$  — матрица с коэффициентами  $C_{jm}$ ;  $\mathbf{F}_n$  — векторы с коэффициентами  $F_j^{(n)}$ ;  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — векторы с коэффициентами  $a_i, b_i$ ;  $G, S, B, D, A, A^-$  — матрицы с коэффициентами  $G_{ij}, S_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^-$ :

$$C_{jm} = \frac{\Lambda_m}{\alpha_j^2 (\alpha_m + \alpha_j)}, \quad \Lambda_m = e^{i\alpha_m L} \alpha_m^2 K_+(\alpha_m) Q_m, \quad Q_m = \frac{K_+(\alpha_m) K_1(\alpha_m)}{K_2'(\alpha_m)},$$

$$A_{jk} = \alpha_j^{k-3}, \quad A_{jk}^- = (-1)^{k-1} \alpha_j^{k-3}, \quad G_{jm} = \Lambda_m \sum_{k=1}^4 \frac{z_k^{j-2}}{K_-(z_k)(z_k + \alpha_m)},$$

$$B_{11} = \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k)}{z_k}, \quad B_{12} = B_{21} = \sum_{k=1}^4 K_+(z_k), \quad B_{22} = \sum_{k=1}^4 z_k K_+(z_k),$$

$$F_j^{(1)} = -\frac{2\pi}{\alpha_j^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m(L-\xi)} Q_m Y(\alpha_m, \eta)}{\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H)(\alpha_m + \alpha_j)}, \quad D_{kj} = (-1)^{k+j-1} B_{kj},$$

$$F_j^{(2)} = \frac{2\pi}{\alpha_j^2} \begin{cases} -\sum_{m=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_m \xi} Q_m Y(\alpha_m, \eta)}{\alpha_m \operatorname{th}(\alpha_m H)(\alpha_m + \alpha_j)}, & \xi > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n \xi} K_2(\gamma_n) Y(\gamma_n, \eta)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)(\alpha_j - \gamma_n)} + \frac{e^{-i\alpha_j \xi} Y(\alpha_j, \eta)}{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H) K_+(\alpha_j)}, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$S_{km} = (-1)^k G_{km}, \quad F_m^{(3)} = 2\pi \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j(L-\xi)} Q_j Y(\alpha_j, \eta)}{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)} \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k) z_k^{m-2}}{z_k + \alpha_j},$$

$$F_m^{(4)} = 2\pi (-1)^m \begin{cases} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j \xi} Q_j Y(\alpha_j, \eta)}{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)} \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k) z_k^{m-2}}{z_k + \alpha_j}, & \xi > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n \xi} K_2(\gamma_n) Y(\gamma_n, \eta)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)} \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k) z_k^{m-2}}{\gamma_n - z_k}, & \xi < 0. \end{cases}$$

Решив систему, с помощью обратного преобразования Фурье находим выражения для функции Грина. При  $0 < x < L$

$$G(x, y; \xi, \eta) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j(L-x)} F_+(\alpha_j) + e^{i\alpha_j x} F_-(-\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} Y(\alpha_j, y) -$$

$$- 2\pi i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j |\xi-x|}}{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H) K_2'(\alpha_j)} Y(\alpha_j, \eta) Y(\alpha_j, y),$$

при  $x < 0, \xi > 0$

$$G(x, y; \xi, \eta) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n x} Y(\gamma_n, y)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)} \left( b_2 \gamma_n + b_1 + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} Q_j F_+(\alpha_j)}{\alpha_j - \gamma_n} - \right.$$

$$\left. - 2\pi \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j \xi} Q_j Y(\alpha_j, \eta)}{\alpha_j \operatorname{th}(\alpha_j H)(\alpha_j - \gamma_n)} \right),$$

при  $x < 0, \xi < 0$

$$G(x, y; \xi, \eta) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n x} Y(\gamma_n, y)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)} \left( b_2 \gamma_n + b_1 + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j L} Q_j F_+(\alpha_j)}{\alpha_j - \gamma_n} - \right.$$

$$\left. - 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_k \xi} K_2(\gamma_k) Y(\gamma_k, \eta)}{K_1'(\gamma_k) K_+(\gamma_k)(\gamma_k + \gamma_n)} \right) - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\gamma_n |x-\xi|} Y(\gamma_n, y) Y(\gamma_n, \eta)}{K_1'(\gamma_n)}.$$

Изложим способ представления функции Грина с явным выделением логарифмической особенности (2.1). Функция Грина для свободной поверхности имеет вид [8]

$$G_0(x, y; \xi, \eta) = \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) - \text{p.v.} \int_0^{\infty} \frac{\cos(k(x-\xi))}{K_1(k)} P_1(y, \eta, k) dk -$$

$$- i\pi \cos(k_0(x-\xi)) P_1(y, \eta, k_0) / K_1'(k_0).$$

Здесь р.в. — интеграл в смысле главного значения,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2},$$

$$P_1(y, \eta, k) = \frac{2}{k(1 + e^{-2kH})} \{[(k \operatorname{ch} k\eta + \operatorname{sh} k\eta) e^{-ky} - (1 + k) e^{ky} \operatorname{sh} k\eta] e^{-2kH} + k e^{k(y+\eta)}\}.$$

Функция  $G_1$  удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям (1.1), (1.2), при этом на пластине должны выполняться условия

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta\right) \frac{\partial G_1}{\partial y} - G_1 = \chi(x), \quad \chi(x) = \left(\delta - \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \frac{\partial G_0}{\partial y}(x, 0; \xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^3 G_1}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0, x=0, L} = -\frac{\partial^3 G_0}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0, x=0, L}, \quad \frac{\partial^4 G_1}{\partial x^3 \partial y} \Big|_{y=0, x=0, L} = -\frac{\partial^4 G_0}{\partial x^3 \partial y} \Big|_{y=0, x=0, L}.$$

Аналогичная задача решена в [10], поэтому в данной работе подробное решение не приводится.

Для определения  $G_1$  получаем систему (2.14), в которой различаются только правые части:

$$F_j^{(1)} = \frac{1}{\alpha_j^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{A_m^- Q_m}{\alpha_m + \alpha_j}, \quad F_j^{(2)} = \frac{1}{\alpha_j^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{A_m Q_m}{\alpha_m + \alpha_j},$$

$$F_n^{(3)} = -4i^n \beta \frac{\partial^{2+n} G_0}{\partial^{1+n} x \partial y}(L, 0) - \sum_{m=-2}^{\infty} A_m^- Q_m \sum_{k=1}^4 \frac{K_+(z_k) z_k^{n-2}}{z_k + \alpha_m}, \quad n = 1, 2,$$

$$F_n^{(4)} = 4i^n \beta \frac{\partial^{2+n} G_0}{\partial^{1+n} x \partial y}(0, 0) + \sum_{m=-2}^{\infty} A_m Q_m \sum_{k=1}^4 \frac{K_-(z_k) z_k^{n-2}}{z_k - \alpha_m}, \quad n = 1, 2,$$

$$A_m^- = \int_0^L e^{i\alpha_m(L-\tau)} \chi(\tau) d\tau, \quad A_m = \int_0^L e^{i\alpha_m \tau} \chi(\tau) d\tau.$$

Решив эту систему, функцию  $G_1$  можно найти по следующим формулам: при  $0 < x < L$

$$G_1(x, y) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j(L-x)} F_+(\alpha_j) + e^{i\alpha_j x} F_-(-\alpha_j)}{K_2'(\alpha_j)} Y(\alpha_j, y) +$$

$$+ i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{Y(\alpha_j, y)}{K_2'(\alpha_j)} \int_0^L e^{i\alpha_j|x-\tau|} \chi(\tau) d\tau,$$

при  $x < 0$

$$G_1(x, y) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_n x} Y(\gamma_n, y)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)} \left( b_2 \gamma_n + b_1 + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{Q_j (e^{i\alpha_j L} F_+(\alpha_j) + A_j)}{\alpha_j - \gamma_n} \right),$$

при  $x > L$

$$G_1(x, y) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\gamma_n(x-L)} Y(\gamma_n, y)}{K_1'(\gamma_n) K_+(\gamma_n)} \left( -a_2 \gamma_n + a_1 + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{Q_j (e^{i\alpha_j L} F_-(-\alpha_j) + A_j^-)}{\alpha_j - \gamma_n} \right).$$

В дальнем поле функция Грина принимает следующие значения: при  $x \rightarrow \infty$

$$G(x, y; \xi, \eta) = -i\pi P_1(y, \eta, \gamma_0) \frac{e^{i\gamma_0(x-\xi)}}{K'_1(\gamma_0)} + \\ + i \frac{e^{i\gamma_0(x-L)} Y(\gamma_0, y)}{K_+(\gamma_0) K'_1(\gamma_0)} \left( -a_2\gamma_0 + a_1 + \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{Q_m(e^{i\alpha_m L} F_-(-\alpha_m) + A_m^-)}{\alpha_m - \gamma_0} \right),$$

при  $x \rightarrow -\infty$

$$G(x, y; \xi, \eta) = -i\pi P_1(y, \eta, \gamma_0) \frac{e^{-i\gamma_0(x-\xi)}}{K'_1(\gamma_0)} + \\ + i \frac{e^{-i\gamma_0 x} Y(\gamma_0, y)}{K_+(\gamma_0) K'_1(\gamma_0)} \left( b_2\gamma_0 + b_1 + \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{Q_m(e^{i\alpha_m L} F_+(\alpha_m) + A_m)}{\alpha_m - \gamma_0} \right).$$

Прогиб пластины или возвышение свободной поверхности определяется формулой

$$w_j(x) = \int_S \sigma_j(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0; \xi, \eta) dS.$$

**3. Гидродинамическая нагрузка.** Гидродинамическая нагрузка, действующая на тело, вычисляется по формуле

$$F_k = \sum_{j=1}^3 \tau_{kj} \zeta_k, \quad \tau_{kj} = \rho \omega^2 l^2 \int_S \varphi_j n_k dS = \omega^2 \mu_{kj} + i\omega \lambda_{kj},$$

где  $F_1, F_2$  — силы, действующие в направлении осей  $x, y$ ;  $F_3$  — крутящий момент;  $\mu_{kj}, \lambda_{kj}$  — коэффициенты присоединенных масс и демпфирования.

Коэффициенты демпфирования связаны с амплитудами волн в дальнем поле некоторыми соотношениями. Пусть  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, граничным условиям (1.1)–(1.4) и условиям излучения. Применяя формулу Грина для области, занятой жидкостью, находим

$$\int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{-H}^0 \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dy = 0. \quad (3.1)$$

Из условий (1.3), (1.4) следует, что интеграл по пластине равен нулю. В дальнем поле потенциалы можно представить в виде

$$\varphi_j^\pm = C_j^\pm e^{\pm i\gamma_0 x} Y(\gamma_0, y),$$

где  $C_j^+, C_j^-$  — комплексные амплитуды волн. Если в качестве функций  $\varphi$  и  $\psi$  в (3.1) выбрать  $\varphi_j$  и  $\varphi_k$ , то получаем условие симметрии коэффициентов присоединенных масс и демпфирования

$$\mu_{jk} = \mu_{kj}, \quad \lambda_{jk} = \lambda_{kj}.$$

Выбрав функции  $\varphi_j$  и  $\bar{\varphi}_k$ , получаем соотношение

$$\lambda_{jk} = \frac{\rho\omega}{2} (C_j^+ \bar{C}_k^+ + C_j^- \bar{C}_k^-) K'_1(\gamma_0).$$

Это соотношение может быть использовано для тестирования численных расчетов, так как коэффициенты демпфирования вычисляются разными способами.

**4. Результаты численных расчетов.** Численное решение интегрального уравнения (1.6) строилось методом граничных элементов с квадратичной аппроксимацией. При решении системы (2.14) для определения функции Грина использовался метод редукции. Исходные данные для расчетов те же, что в работе [8]. Эллиптический контур определяется уравнением  $(x - c)^2/a^2 + (y + d)^2/b^2 = 1$ , где  $a, b$  — полуоси эллипса;  $(c, -d)$  — координаты центра эллипса. Использовались следующие значения параметров:  $E = 5 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 1025$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 922,5$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 2$  м,  $a = d = 20$  м,  $b = 10$  м,  $H = 500$  м. В расчетах использовалось 20 граничных элементов.

На рис. 1–4 приведены зависимости безразмерных коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от безразмерного волнового числа  $b/l = \omega^2 b/g$  при различных длинах пластины и положениях цилиндра относительно ее кромки. Безразмерные коэффициенты введены следующим образом [8]:

$$M_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{\pi \rho b^2}, \quad L_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{\pi \rho \omega b^2}, \quad k, j = 1, 2,$$

$$M_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{\pi \rho b^3}, \quad L_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{\pi \rho \omega b^3}, \quad k = 1, 2, \quad j = 3,$$

$$M_{33} = \frac{\mu_{33}}{\pi \rho b^4}, \quad L_{33} = \frac{\lambda_{33}}{\pi \rho \omega b^4}.$$

В работе [8] приведены аналогичные графики для полубесконечного и бесконечного ледяных покровов и свободной поверхности. Показано, что в случае если цилиндр находится перед пластиной, кривые гидродинамической нагрузки близки к соответствующим кривым для цилиндра под свободной поверхностью, если цилиндр находится под пластиной, то кривые близки к соответствующим кривым для цилиндра под бесконечным ледяным покровом, а в случае  $c = 0$  находятся между ними (ближе к кривым, соответствующим цилиндру, расположенному под свободной поверхностью). Если цилиндр находится перед полубесконечной пластиной, нагрузки имеют осциллирующий характер, а в случаях  $c/b = 0$  и  $c/b = 5$  осцилляций не наблюдается. Возникновение осцилляций обусловлено тем, что в случаях, когда цилиндр находится перед пластиной, волны, излучаемые при его колебаниях, частично отражаются от кромки пластины и частично проходят в пластину. При наложении гребней набегающей и отраженной волн наблюдается усиление амплитуд колебаний — резонанс.

При колебаниях цилиндра вблизи плавающей упругой пластины конечной длины осцилляции гидродинамической нагрузки, зависящей от частоты, больше, чем в случае полубесконечной пластины, и наблюдаются при любом положении цилиндра относительно пластины. При этом кривые, описывающие данные осцилляции, расположены вблизи кривых, соответствующих полубесконечной пластине, т. е. зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от частоты для конечной и полубесконечной пластин аналогичны.

Упругая пластина конечной длины имеет полосы пропускания в спектре частот, т. е. частоты, при которых коэффициент отражения равен нулю, а между ними находятся значения частот, при которых коэффициент отражения максимален. В [12] получена формула для полос пропускания (в безразмерных переменных)

$$\alpha_0 L + \text{Arg}(K_+^2(\alpha_0)) = \pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Согласно этой формуле при фиксированной частоте можно найти длину пластины  $L$ , при которой для данной частоты коэффициент отражения обращается в нуль. Амплитуды колебаний пластины больше на тех частотах, при которых коэффициент отражения равен

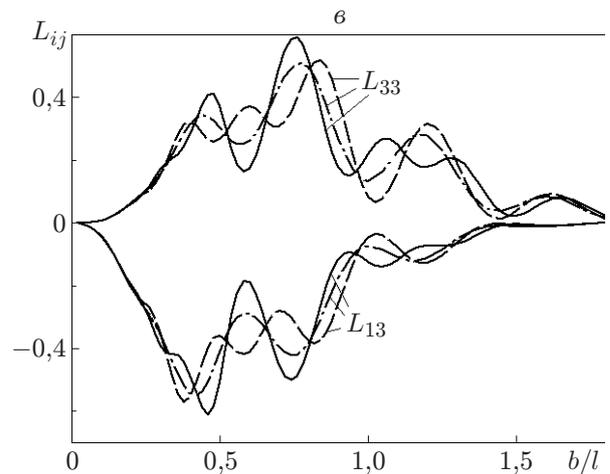
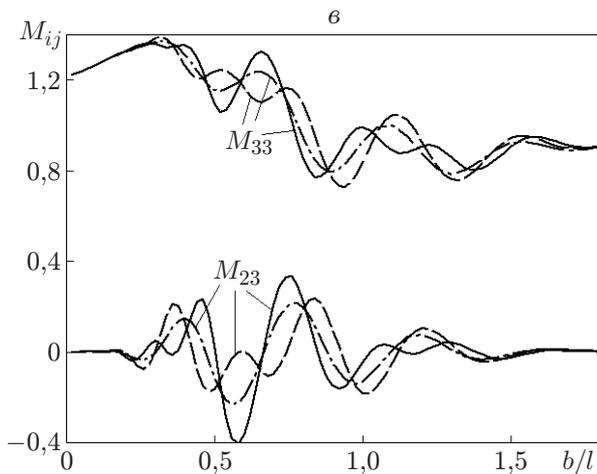
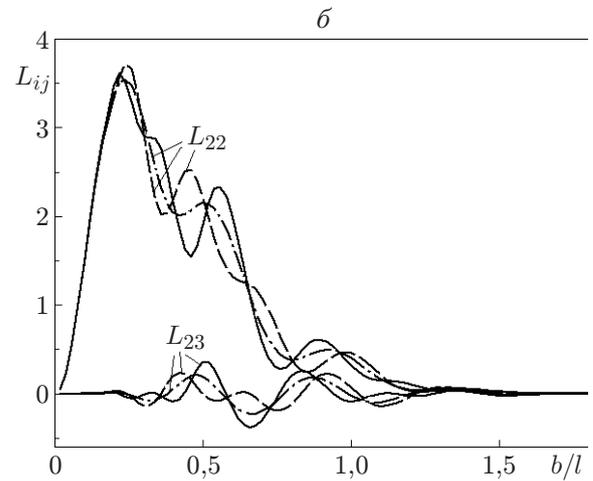
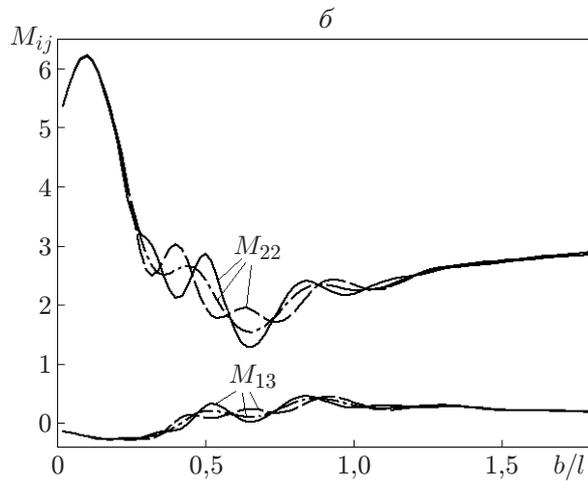
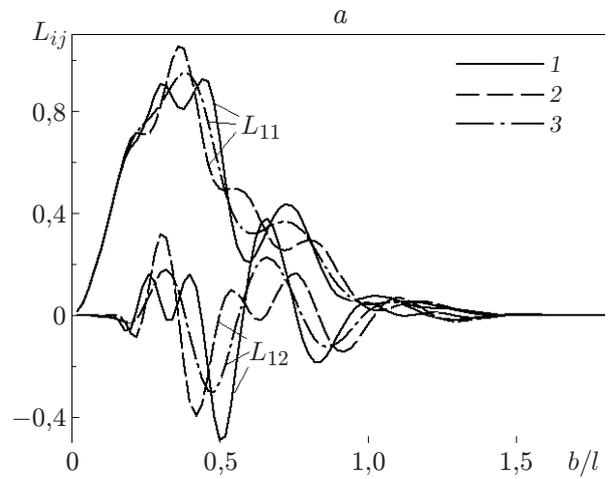
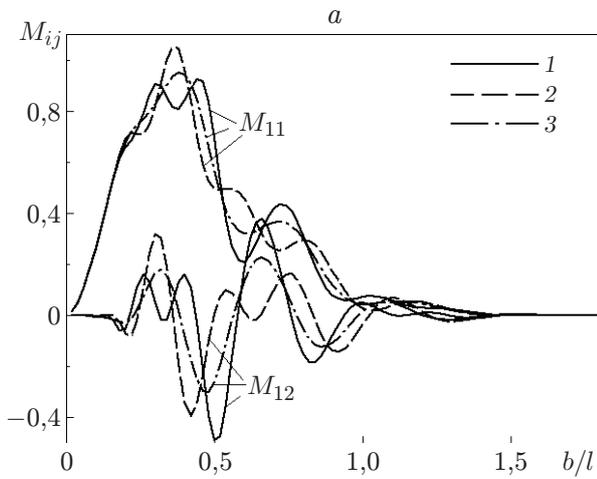


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Зависимости коэффициентов присоединенных масс  $M_{11}$ ,  $M_{12}$  (а),  $M_{22}$ ,  $M_{13}$  (б) и  $M_{23}$ ,  $M_{33}$  (в) от волнового числа для эллиптического цилиндра при  $c/b = -7$ :

1 —  $L = 190$  м, 2 —  $L = 150$  м, 3 — полубесконечная пластина [8]

Рис. 2. Зависимости коэффициентов демпфирования  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  (а),  $L_{22}$ ,  $L_{23}$  (б) и  $L_{13}$ ,  $L_{33}$  (в) от волнового числа для эллиптического цилиндра при  $c/b = -7$ :

1 —  $L = 190$  м, 2 —  $L = 150$  м, 3 — полубесконечная пластина [8]

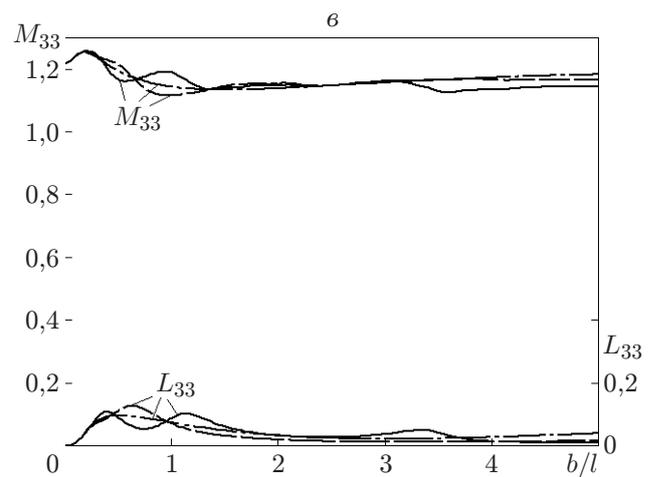
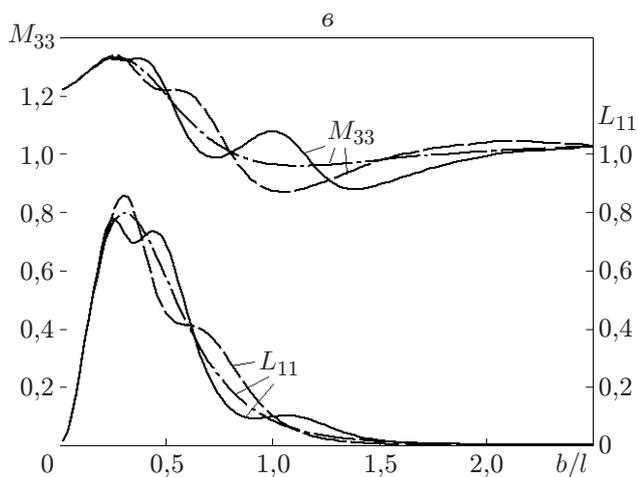
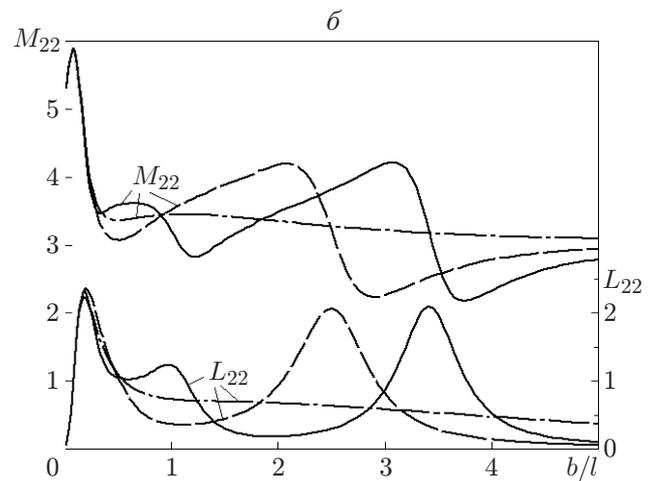
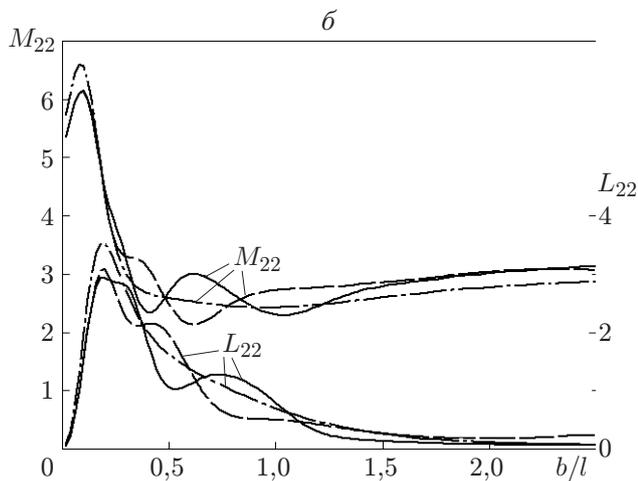
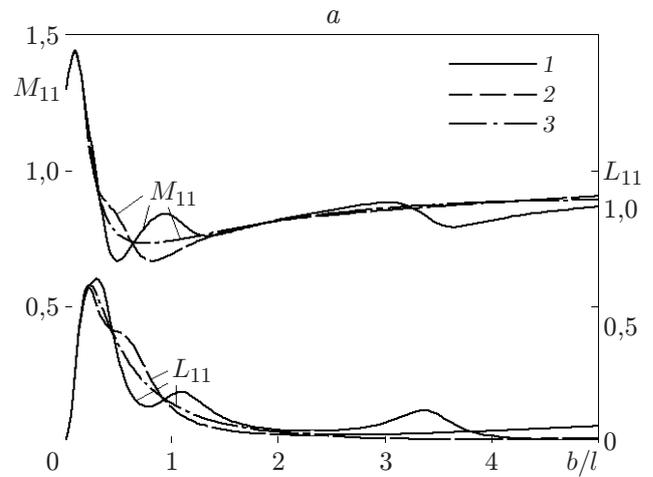
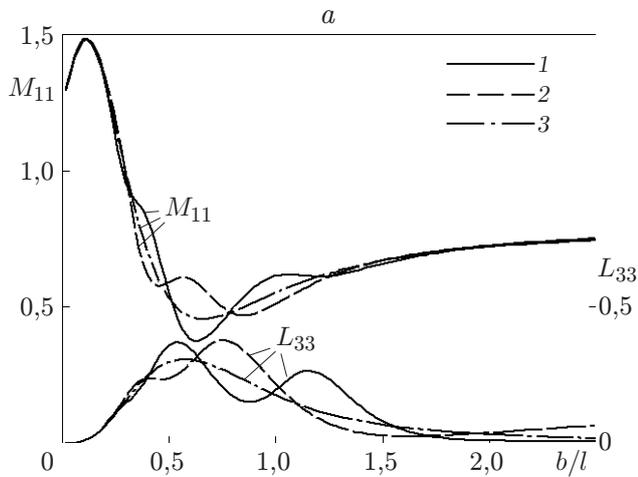


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3. Зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования  $M_{11}$ ,  $L_{33}$  (а),  $M_{22}$ ,  $L_{22}$  (б) и  $M_{33}$ ,  $L_{11}$  (в) от волнового числа для эллиптического цилиндра при  $c/b = 0$ : 1 —  $L = 190$  м, 2 —  $L = 150$  м, 3 — полубесконечная пластина [8]

Рис. 4. Зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования  $M_{11}$ ,  $L_{11}$  (а),  $M_{22}$ ,  $L_{22}$  (б) и  $M_{33}$ ,  $L_{33}$  (в) от волнового числа для эллиптического цилиндра при  $c/b = 5$ : 1 —  $L = 190$  м, 2 —  $L = 150$  м, 3 — полубесконечная пластина [8]

нулю. Так, при  $\omega^2 b/g = 0,64$  и  $L = 150$  м коэффициент отражения близок к нулю, а при  $L = 190$  м он принимает максимальное значение. На рис. 1–4 видно, что соответствующие этим длинам кривые при многих значениях частот находятся в противофазе. Если цилиндр расположен перед пластиной, то при малых и больших частотах кривые зависимостей коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от величины  $b/l$  совпадают с соответствующими кривыми для полубесконечной пластины. По мере приближения цилиндра к пластине интервал частот, при которых необходимо учитывать конечность размеров пластины, увеличивается.

Полученные результаты показывают, что при определении гидродинамических нагрузок необходимо учитывать конечную длину упругой пластины. Учет конечности длины пластины позволяет обнаружить резонанс сил, действующих на тело.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за полезное обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Linton C. M., McIver P.** Handbook of mathematical technics for wave/structure interactions. L.; Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2001.
2. **Стурова И. В.** Гидродинамические нагрузки, действующие на колеблющийся цилиндр, погруженный в стратифицированную жидкость, при наличии ледяного покрова // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 102–115.
3. **Das D., Mandal B. N.** Water wave radiation by a sphere submerged in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78, N 8. P. 649–661.
4. **Das D., Mandal B. N.** Water wave radiation by a sphere submerged in a two-layer ocean with an ice-cover // Appl. Ocean Res. 2010. V. 32, N 3. P. 358–366.
5. **Mohapatra S., Bora S. N.** Radiation of water wave by a sphere in an ice-covered two-layer fluid of finite depth // J. Adv. Res. Appl. Math. 2010. V. 2, N 1. P. 46–63.
6. **Sturova I. V.** Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–418.
7. **Стурова И. В.** Колебания кругового цилиндра, погруженного в жидкость с неоднородной верхней границей // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 26–36.
8. **Стурова И. В.** Генерация волн колеблющимся погруженным цилиндром при наличии плавающей полубесконечной упругой пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 98–108.
9. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. **Ткачева Л. А.** Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 2. С. 132–146.
11. **Williams T. D., Meylan M. H.** The Wiener — Hopf and residue calculus solutions for a submerged semi-infinite elastic plate // J. Engng Math. 2012. V. 75, N 1. P. 81–106.
12. **Ткачева Л. А.** Плоская задача о дифракции поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 3. С. 131–149.

*Поступила в редакцию 4/IX 2014 г.*