

5. А. Г. Мержанов, Ю. М. Григорьев. Докл. АН СССР, 1967, 176, 6, 1344.
6. Р. М. Зайдель, Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1962, 4.
7. А. Г. Мержанов, А. К. Филоненко. Докл. АН СССР, 1963, 152, 1.
8. Б. И. Хайкин, Э. Н. Руманов, ФГВ, 1975, 11, 5, 671.
9. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
10. В. В. Барзыкин, В. Т. Гонтковская и др. ПМТФ, 1964, 3.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОМ ВЗРЫВЕ В УСЛОВИЯХ ЛИНЕЙНОГО НАГРЕВА

И. С. Любченко, В. Н. Косолапов

(Казань)

Качественная теория динамических режимов теплового взрыва впервые рассмотрена в работах [1—3]. В них построены квазистационарные и псевдотермическое приближения к решению задачи о тепловом взрыве при линейном нагреве без учета распределения температуры в реакционном объеме. Полученные в этих работах приближения не учитывают влияния параметра β ($\beta \sim 10^{-2}$) на всех режимах и сингулярного влияния параметра γ ($\gamma \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$) над пределом воспламенения. Кроме того, в этих работах используется допущение $|\Theta_n| \gg 1$, что ограничивает применимость предлагаемых формул.

В методическом плане следует отметить, что построенные в [1—3] приближения для нахождения характеристик теплового взрыва используют: под пределом — максимальные значения этих приближений вместо оценок на максимум точного решения; на пределе — критическую точку характеристики $t^-(\omega)$, в то время как необходимо использовать качественное различие решений под, на и над пределом.

Цель настоящей работы — дальнейшее развитие приближенных методов решения задачи о динамических режимах теплового взрыва для простых реакций, построение двухсторонних оценок его характеристик при $\beta=0$ и $\gamma=0$, учет влияния малых параметров β и γ , построение формул приближенного определения характеристик при $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и любых $\Theta_n < 0$.

1. Постановка задачи

Без учета распределения температуры в реакционном объеме задача о динамических режимах теплового взрыва для несамоускоряющихся реакций может быть сформулирована в виде [1]

$$\varepsilon \cdot dz/dt = 1 - (\eta)^m \exp\{(z+t)/[1+\beta(z+t)]\} - z/\kappa_* - \varepsilon \quad (1.1)$$

$$\omega \cdot d\eta/dt = (1-\eta)^m \exp\{(z+t)/[1+\beta(z+t)]\},$$

$$t = \Theta_n, \quad z = 0, \quad \eta = 0, \quad (\Theta_n < 0). \quad (1.2)$$

Здесь $z = \frac{E}{RT_*} (T - T_0)$; $t = \frac{E}{RT_*} (T_0 - T_*)$; $\Theta_n = \frac{E}{RT_*} (T_n - T_*)$; $\gamma = \frac{c\rho RT_*^2}{QE}$;

$$\beta = \frac{RT_*}{E}, \quad \omega = \frac{wE}{k_0 RT_*^2} \exp\left(\frac{E}{RT_*}\right); \quad \kappa_* = \frac{QVEk_0}{\alpha S RT_*^2} \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right); \quad \varepsilon = \gamma\omega;$$

T — температура в зоне реакции; T_0 — температура окружающей среды; T_n — начальная температура системы; T_* — критическая температура теплового взрыва в статических условиях; η — глубина разложения; m — порядок реакции; k_0 — предэкспонент; E — энергия активации; Q — тепловой эффект реакции; α — коэффициент теплоотдачи; S , V — поверхность и объем реакционного сосуда; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность; ω — скорость нарастания температуры окружающей среды.

Система (1.1) существенно нелинейна и содержит 4 параметра, из которых ϵ и β малые величины, а $\kappa_* = (1 + \beta) \exp(-1)$. Как показано численным интегрированием [3], в зависимости от исходных параметров разогрет z либо плавно проходит через точку максимума, либо имеет область резких изменений, характеризующуюся значительными градиентами.

Задача состоит в определении характеристик теплового взрыва:

а) z^- , η^- , t^- под пределом — в момент достижения максимума разогрева,

б) z^* , η^* , t^* , ω^* на пределе — в точке ветвления решения $z(t)$ системы (1.1),

в) η^+ , t^+ над пределом — в момент взрыва.

Параметр ω под и над пределом задан, а на пределе есть искомая величина. Для решения задачи используются асимптотические по малым параметрам ($\beta \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow 0$) приближения и оценки на решение задачи (1.1) в вырожденном случае при $\beta = 0$ и $\epsilon = 0$. При этом β и ϵ считаются независимыми величинами.

2. Качественный анализ решения вырожденной системы

Полагая в (1.1) $\beta = 0$, $\epsilon = 0$, приходим к системе:

$$F(\bar{z}, \bar{\eta}, t) = (1 - \bar{\eta})^m \exp(\bar{z} + t) - \bar{z} \exp(1) = 0, \\ \omega \cdot d\eta/dt = (1 - \bar{\eta})^m \exp(\bar{z} + t), \quad (2.1)$$

$$t = \Theta_n, \quad \bar{\eta} = 0. \quad (2.2)$$

Как показано в [4], решение задачи (1.1), (1.2) при $\beta = 0$ на интервале $\Theta_n < t^0 \leq t \leq t^1$ с точностью $O(\epsilon)$ определяется решением задачи (2.1), (2.2). Согласно [4], из двух корней $\bar{z}_i(\bar{\eta}, t)$, $i = 1, 2$ уравнения $F(\bar{z}, \bar{\eta}, t) = 0$ выбирается тот, для которого выполняется условие $F'_z(\bar{z}(\bar{\eta}, t), \bar{\eta}, t) < 0$ в области $t > \Theta_n$. В задаче (2.1), (2.2) последнее условие эквивалентно неравенству $\bar{z} < 1$. Начальное условие $\bar{z}(\Theta_n)$ — меньший корень первого уравнения системы (2.1) при $t = \Theta_n$ и заключено в интервале $\exp(\Theta_n - 1) < \bar{z}(\Theta_n) < \exp(\Theta_n)$.

Можно показать, что при $t > \Theta_n$, $0 < \bar{z}(t) < 1$, $0 \leq \bar{\eta}(t) < 1$ решение $\bar{z}(t)$ с ростом ω монотонно возрастает, а $\bar{\eta}(t)$ монотонно убывает. Поэтому определим критическое значение ω^* , как параметр ω , при котором происходит переход от разрешимости задачи (2.1), (2.2) в целом (т. е. в области $\Theta_n \leq t < \infty$) к ее локальной разрешимости (т. е. на отрезке $\Theta_n \leq t \leq t_0 < \infty$) [5]. Учет последнего определения показывает, что при $m\bar{z}(\Theta_n) \exp(1) < \omega < \omega^*$ существует ограниченное положительное решение $\bar{z}(t)$, $\bar{\eta}(t)$, определенное на всем интервале $t \geq \Theta_n$. При этом $\bar{z}(t)$ проходит через максимум, лежащий в точке t_0 и определяемый условием

$$m\bar{z}(t) \exp(1) = \omega(1 - \bar{\eta}(t)), \quad (2.3)$$

а $\bar{\eta}(t)$ имеет в t_0^- точку перегиба. При $\omega > \omega^*$ положительное ограниченное решение задачи (2.1), (2.2) существует лишь в области $\Theta_H \leq t < t_0^+$, где t_0^+ определяется условием $\bar{z}(t_0^+) = 1$. При $\omega = \omega^*$ решение $\bar{z}(t)$ определено для всех $t \geq \Theta_H$, но имеет угловую точку t_0^* , в которой

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+ - 0} \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4/m}}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+ + 0} \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4/m}}{2}.$$

Таким образом, решение $\bar{z}(t)$ при $\omega = \omega^*$ разделяет семейство решений $\{\bar{z}(t)\}$ на две непересекающиеся группы. Иллюстрация качественной картины поведения решения системы (2.1) приведена на рис. 1, 2.

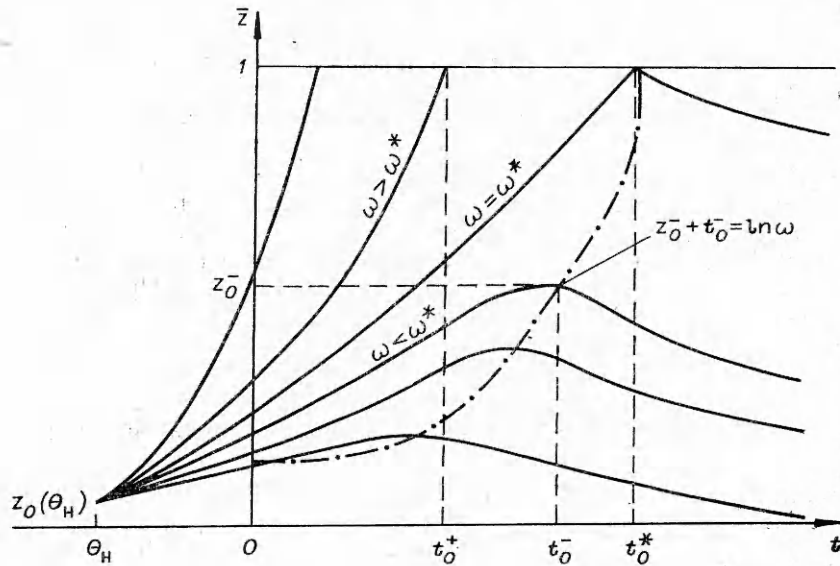


Рис. 1. Качественное поведение решения $\bar{z}(t)$.

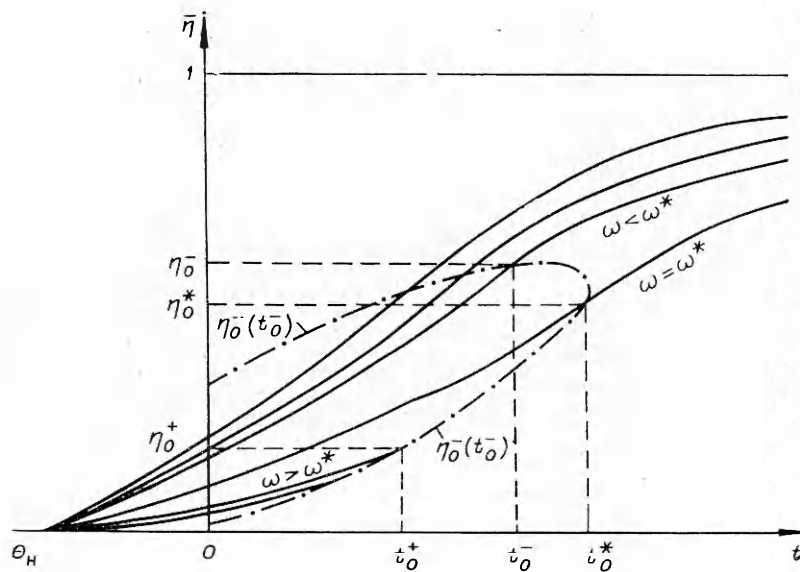


Рис. 2. Качественное поведение решения $\bar{\eta}(t)$.

3. Характеристики теплового взрыва вырожденной системы

Анализ, проведенный выше, позволяет дать определение характеристикам теплового взрыва системы (2.1). Однако их вычисление требует численного интегрирования задачи (2.1), (2.2). Поэтому воспользуемся соотношениями, которые имеют место для вырожденной системы.

Легко показать, что в задаче (2.1), (2.2) выполняются следующие условия:

$$\text{при } 0 < \bar{z} < 1 \quad A(t) < U(\bar{\eta}) < A(t) + B(t) \sqrt{\bar{\eta}}, \quad (3.1)$$

$$\text{при } 0 < \bar{z} < z^- \quad A(t) < U(\bar{\eta}) < A(t) \exp(z^-), \quad (3.2)$$

где

$$A(t) = \exp(t) - \exp(\Theta_n); \quad B(t) = \text{sh}(0,5) \sqrt{2\omega(\exp(2t) - \exp(2\Theta_n))};$$

$$U(\eta) = \begin{cases} -\omega \ln(1 - \eta), & m = 1 \\ \omega(m-1)^{-1} [(1 - \eta)^{-(m-1)} - 1], & m > 1. \end{cases}$$

В свою очередь, соотношения (3.1), (3.2) совместно с первым уравнением системы (2.1) дают оценки решения

$$\bar{\eta}_n(t) < \bar{\eta}(t) < \bar{\eta}_v(t), \quad \bar{z}_n(t) < \bar{z}(t) < \bar{z}_v(t), \quad (3.3)$$

где индексы n и v относятся к нижней и верхней оценке. Согласно (2.3), изоклина нуля решения $\bar{z}(t)$ в плоскости \bar{z}, t — монотонно убывающая функция. Следовательно, двухсторонние определения (3.3) дадут двухсторонние оценки на характеристики под и над пределом. На пределе, как показано ранее, верхняя оценка для $\bar{z}(t)$ дает нижнюю оценку критического значения ω^* , нижняя — верхнюю оценку ω^* .

Таким образом, для определения характеристик теплового взрыва имеем следующие уравнения:

$$z + t - m \ln(\omega m^{-1}) + (m-1)(\ln z + 1) = 0, \quad (3.4)$$

$$(1 - \eta)^m \exp(z + t) - z \exp(1) = 0, \quad (3.5)$$

$$U(\eta) = f(z, \eta, t), \quad (3.6)$$

$$z = 1, \quad (3.7)$$

где $f(z, \eta, t)$ — одна из опорных функций в неравенствах (3.1), (3.2).

Характеристики $z^*, \eta^*, t^*, \omega^*$ на пределе определяются из системы трансцендентных уравнений (3.4) — (3.7), которая сводится к одному уравнению относительно ω :

$$U(1 - m\omega^{-1} \exp(1)) = f(1, 1 - m\omega^{-1} \exp(1), -m(\ln(m\omega^{-1}) + 1)), \quad (3.8)$$

а остальные характеристики определяются по формулам

$$z = 1, \quad \eta = 1 - m\omega^{-1} \exp(1), \quad t = -m(\ln(m\omega^{-1}) + 1).$$

Для $\eta_n^*, t_n^*, \omega_n^*$ имеем

$$f(z, \eta, t) = A(t), \quad (3.9)$$

а для $\eta_v^*, t_v^*, \omega_v^*$ соответственно

$$f(z, \eta, t) = \begin{cases} A(t) + B(t) \sqrt{\eta}, & m = 1 \\ A(t) \exp(z), & m \geq 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

При $\omega < \omega^*$ характеристики z^- , η^- , t^- как функции параметра ω определяются из системы уравнений (3.4)–(3.6), сводящейся к одному трансцендентному уравнению относительно η

$$U(\eta) = f(\omega(1-\eta)m^{-1} \exp(1), \eta, \ln[\omega m^{-1}(1-\eta)^{-m+1}] - \omega(1-\eta)m^{-1} \exp(-1)). \quad (3.11)$$

Характеристики z^- и t^- находятся по формулам

$$z = \omega m^{-1}(1-\eta) \exp(-1), \quad t = \ln[\omega m^{-1}(1-\eta)^{-m+1}] - \omega(1-\eta)m^{-1} \exp(-1).$$

Для z_v^-, η_n^-, t_n^- $f(z, \eta, t)$ получается из (3.9), для z_n^-, η_v^-, t_v^- — по (3.10). При $\omega > \omega^*$ характеристики z^+ , η^+ , t^+ определяются системой (3.5)–(3.7), также сводящейся к одному нелинейному уравнению относительно η

$$U(\eta) = f(1, \eta, -m \ln(1-\eta)). \quad (3.12)$$

Характеристики z^+ и t^+ находятся в виде

$$z = 1, \quad t = -m \ln(1-\eta).$$

Для η_n^+, t_n^+ $f(z, \eta, t)$ определяется соотношением (3.9), для η_v^+, t_v^+ — выражением

$$f(z, \eta, t) = A(t) + B(t) \sqrt{\eta}, \quad m \geq 1. \quad (3.13)$$

Доказательства существования решений нелинейных уравнений (3.8), (3.11), (3.12) требуется проводить для каждого конкретного случая, а при наличии нескольких корней — выбирать наименьший. Проведены подобные доказательства в случаях моно- и бимолекулярных реакций. Использование двух соотношений в выражениях (3.10), (3.13) вызвано точностью этих оценок на различных режимах теплового взрыва для реакций разного вида.

4. Влияние параметра β на характеристики теплового взрыва при $\varepsilon = 0$

При получении поправок на параметр β ограничимся членами порядка $O(\beta^2)$, используя разложения всех характеристик, параметров и функций в виде $x = x_0 + \beta x_1$, где под x_0 понимаются величины, определенные в п. 3. Для этого, выписав соотношения, аналогичные (3.4)–(3.7) при $\beta > 0$, и проводя в них разложение в ряд по параметру β , получим, приравняв нулю коэффициенты при β_1 , уравнения для поправок:

$$z_1 + [\omega_0 m^{-1} \exp(-1)] \eta_1 - [z_0 \omega_0^{-1}] \omega_1 = z_0 [1 - 2(z_0 + t_0)], \quad (4.1)$$

$$[z_0 - 1] z_1 - [m z_0 (1 - \eta_0)^{-1}] \eta_1 + [z_0] t_1 = z_0 [(z_0 + t_0)^2 - 1], \quad (4.2)$$

$$[\omega_0 (1 - \eta_0)^{-m}] \eta_1 - [z_0 (1 - \eta_0)^{-m} \exp(1)] t_1 + [U_0(\eta_0) \omega_0^{-1}] \omega_1 = -\alpha, \quad (4.3)$$

$$z_1 = 2(z_0 + t_0), \quad (4.4)$$

где $\alpha = \int_{\Theta_n}^{t_0} [(\bar{z}_0(x) + x)^2 - \bar{z}_1(x)] \exp(\bar{z}_0(x) + x) dx$.

Для приближенной оценки α заметим, что после вырождения по ε система (1.1) разрешима при $z < [1 + \beta(z+t)]^2$. В линейном приближении по β это эквивалентно условию

$$\bar{z}_1(t) < 2(\bar{z}_0(t) + t). \quad (4.5)$$

Тогда с учетом (4.5) и условия $d\bar{z}_0(t)/dt \geq 0$ при $\Theta_n \leq t \leq t_0$ легко показать, что α может приближенно вычисляться по формуле

$$\alpha \approx (z_0 + t_0 - 2) \exp(z_0 + t_0) - [\bar{z}(\Theta_n) + \Theta_n - 2] \exp[\bar{z}(\Theta_n) + \Theta_n].$$

Таким образом, для определения поправок на характеристики получаем систему линейных уравнений. Под и над пределом параметр ω не зависит от β , и в уравнениях (4.1)–(4.3) следует положить $\omega_0 = \omega$, $\omega_1 = 0$. На пределе $\omega^* = \omega_0^* + \beta\omega_1^*$, ω_1^* — искомая величина.

В систему для определения поправок под пределом входят уравнения (4.1)–(4.3), на пределе — (4.1)–(4.4), над пределом — (4.2)–(4.4). Решение соответствующих систем единственно

$$\begin{aligned} \text{а) } \omega < \omega^*: z_1^- &= (1 - z_0^-)^{-1} \cdot \{\alpha^- (1 - \eta_0^-)^m \exp(-1) - \\ &\quad - z_0^- [(z_0^- + t_0^-)^2 - 1]\}, \\ \eta_1^- &= m\omega^{-1} \exp(1) \{z_0^- [1 - 2(z_0^- + t_0^-)] - z_1^-\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} t_1^- &= (z_0^-)^{-1} \{\alpha^- (1 - \eta_0^-) \exp(-1) + m[z_0^- (1 - 2(z_0^- + t_0^-)) - z_1^-]\}; \\ \text{б) } \omega = \omega^*: \omega_1^* &= \omega_0^* [U_0(\eta_0^*)]^{-1} \cdot [(t_0^{*2} + 2t_0^*) (1 - \eta_0^*)^{-m} \exp(1) - \alpha^*], \\ z_1^* &= 2(1 + t_0^*), \quad \eta_1^* = (1 - \eta_0^*) [\omega_0^* \omega_1^{*-1} - (3 + 4t_0^*)], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} t_1^* &= t_0^{*2} + 2t_0^* + m[\omega_0^* \omega_1^{*-1} - (3 + 4t_0^*)]; \\ \text{в) } \omega > \omega^*: z_1^+ &= 2(1 + t_0^+), \\ \eta_1^+ &= [t_0^{+2} + 2t_0^+ - \alpha^+ (1 - \eta_0^+) \exp(-1)] [\omega \exp(-1) - m(1 - \eta_0^+)^{-1}]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$t_1^+ = [\omega(t_0^{+2} + 2t_0^+) - m\alpha^+(1 - \eta_0^+)^{m-1}] [\omega - m(1 - \eta_0^+)^{-1} \exp(1)]^{-1}.$$

Формулы (4.6)–(4.8) используются как для нижних, так и для верхних оценок характеристик, определенных в п. 3, и последние при $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$ определяются на всех режимах в виде

$$z = z_0 + \beta z_1, \quad \eta = \eta_0 + \beta \eta_1, \quad t = t_0 + \beta t_1. \quad (4.9)$$

Учитывая, что получены двухсторонние оценки характеристик при $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$, в расчетах за их приближенные значения брались полусуммы $x = (x_n + x_b)/2$.

На рис. 3 представлены зависимости характеристик взрыва на пределе от параметра Θ_n , которые показывают, что при $|\Theta_n| > 3$ влиянием этого параметра можно пренебречь. Результаты приближенной теории хорошо совпадают с численным решением задачи.

В табл. 1 приведены результаты сравнения характеристик на пределе, полученных в работе [2], с расчетом теории настоящей работы и численным интегрированием при $\Theta_n = -8$, $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0,03$. При этом за x из работы [2] принималась полусумма псевдоизотермического и первого квазистационарного приближения, за x' — второе

Т а б л и ц а 1

Метод решения	m=1			m=2		
	ω^*	η^*	t^*	ω^*	η^*	t^*
Приближенный	5,79	0,41	0,62	10,12	0,33	0,94
Численный	5,71	0,47	0,68	9,45	0,33	0,90
По работе [2]						
x	5,06	0,63	1,00	7,44	0,50	1,38
x'	5,17	0,56	0,80	—	—	—

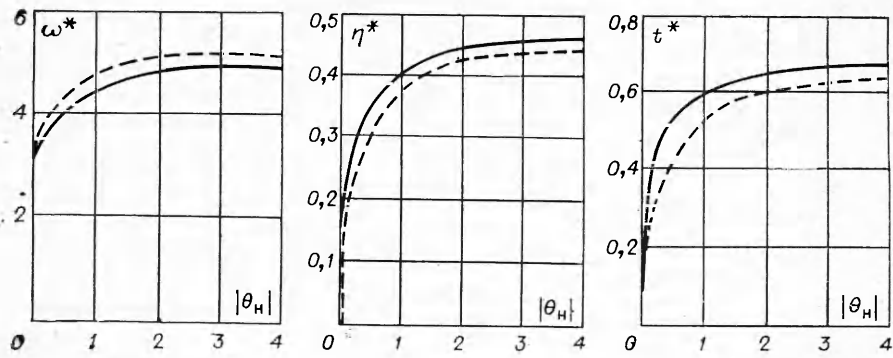


Рис. 3. Характеристики теплового взрыва на пределе при $m=1$, $\beta=0$, $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$.
 — численное интегрирование, - - - - - усреднение по полусумме оценок.

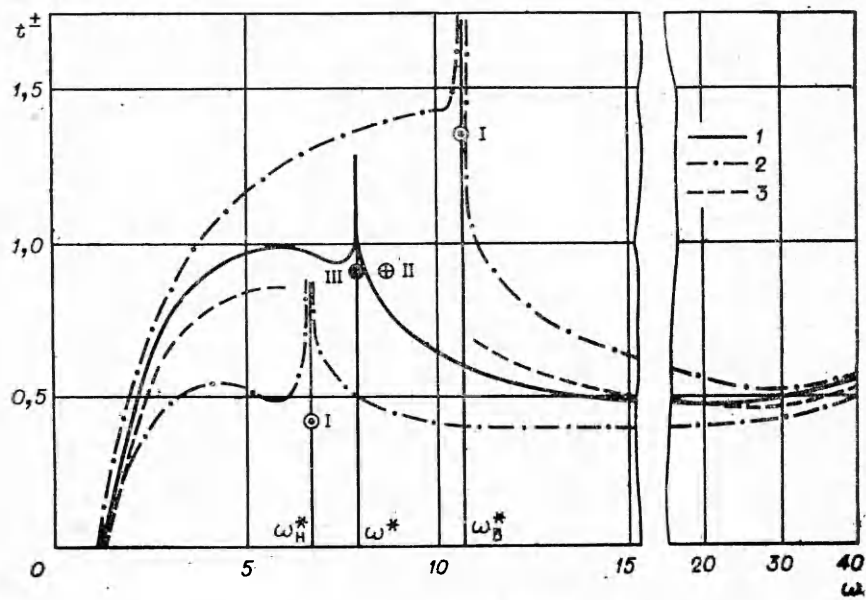


Рис. 4. Значения t^{\pm} при $\Theta_n = -8$, $\beta=0$, $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$, $m=2$.
 1 — численное интегрирование; 2 — оценочные кривые; 3 — усреднение по полусумме.
 I — верхняя и нижняя оценки t^* ; II — усредненное значение t^* ; III — значение t^* , полученное интерполяцией.

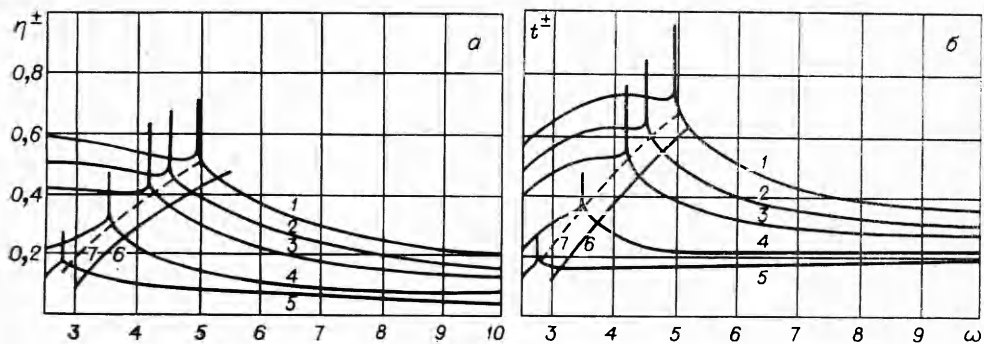


Рис. 5. Влияние параметра Θ_n на характеристики теплового взрыва.
 а) η^{\pm} ; б) t^{\pm} . Численное интегрирование при $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$, $\beta=0$ и Θ_n , равном -8 (1), -1 (2), $-0,5$ (3), $-0,1$ (4), -10^{-3} (5); зависимость $\eta^*(\omega^*)$ и $t^*(\omega^*)$; б — усреднение оценок, 7 — интерполяция.

Т а б л и ц а 2

Метод решения	$\omega=0,5$			$\omega=1,5$			$\omega=2,5$			$\omega=3,5$		
	z^-	η^-	t^-	z^-	η^-	t^-	z^-	η^-	t^-	z^-	η^-	t^-
Приближенный	0,06	0,66	-0,71	0,19	0,65	0,19	0,34	0,62	0,54	0,51	0,58	0,70
Численный	0,08	0,60	-0,71	0,22	0,59	0,17	0,38	0,57	0,52	0,55	0,54	0,69
По работе [2]	0,07	—	-0,76	0,20	—	0,20	0,34	—	0,58	0,48	—	0,76

квазистационарное приближение. Результаты численного решения работы [2] и табл. 1 несколько отличаются, и в последней они приведены без учета всплеска значений η^\pm и t^\pm в окрестности ω^* . Численное интегрирование не дает возможности выяснить величину всплеска η^* и t^* , поскольку в малой окрестности $\omega = \omega^*$ машинный счет вследствие ошибок округления становится неустойчивым. Это иллюстрирует рис. 4, где сглаживание всплеска проведено интерполяцией характеристик под и над пределом.

На рис. 5 представлены характеристики теплового взрыва на различных режимах, полученные численным интегрированием исходной системы для ряда значений Θ_n . С ростом $|\Theta_n|$ η^\pm и t^\pm на всех режимах при фиксированном ω возрастают. В табл. 2 представлены результаты расчетов характеристик под пределом для мономолекулярной реакции при $\Theta_n = -8$, $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0,03$. Сравнение результатов табл. 2 с расчетами по формулам работы [2] показывает, что под пределом первое квазистационарное приближение так же хорошо описывает характеристики, как и предложенная в настоящей работе теория.

Результаты численных и приближенных методов позволяют заметить, что параметр β существенно влияет на ω^* и слабо — на все остальные характеристики под, на и над пределом.

Над пределом самовоспламенения формулы (4.9), как и результаты работы [2], не дают хорошего соответствия с итогом численного интегрирования, что указывает на существенное влияние параметра ϵ , входящего сингулярно в систему (1.1).

5. Влияние параметра γ на характеристики теплового взрыва под и над пределом воспламенения

При построении поправок на параметр γ воспользуемся системой (1.1) при $\beta = 0$. Согласно [4, 6], вне малой окрестности $t = \Theta_n$ решение системы (1.1) при $\beta = 0$ может быть представлено в виде

$$z = \bar{z}_0(t) + \epsilon \bar{z}_1(t) + O(\epsilon^2), \quad \eta = \bar{\eta}_0(t) + \epsilon \bar{\eta}_1(t) + O(\epsilon^2).$$

Решение $\{\bar{z}_0(t), \bar{\eta}_0(t)\}$ получено выше, а $\{\bar{z}_1, \bar{\eta}_1\}$ находятся по [6]. После ряда простых преобразований получаем с точностью $O(\epsilon)$ выражения для поправок на характеристики под пределом

$$\Delta z^- = - \frac{1 + \omega \psi(\omega)}{(1 - z_0^-) \exp(1)}, \quad \Delta t^- = - \frac{\omega \psi(\omega) (m - 1 + z_0^-) + (m - 1) z_0^-}{z_0^- (1 - z_0^-) \exp(1)},$$

$$\Delta \eta^- = - \frac{\psi(\omega) (m - 2 + 2z_0^-) + z_0^- (m - 1) \omega^{-1}}{1 - z_0^-}, \quad (5.1)$$

где

$$\psi(\omega) = z_0^- \omega^{-1} \left[\ln(1 - z_0^-) - \int_{\Theta_H}^{t_0^-} \frac{1 + \ln(1 - \bar{z}_0(s))}{1 - \bar{z}_0(s)} \exp\left(-\int_s^{t_0^-} \frac{dx}{1 - \bar{z}_0(s)}\right) ds \right],$$

Сами же характеристики с точностью $O(\beta^2 + \varepsilon^2)$ определяются по формуле

$$x = x_0^- + \beta x_1^- + \gamma \omega \Delta x^-, \quad (5.2)$$

где $\Delta x^- = \{\Delta z^-, \Delta \eta^-, \Delta t^-\}$.

Для определения поправок на γ над пределом воспользуемся результатами работы [7]. После незначительных изменений их можно применить для вычисления координат вектора смещения $\bar{\Delta}(\Delta \eta^+, \Delta t^+)$. Этот вектор в плоскости (η, t) направлен от проекции точки нарушения разрешимости системы (2.1) к проекции вертикальной ε -трубки, внутри которой находится решение $z(t)$ системы (1.1) (при $\beta=0$) в момент взрыва.

Таким образом, при $\omega > \omega^*$ с учетом выражения $\varepsilon = \gamma \omega$ получаем поправки в характеристиках теплового взрыва на параметр γ

$$\begin{aligned} \Delta \eta^+ &= \gamma^{2/3} \Omega \left[\frac{2(1 - \eta_0^+) \exp(1)}{\omega(1 - \eta_0^+) - m \exp(1)} \right]^{1/3} + \\ &+ \gamma \ln(\gamma \omega) \left[-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{m \exp(1)}{\omega(1 - \eta_0^+) - m \exp(1)} \right], \quad (5.3) \\ \Delta t^+ &= \gamma^{2/3} \Omega \left[\frac{2(1 - \eta_0^+) \omega^3 \exp(-2)}{\omega(1 - \eta_0^+) - m \exp(1)} \right]^{1/3} + \\ &+ \gamma \ln(\gamma \omega) \left[\frac{2\omega}{9 \exp(1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{m\omega}{\omega(1 - \eta_0^+) - m \exp(1)} \right], \end{aligned}$$

где $\Omega = 1,985$, а сами характеристики над пределом с точностью $O(\beta^2 + \varepsilon)$ определяются по формуле

$$x^+ = x_0^+ + \beta x_1^+ + \Delta x^+(\gamma). \quad (5.4)$$

В выражениях (5.2), (5.4) члены, учитывающие поправки на β и γ , имеют, согласно (4.6), (4.8), (5.1), (5.3), при $\omega = \omega^*$ положительные полюса. Это подтверждает явление всплеска, выявленное численным интегрированием и аналогичное явлению всплеска, полученному в работах [8, 9].

На рис. 6 представлена зависимость $t^+(\omega)$, полученная численным интегрированием и по формуле (5.4). Для характеристики η^+ в широком интервале изменения ω совпадение хорошее, а для t^+ в формуле (5.4) следует ввести согласующую поправку и проводить вычисления по формуле

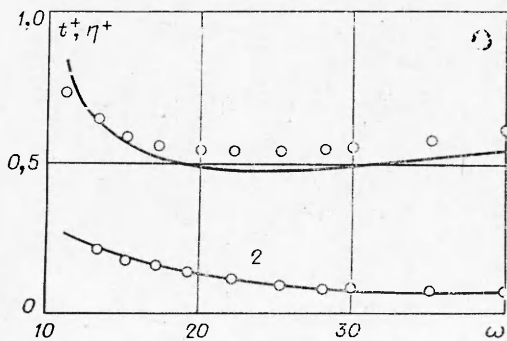


Рис. 6. Значения t^+ (1) и η^+ (2) при $m=2$, $\beta=0,03$, $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$, $\Theta_H=-8$; точки — численное интегрирование, линии — приближенные значения.

$$t^+ = t_0^+ + \beta t_1^+ + \Delta t^+(\gamma) + (0,05 + \beta),$$

которая обладает достаточной точностью для $m=1, 2$.

Зная зависимость $t^+(\omega)$, легко получить безразмерный период индукции по формуле $\tau = \omega^{-1}[t^+(\omega) - \Theta_n]$. На рис. 7 приведена зависимость $\tau = \tau(\Delta)$ под и над пределом. Хорошее соответствие при $\Delta < \Delta_n$ и $\Delta > \Delta_n$ указывает на возможность практического использования предложенных формул.

Подведем итоги проведенного исследования.

1. Для простых реакций сформулированы и доказаны основные соотношения, позволяющие получить двухсторонние оценки на характеристики теплового взрыва на различных режимах при $\beta=0$ и $\varepsilon=0$.
2. Получены приближенные формулы для расчетов характеристик теплового взрыва при $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и любых $\Theta_n < 0$.
3. Проведено исследование влияния параметра Θ_n на характеристики на всех режимах при $\beta=0$ и $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$.
4. Проведено сравнение результатов, полученных численным интегрированием задачи, по приближенным формулам настоящей работы и формулам работ [1—3].
5. Предложенная методика приближенных расчетов в отличие от метода [1—3] учитывает все исходные параметры и дает хорошее качественное и количественное соответствие с результатами численного интегрирования.
6. Отмечен качественный эффект всплеска значений характеристик η^\pm , i^\pm в окрестности критического значения ω^* , аналогичный всплеску, рассмотренному ранее в [8, 9].

В заключение авторы выражают признательность А. Г. Мержанову за полезные советы при обсуждении работы.

Поступила в редакцию
10/XII 1976,
после доработки — 6/VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов. Докл. АН СССР, 1961, 140, 3, 637.
2. А. Г. Мержанов, А. Г. Струнина. НТПГВ, 1965, 1, 59.
3. В. В. Барзыкин. ФГВ, 1973, 9, 1, 37.
4. А. Н. Тихонов. Математический сборник, 1952, 31, 3, 575.
5. А. И. Вольперт, С. И. Худяев. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.
6. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
7. Л. С. Понтрягин. Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, 3, 605.
8. В. В. Барзыкин, В. Т. Гонтковская и др. ПМТФ, 1964, 3.
9. И. С. Любченко. Докл. АН СССР, 1969, 188, 4, 842.

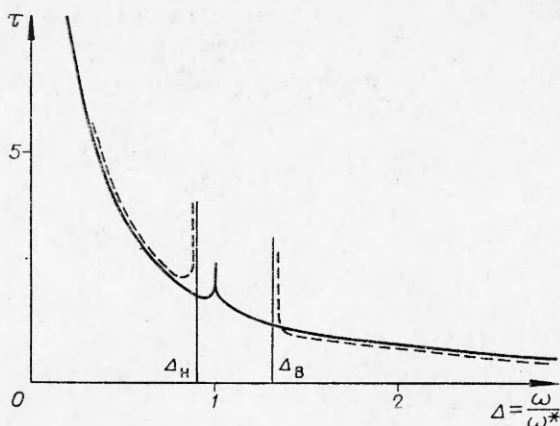


Рис. 7. Период индукции $\tau(\Delta)$ при $m=1$, $\Theta_n=-8$, $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$, $\beta=0$.
— численное интегрирование; - - - приближенные значения.