

УДК 539.3

МЕТОД РАСЧЕТА СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ О СОСТАВНУЮ ПРЕГРАДУ

В. А. Бабаков

Оклендский технологический университет, 1010 Окленд, Новая Зеландия

E-mail: vitali.babakov@aut.ac.nz

Построено кинематически возможное поле скоростей, позволяющее вычислить все необходимые интегралы в квадратурах и получить аналитическое решение задачи о силе сопротивления, возникающей при внедрении ударника в преграду. При решении задачи применяются модель Сен-Венана жесткопластического тела и теорема о верхней оценке предельной нагрузки. Суть применяемого метода состоит в использовании уравнения равновесия в форме уравнения Лагранжа. Построенное кинематически возможное поле скоростей позволяет получить верхнюю оценку предельной нагрузки, т. е. оценить силу сопротивления среды прониканию ударника.

Ключевые слова: кинематически возможное поле скоростей, ударник, жесткопластическое тело, верхняя оценка предельной нагрузки, составная преграда.

Задачи о проникании ударника в преграду в точной постановке являются достаточно сложными, поэтому для получения их решения необходимо применять современные вычислительные средства, а также проводить детальный анализ используемых вычислительных схем. Наряду с точными решениями задачи целесообразно находить приближенные решения, позволяющие достаточно легко и быстро получать приближенные оценки искомых величин. Следует отметить, что приближенные решения не заменяют численных решений и могут рассматриваться лишь как первое приближение решения задачи.

В работах [1, 2], по-видимому, впервые было предложено использовать метод верхней оценки при решении задач о проникании ударника в преграду. Этот метод получил развитие в [3, 4].

Существуют различные методы аналитического исследования процесса проникания. Важнейший среди этих методов предполагает использование простых математических моделей твердого тела, достоверно описывающих изучаемое явление и позволяющих получить решение в аналитическом виде. В настоящей работе рассматривается диапазон низких скоростей проникания, в котором необходимо учитывать прочностные свойства материала. Существенное различие прочностей ударника и мишени (например, железо — грунт, железо — бетон) позволяет выделить класс задач, в которых можно не учитывать деформацию ударника, считая его абсолютно жестким.

В качестве модели преграды применяется модель идеального несжимаемого жесткопластического материала, позволяющая описывать большие пластические деформации. Правомерность применения этой модели при анализе процесса проникания обоснована следующими аргументами. В случае больших деформаций их упругими составляющими можно пренебречь в силу их малости и рассматривать среду как жесткопластическую. В твердом теле поступающая извне энергия будет расходоваться на изменение его объема,

формы, а также кинетической энергии. Относительно неглубокое проникание ударника и наличие у преграды свободных поверхностей (лицевой или тыльной) не позволят развиться большим объемным деформациям. Гипотеза о несжимаемости материала будет учитывать лишь то обстоятельство, что работа, затраченная на всестороннее сжатие материала, существенно меньше работы, затраченной на сдвиг, т. е. на изменение формы. Естественно, в условиях стесненной деформации того же материала необходим учет его объемного сжатия, вследствие чего гипотеза о несжимаемости становится неприемлемой.

Определение предельных нагрузок, т. е. нагрузок, при которых начинается процесс деформирования, является достаточно сложной задачей даже при использовании простой модели идеального несжимаемого жесткопластического материала. Однако две предельные теоремы о верхней и нижней оценках предельных нагрузок позволяют оценить предельные нагрузки. Достаточно простой является процедура построения верхней оценки на основе уравнения равновесия в форме уравнения Лагранжа в рамках модели Сен-Венана — Мизеса (модели Прандтля — Рейсса, в которой пренебрегается упругими деформациями) [5]. Таким образом, задача сводится к заданию поля скоростей, наиболее точно описывающего кинематику процесса. При этом при построении адекватного поля скоростей необходимо использовать результаты натуральных экспериментов и лабораторного моделирования (см., например, [6]).

Построить нижнюю оценку предельной нагрузки значительно труднее, поскольку при этом необходимо решать систему трех уравнений в частных производных (уравнения Коши), удовлетворяющих всем граничным условиям. При этом в зонах пластичности напряжения не должны удовлетворять условию пластичности. Следует отметить, что с использованием верхней оценки предельной нагрузки можно определить диапазон начальных значений скоростей, в котором обеспечивается определенная глубина проникания ударника (расчетная глубина проникания будет оцениваться снизу, т. е. определяться с запасом).

Рассмотрим гладкий, абсолютно жесткий ударник радиусом a , который ударяется с начальной скоростью V_0 о составную преграду (слой толщиной H на полупространстве), в результате чего формируется область течения в виде канала с внешним радиусом, равным b (рис. 1). Размеры канала определяются в процессе решения. На рис. 2 показана схема пластического течения материала (области I–IV). В областях I, II частицы преграды разворачиваются в направлении свободной поверхности. В области III течение происходит в вертикальном направлении. В области IV материал неподвижен (“мертвая” зона).

В соответствии с [1, 2] предлагается следующее аналитическое описание поля скоростей. Область I представляет собой пластически деформируемый диск. В цилиндрической системе координат (начало координат находится на дне канала течения) компонента скорости v_z удовлетворяет граничным условиям на конце ударника и дне канала течения, компонента v_r определяется из условия несжимаемости (величина V_0 полагается равной единице):

$$v_r^{(I)} = \frac{r}{2t}, \quad v_z^{(I)} = \frac{z}{t}$$

(t — расстояние между концом ударника и дном канала). Область III представляет собой область течения в вертикальном направлении:

$$v_r^{(III)} = 0, \quad v_z^{(III)} = V_1 = \frac{1}{\delta^2 - 1}$$

($\delta = b/a$). Область II — область пластического деформирования, в которой компоненты скорости выбираются в следующем виде:

$$v_r^{(II)} = \frac{a^2}{2t} \frac{1}{r}, \quad v_z^{(II)} = \frac{t_1}{t} \frac{1}{\delta^2 - 1}.$$

От области I область II отделяется поверхностью AB , от области III — поверхностью AC ,

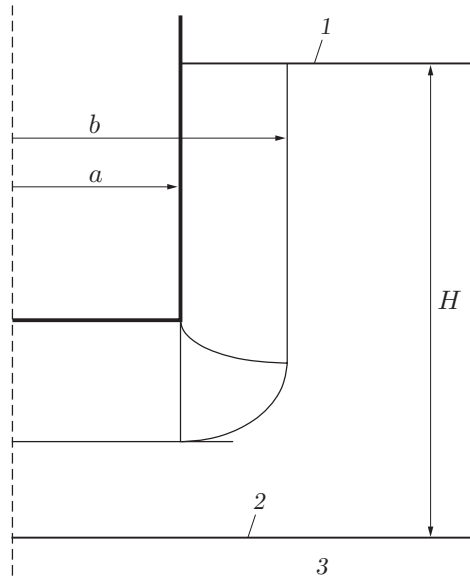


Рис. 1

Рис. 1. Схема задачи:

1 — свободная поверхность, 2 — граница слоя, 3 — полупространство

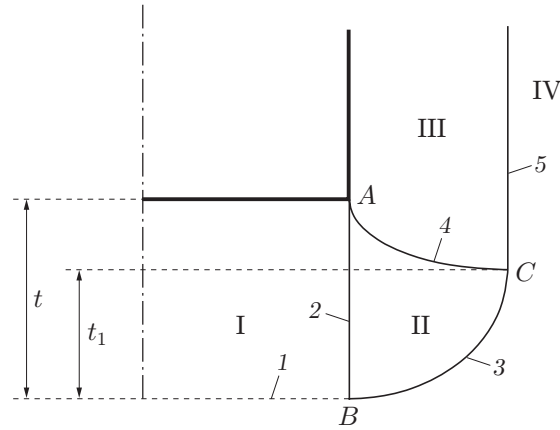


Рис. 2

Рис. 2. Схема пластического течения материала:

I–IV — области пластического течения, 1–5 — поверхности разрыва касательных скоростей

от области IV — поверхностью BC . Эти поверхности являются поверхностями разрыва касательных скоростей. Отметим, что уравнения поверхностей AB и AC неизвестны и будут определены в процессе решения. В области IV $v_4 = 0$.

Нетрудно показать, что предлагаемые поля скоростей удовлетворяют уравнению несжимаемости

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

и всем граничным условиям.

Уравнение равновесия в форме уравнения Лагранжа имеет вид

$$\int_S \sigma_{ni} v_i dS = \tau_s \int_V H dV + \sum_{k=1}^N \tau_s \int_{L_k} |[v_\tau]| dL_k,$$

где $H = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$; $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$; v_i — компоненты вектора скорости; L_k — поверхности разрыва скоростей; $[v_\tau]$ — скачок тангенциальной компоненты скорости; τ_s — предел пластичности.

Используя выражения для компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(I)} &= \frac{1}{2t}, & \varepsilon_\varphi^{(I)} &= \frac{1}{2t}, & \varepsilon_z^{(I)} &= -\frac{1}{t}, \\ \varepsilon_r^{(II)} &= -\frac{a^2}{2tr^2}, & \varepsilon_\varphi^{(II)} &= \frac{a^2}{2tr^2}, & \varepsilon_z^{(II)} &= 0, \\ \varepsilon_{ij}^{(III)} &= 0, \end{aligned}$$

получаем

$$H^I = \frac{\sqrt{3}}{t}, \quad H^{II} = \frac{a^2}{tr^2}, \quad H^{III} = 0.$$

В зависимости от глубины проникания ударника граница между слоем и полупространством может быть расположена следующим образом: 1) находиться ниже канала течения; 2) пересекать поверхность BC ; 3) пересекать поверхность AC ; 4) находиться выше дна ударника.

Далее рассматривается случай 3, характеризующийся следующими неравенствами:

$$t - t_1 > H - h \quad (H > h)$$

(h — расстояние от свободной поверхности до дна ударника; t_1 — расстояние от точки C до дна канала).

Уравнения поверхностей AC и BC соответственно можно получить из условий непрерывности нормальных скоростей при переходе через эти поверхности [1]:

$$z = \frac{t - t_1}{a^2(\delta^2 - 1)} (a^2\delta^2 - r^2) + t_1, \quad z = \frac{t_1}{\delta^2 - 1} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right).$$

Координата точки O (точки пересечения границы слоя и полупространства с поверхностью AC) $r = R_{01}$ определяется следующим образом:

$$R_{01} = a \sqrt{\frac{(H - h)(\delta^2 - 1) + t - t_1}{t - t_1}}.$$

В области I работа пластического деформирования A^I выражается в виде интеграла

$$A^I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\tau_{s1} \int_{t+h-H}^t + \tau_{s2} \int_0^{t+h-H} \right) H_1 r dr dz = \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{t} [(H - h)(\tau_{s1} - \tau_{s2}) + t\tau_{s2}],$$

в области II работа пластического деформирования A^{II} выражается в виде суммы трех интегралов A_{21} , A_{22} , A_{23} :

$$A_{21} = \tau_{s1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{R_{01}} \int_{t+h-H}^{z_{C4}} H_2 r dr dz =$$

$$= \tau_{s1} \frac{\pi a^2}{t} \left[\frac{t - t_1}{\delta^2 - 1} \left(1 - \frac{R_{01}^2}{a^2} \right) + \left(\frac{t - t_1}{\delta^2 - 1} + H - h \right) \ln \frac{R_{01}^2}{a^2} \right],$$

$$A_{22} = \tau_{s2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{R_{01}} \int_{z_{C3}}^{t+h-H} \frac{a^2}{tr^2} r dr dz =$$

$$= \tau_{s2} \frac{\pi a^2}{t} \left[\frac{t_1}{\delta^2 - 1} \left(1 - \frac{R_{01}^2}{a^2} \right) + \left(\frac{t_1}{\delta^2 - 1} + t + h - H \right) \ln \frac{R_{01}^2}{a^2} \right],$$

$$A_{23} = \tau_{s2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_{01}}^{a\delta} \int_{z_{C3}}^{z_{C4}} \frac{a^2}{tr^2} r dr dz = \tau_{s2} \frac{\pi a^2}{t} \left[\frac{t}{\delta^2 - 1} \left(\frac{R_{01}^2}{a^2} - \delta^2 \right) + \frac{t\delta^2}{\delta^2 - 1} \ln \frac{R_{01}^2}{a^2} \right]$$

(z_{C3} , z_{C4} — координаты z на поверхностях разрыва 3, 4 соответственно).

Остается вычислить работу пластического деформирования на поверхностях разрыва скоростей:

$$B_1 = \tau_{s2} \frac{\pi a^3}{3t},$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\tau_{s1} \int_{t+h-H}^t + \tau_{s2} \int_0^{t+h-H} \right) \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{t_1(\delta^2 - 1)} \right) a d\varphi dz = \\
&= \frac{2\pi a}{t} \left(\frac{t t_1 \tau_{s1} + t_1(t+h-H)(\tau_{s2} - \tau_{s1})}{\delta^2 - 1} + \frac{1}{2} (\tau_{s1} t^2 + (t+h-H)^2 (\tau_{s2} - \tau_{s1})) \right), \\
B_3 &= \tau_{s2} \frac{\pi a}{t} \left(a^2(\delta - 1) + \frac{4t_1(\delta^3 - 1)}{\delta(\delta^2 - 1)^2} \right), \\
B_4 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\tau_{s1} \int_a^{R_{01}} + \tau_{s2} \int_{R_{01}}^{a\delta} \right) \left(\frac{2(t-t_1)^2}{t a^2 (\delta^2 - 1)^2} + \frac{a^2}{2t} \right) dr = \\
&= \frac{\pi a}{t} \left\{ \frac{4(t-t_1)^2}{3(\delta^2 - 1)^2} \left[\tau_{s1} \left(\frac{R_{01}^3}{a^3} - 1 \right) + \tau_{s2} \left(\delta^3 - \frac{R_{01}^3}{a^3} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + a^2 \left[\tau_{s1} \left(\frac{R_{01}}{a} - 1 \right) + \tau_{s2} \left(\delta - \frac{R_{01}}{a} \right) \right] \right\}, \\
B_5 &= \frac{2\pi a \delta}{\delta^2 - 1} [\tau_{s1} H + \tau_{s2} (t - t_1 + h - H)].
\end{aligned}$$

Здесь B_1 — интеграл вдоль дна канала; B_2, B_3, B_4 — интегралы вдоль поверхностей AB, BC и AC соответственно; B_5 — интеграл вдоль цилиндрической поверхности канала.

При $\tau_{s1} = \tau_{s2}$ (однородный материал) приведенные выше формулы упрощаются и совпадают с известными формулами [1].

Для того чтобы закончить решение, необходимо подставить все вычисленные интегралы в уравнение Лагранжа и найти минимум этой функции. В результате будут найдены размеры канала течения и сила сопротивления внедрению ударника.

Случаи 1, 2, 4 рассматриваются аналогично. При этом все интегралы вычисляются аналитически. Результаты не приводятся вследствие их громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабаков В. А., Каримов И. М.** О верхней оценке анализа проникания ударника в деформируемую среду // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1978. № 2. С. 46–51.
2. **Фомин В. М.** Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников, И. И. Шабалин, В. А. Бабаков, В. Ф. Куропатенко, А. Б. Киселев, Ю. А. Тришин, А. И. Садырин, С. П. Киселев, И. Ф. Головнев. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
3. **Сарайкин В. А.** Оценка предельной нагрузки при внедрении кругового цилиндра в пластическую объемно-сжимаемую среду // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2004. № 2. С. 13–24.
4. **Vabakov V.** The problem about limit load for a circular cylindrical punch // Proc. of the 2nd Curtin university technology, science and engineering intern. conf., Sarawak (Malaysia), 24–25 Nov. 2009. [Electron. resource]. Sarawak: Curtin Univ. of Technol., S. a. ESF_13.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
6. **Бабаков В. А., Каримов И. М.** Вдавливание плоского штампа в пластическую среду // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1978. № 1. С. 30–35.

Поступила в редакцию 25/IV 2011 г.