

УДК 532.5

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ДВУХ ПЛАСТИН С РАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

М. М. Алимов

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева  
Казанского государственного университета, 420008 Казань

При малых числах Пекле аналитически получены три старших члена асимптотического разложения решения задачи конвективного теплообмена системы двух параллельных пластин, имеющих одинаковую длину и постоянную температуру поверхности, с безграничным равномерным потоком жидкости при малых числах Прандтля.

**Ключевые слова:** конвективный теплообмен, параллельные пластины, асимптотическое решение, число Пекле.

**Введение.** Предположение о равномерности потока жидкости при малом числе Пекле  $Pe$  означает, что число Рейнольдса велико, а число Прандтля мало. На практике такой случай наблюдается редко [1]. Однако он имеет место при анализе процесса замораживания фильтрующих грунтов. Как показано в [2], задача о равновесной форме ледопородных тел, образующихся вокруг замораживающих колонок в плоском фильтрационном потоке, решается в два этапа. На первом этапе используется преобразование Буссинеска для уравнения конвективной теплопроводности в талой зоне. В результате в плоскости комплексного гидродинамического потенциала возникает задача о теплообмене системы параллельных пластин с равномерным потоком жидкости. На втором этапе решается задача сопряжения.

Численный анализ полной задачи для двух колонок показал [3], что в некотором диапазоне определяющих параметров (числа Пекле  $Pe$  и мощности колонок  $Q$ ) задача имеет три решения. Соответственно в квазистационарном процессе увеличения-уменьшения мощности  $Q$  при фиксированном значении  $Pe$  наблюдается гистерезис смыкания-размыкания. Для его аналитического обоснования асимптотическими методами при  $Pe \ll 1$  необходим учет третьего члена асимптотики.

В работе [4] получена трехчленная асимптотика решения задачи теплообмена одной пластины с равномерным потоком жидкости. При этом использовались аппарат интегральных уравнений и известное спектральное соотношение [5]. Однако для двух параллельных пластин такое спектральное соотношение отсутствует. Поэтому асимптотика строится с помощью метода сращивания асимптотических разложений [6].

**1. Постановка задачи.** Предполагается, что пластины одинаковой длины с одинаковой постоянной температурой поверхности расположены симметрично относительно осей  $x$ ,  $y$  и ориентированы вдоль оси  $x$  (рис. 1, *a*). Набегающий поток также параллелен оси  $x$ . В безразмерном виде установившийся конвективный теплообмен таких пластин с

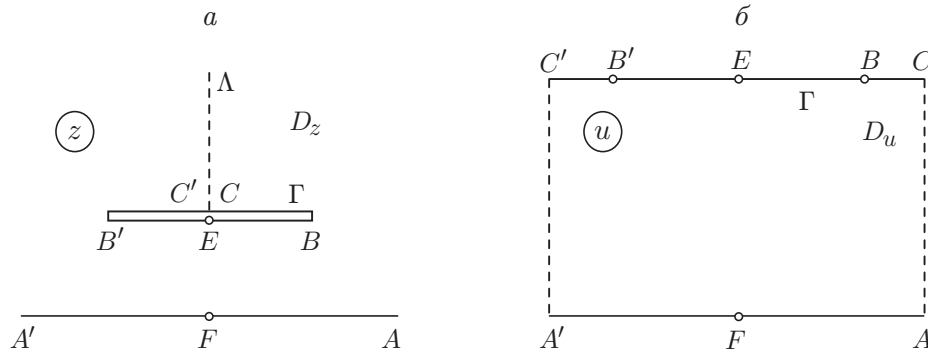


Рис. 1. Верхняя половина физической плоскости  $z$  (а) и плоскость вспомогательной переменной  $u$  (б)

безграничным потоком жидкости описывается системой уравнений [7]

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \Delta \Theta, \quad z \in D_z, \quad \Theta = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \Theta = 1, \quad |z| \rightarrow \infty, \\
 \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \Theta(x, -y) = \Theta(x, y), \quad z \in D_z.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь  $D_z$  — верхняя половина физической плоскости  $z = x + iy$  с вырезанной пластиной  $\Gamma$ ;  $\Theta(x, y)$  — функция распределения безразмерной температуры;  $\operatorname{Re}$  — число Пекле, вычисленное по половине длины пластин. На рис. 1,а штриховой линией показан вспомогательный разрез  $\Lambda$ , проходящий по части оси  $y$ , лежащей выше пластины. Он будет использован в дальнейшем для обеспечения однозначности вспомогательных функций в области  $D_z \cup \Lambda$ , когда их однозначность в  $D_z$  отсутствует. Точка  $F$  — начало координат. Точки  $C, B, E, B', C'$  лежат на пластине и соответствуют значениям  $z = ih; 1 + ih; ih; -1 + ih; ih$  ( $h$  — половина безразмерного расстояния между пластинами). Хотя точки  $C, E, C'$  соответствуют одному значению  $z$ , их следует различать: если обозначить через  $\Gamma^+, \Gamma^-$  верхнюю и нижнюю стороны разреза  $\Gamma$ , а через  $\Lambda^+, \Lambda^-$  — правую и левую стороны разреза  $\Lambda$ , то  $E \in \Gamma^-, C \in \Gamma^+ \cap \Lambda^+, C' \in \Gamma^+ \cap \Lambda^-$ . Последнее условие в системе (1.1) формально лишнее для решения задачи в области  $D_z$ , однако оно указывает, каким образом это решение продолжается на всю плоскость  $z$ .

С помощью преобразования  $\Theta(x, y) = T(x, y) \exp(\operatorname{Re} x)$  задача (1.1) сводится к задаче для функции  $T(x, y)$

$$\begin{aligned}
 \Delta T = \operatorname{Re}^2 T, \quad z \in D_z, \quad T = 0, \quad z \in \Gamma, \quad T = e^{-\operatorname{Re} x}, \quad |z| \rightarrow \infty, \\
 \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad T(x, -y) = T(x, y), \quad z \in D_z.
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

В случае невыполнения граничного условия на  $\Gamma$  [2] решение этой задачи можно представить в виде граничного интегрального оператора

$$T(x, y) = e^{-\operatorname{Re} x} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mu(x') \sum_{n=\pm 1} K_0 \left( \operatorname{Re} \sqrt{(x - x')^2 + (y - nh)^2} \right) dx',
 \tag{1.3}$$

где  $\mu(x) = \partial T / \partial y|_{\Gamma^+} - \partial T / \partial y|_{\Gamma^-}$  — плотность источников, распределенных на контурах  $\Gamma$ .

Используя граничное условие на контуре  $\Gamma$  из системы (1.2), формально можно получить граничное интегральное уравнение. Его решение окончательно определяет вид

функции  $T(x, y)$ , а значит, функции  $\Theta(x, y)$ . Соответственно из формул

$$q = \int_{-1}^1 \mu(x) dx, \quad Q = \int_{-1}^1 e^{\text{Pe}x} \mu(x) dx \quad (1.4)$$

можно определить суммарный расход источников  $q$  и суммарный тепловой поток  $Q$  к каждой пластине.

Для произвольных  $\text{Pe}$  граничное интегральное уравнение решается только численно, но для случая  $\text{Pe} = \varepsilon \ll 1$  можно провести асимптотический анализ его решения. Тогда плотность источников  $\mu(x)$  и функция  $T(x, y)$  могут быть представлены в виде

$$\mu(x) = \mu_{,0}(x) + \varepsilon \mu_{,1}(x) + \varepsilon^2 \mu_{,2}(x) + O(\varepsilon^3); \quad (1.5)$$

$$T(x, y) = T_{,0}(x, y) + \varepsilon T_{,1}(x, y) + \varepsilon^2 T_{,2}(x, y) + O(\varepsilon^3). \quad (1.6)$$

Нижние индексы используются также для обозначения различных констант и специальных функций, поэтому при записи членов асимптотического разложения дополнительно используется запятая перед индексом.

Строго говоря, в асимптотическом разложении (1.5), (1.6) должны присутствовать члены вида  $\varepsilon^\alpha (\ln \varepsilon)^\beta$  [5], т. е. коэффициенты разложения  $\mu_{,i}$ ,  $T_{,i}$  зависят также от  $\ln \varepsilon$ . Однако эта зависимость слабая и не меняет асимптотический характер разложений. Поэтому использование соотношений (1.5), (1.6) для упрощения выкладок оправдано.

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений [6] будем искать решения двух видов: в окрестности пластин и в окрестности бесконечности, а недостающие условия для их полного определения находить путем сращивания. Следует отметить, что в окрестности бесконечности меняется порядок дифференциального уравнения. Соответствующее асимптотическое разложение называется погранслойным или внутренним. Для его получения можно использовать общий вид решения (1.3) более общей задачи. Регулярное, или внешнее, разложение можно получить формальным разложением задачи (1.2) по малому параметру  $\varepsilon$  при условии  $|z| \sim 1$ .

**2. Внутреннее (погранслойное) асимптотическое разложение.** Выберем координаты  $X = \varepsilon x$ ,  $Y = \varepsilon y$  в качестве погранслойных. Сращивание будем проводить по действительной оси, поэтому в дальнейшем потребуются значения  $T$  только при  $Y = 0$ . С учетом этого из (1.3) получим

$$\pi(e^{-X} - T|_{Y=0}) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mu\left(\frac{X'}{\varepsilon}\right) K_0\left(\sqrt{(X - X')^2 + \varepsilon^2 h^2}\right) \frac{dX'}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Для входящей под интеграл функции  $\mu(x)$  введем три первых момента

$$m_i = \int_{-1}^1 x^i \mu(x) dx, \quad i = 0, 1, 2.$$

Далее, для функции Бесселя  $K_0$  в выражении (2.1) допустимо асимптотическое разложение в окрестности  $x \sim \infty$  такой, что  $X \sim 1$ ,  $X' \sim \varepsilon$ ,  $h \sim 1$ :

$$K_0\left(\sqrt{(X - X')^2 + \varepsilon^2 h^2}\right) = K_0(X) + K_0'(X)(-X' + \varepsilon^2 h^2/(2X)) + K_0''(X)X'^2/2 + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя его в формулу (2.1), с точностью до  $O(\varepsilon^3)$  найдем разложение вида

$$e^{-X} - T|_{Y=0} \approx \frac{m_0}{\pi} K_0(X) - \varepsilon \frac{m_1}{\pi} K_0'(X) + \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left[ m_0 h^2 \frac{K_0'(X)}{X} + m_2 K_0''(X) \right]. \quad (2.2)$$

Заметим, что асимптотическое представление (1.5) для функции  $\mu(x)$  приводит к аналогичным представлениям для  $m_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ):

$$m_0 = m_{0,0} + \varepsilon m_{0,1} + \varepsilon^2 m_{0,2} + O(\varepsilon^3), \quad m_1 = m_{1,0} + \varepsilon m_{1,1} + O(\varepsilon^2), \quad m_2 = m_{2,0} + O(\varepsilon).$$

Здесь  $m_{i,k}$  — неопределенные пока константы порядка единицы, причем из разложения (2.2) следует, что для определения моментов более высоких порядков потребуется меньшая точность.

**3. Сращивание регулярного асимптотического разложения с погранслои-ным.** Внешним (регулярным) разложением формально является разложение (1.6). При подстановке его в задачу (1.2) без граничного условия на бесконечности получим задачу

$$\begin{aligned} \Delta T_{,i} &= 0, \quad z \in D_z, & T_{,i} &= 0, \quad z \in \Gamma, \\ \frac{\partial T_{,i}}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, & T_{,i}(x, -y) &= T_{,i}(x, y), \quad z \in D_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

для  $T_{,0}(x, y)$ ,  $T_{,1}(x, y)$  и задачу

$$\begin{aligned} \Delta T_{,2} &= T_{,0}(x, y), \quad z \in D_z, & T_{,2} &= 0, \quad z \in \Gamma, \\ \frac{\partial T_{,2}}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, & T_{,2}(x, -y) &= T_{,2}(x, y), \quad z \in D_z \end{aligned} \quad (3.2)$$

для  $T_{,2}(x, y)$ . Задачи незамкнуты, поскольку в каждой из них отсутствует граничное условие на бесконечности. Для их получения срастим внешнее разложение (1.6) с внутренним (2.2) по действительной оси. Это значит, что функция  $T|_{Y=0}$ , выражаемая соотношением (2.2), при  $X \rightarrow 0$  должна быть устроена так же, как решение (1.6) задач (3.1), (3.2) при  $y = 0$  и  $x \rightarrow \infty$  [6]. Из определения погранслоиных координат следует, что устремить  $X$  к нулю при  $x \rightarrow \infty$  можно, представив, например,  $X$  в виде  $X \sim \sqrt{\varepsilon}$ .

Подставим  $X = \varepsilon x$  в выражение (2.2), а затем, используя формулы асимптотического разложения  $K_0$  и ее производных от малого аргумента [8], разложим полученное выражение по малым  $\varepsilon$ , оставляя три старших члена асимптотики:

$$\begin{aligned} T \Big|_{\substack{Y=0 \\ X=\varepsilon x}} &\approx 1 + \frac{m_0}{\pi} \left[ \rho(x) \left( 1 + \varepsilon^2 \frac{x^2}{4} \right) - \varepsilon^2 \frac{x^2}{4} \right] - \varepsilon x + \varepsilon \frac{m_1}{\pi} \left[ \varepsilon \frac{x}{4} - \varepsilon \frac{\rho(x)x}{2} - \frac{1}{\varepsilon x} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left\{ m_0 h^2 \left[ \frac{\rho(x)}{2} + \frac{1}{\varepsilon^2 x^2} - \frac{1}{4} \right] + m_2 \left[ \frac{\rho(x)}{2} - \frac{1}{\varepsilon^2 x^2} + \frac{1}{4} \right] \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\rho(x) = \ln(\varepsilon x/2) + \gamma$ ;  $\gamma \approx 0,53$  — константа Эйлера. Выделяя в выражении (3.3) члены различных порядков по  $\varepsilon$  и используя обозначения  $m_{i,k}$ , получим условия на бесконечности  $y = 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  для  $T_{,i}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} T_{,0}(x, y) \Big|_{y=0, x \rightarrow \infty} &= 1 + \frac{m_{0,0}}{\pi} \rho(x) - \frac{m_{1,0}}{\pi} x^{-1} + \frac{m_{0,0} h^2 - m_{2,0}}{2\pi} x^{-2} + O(x^{-3}), \\ T_{,1}(x, y) \Big|_{y=0, x \rightarrow \infty} &= -x + \frac{m_{0,1}}{\pi} \rho(x) - \frac{m_{1,1}}{\pi} x^{-1} + O(x^{-2}), \\ T_{,2}(x, y) \Big|_{y=0, x \rightarrow \infty} &= x^2 \left[ \frac{m_{0,0}}{4\pi} \rho(x) + \frac{1}{2} - \frac{m_{0,0}}{4\pi} \right] + x \left[ \frac{m_{1,0}}{4\pi} - \frac{m_{1,0}}{2\pi} \rho(x) \right] + \\ &+ \left[ \frac{4m_{0,2} + m_{0,0} h^2 + m_{2,0}}{4\pi} \rho(x) - \frac{m_{0,0} h^2 - m_{2,0}}{8\pi} \right] + O(x^{-1}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следует отметить, что члены порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  в погранслоином разложении (2.2) дают вклад в главный член разложения по  $\varepsilon$  (в выражении (3.3) это соответственно слагаемые,

содержащие  $x^{-1}$  и  $x^{-2}$ ). Остаточный член разложения (2.2) также даст вклад в главный член регулярного разложения, что подчеркивает знак “ $\approx$ ” в соотношении (3.3). Вместе с тем эти члены малы при разложении по малым  $1/x$ , поэтому в соотношениях (3.4) используется знак строгого равенства; соответствующий вклад включен в остаточные члены.

Сингулярная часть первого соотношения в (3.4) является граничным условием на бесконечности, замыкающим задачу (3.1) для  $T_0(x, y)$ . Это условие определяет структуру функции  $T_0(x, y)$ , в результате чего три регулярных члена соотношения (порядка 1,  $x^{-1}$  и  $x^{-2}$ ) дают три условия для определения  $m_{i,0}$ .

Аналогично из граничного условия на бесконечности для функции  $T_1(x, y)$  (второе соотношение в (3.4)) можно выделить сингулярную часть, которая совместно с (3.1) определяет структуру функции  $T_1(x, y)$ . Затем два регулярных члена разложения можно использовать для получения двух условий на  $m_{i,1}$ . Таким же образом определяется структура функции  $T_2(x, y)$ .

**4. Определение главного и линейного членов асимптотики.** В соответствии с п. 3 задача для функции  $T_0(x, y)$  записывается в виде системы (3.1) с сингулярной частью (3.4). Ее решение строится методом особых точек [9] с использованием эллиптических функций, для представления которых требуется некоторая вспомогательная плоскость  $u = \xi + i\eta$ . Области  $D_z$  в физической плоскости соответствует представленный на рис. 1, б прямоугольник  $D_u$  в плоскости  $u$ . Точкам  $A'$  и  $A$  соответствуют значения  $u = 0, 1$ , точкам  $F$  и  $E$  — значения  $u = 1/2; (1 + i\tau)/2$ . Боковые стороны прямоугольника  $D_u$  соответствуют вспомогательному разрезу  $\Lambda$  в плоскости  $z$ . Конформное отображение плоскости  $u$  на плоскость  $z$  осуществляет функция [10]

$$z(u) = -\frac{h}{\pi} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(u; i\tau), \quad (4.1)$$

где  $\vartheta_1(u; i\tau)$  — тета-функция. Вспомогательный параметр  $\tau$  ( $\text{Im } \tau = 0$ ) определяется только величиной  $h$ .

Аналогия с классической задачей о емкости плоского конденсатора позволяет утверждать, что зависимость  $h(\tau)$  монотонная. Конкретный ее вид определяется следующим образом [10]. Сначала последовательно находятся величины  $\alpha, s, \beta$ :

$$\alpha(\tau) = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}(0; i\tau), \quad s(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{K(\alpha^2) - E(\alpha^2)}{K(\alpha^2)}}, \quad \beta(\tau) = \frac{F(\arcsin s; \alpha^2)}{2K(\alpha^2)},$$

где  $K(\alpha^2), E(\alpha^2)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода;  $F(\arcsin s; \alpha^2)$  — неполный эллиптический интеграл первого рода. Величина  $h$  вычисляется по формуле

$$h(\tau) = \pi(\vartheta_4/\vartheta'_4)(\beta; i\tau). \quad (4.2)$$

При  $\tau \ll 1$ , точнее, при  $\tau < 0,1$  расчет по этим формулам становится невозможным, поскольку значение  $\alpha$  близко к единице и в промежуточных расчетах не хватает точности вычислений (например, точности вычислений пакета MAPLE). Однако в рассматриваемом случае достаточно оценки  $h \approx \tau$ , полученной, например, из физических соображений. Другая численная процедура, пригодная для всего диапазона параметра  $\tau$ , приведена в [3]. Зависимость  $h(\tau)$  показана на рис. 2.

Гармоническую функцию  $T_0(x, y)$  можно представить в виде

$$T_0(x, y) = m_{0,0}[F(z) + F(\bar{z})]/(2\pi), \quad (4.3)$$

где  $F(z)$  — аналитическая функция переменной  $z$ , такая что  $\text{Im } F(z) = 0$  при  $y = 0$ . С помощью выражения (4.1) от переменной  $z$  можно перейти к переменной  $u$ . Соответствующую

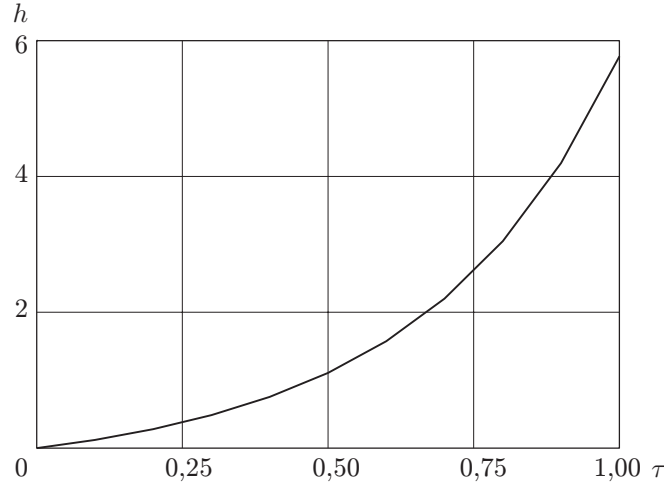


Рис. 2. Зависимость величины  $h$  от вспомогательного параметра  $\tau$

функцию обозначим через  $f(u)$ :  $F[z(u)] = f(u)$ . Введем также обозначения  $F_u(z)$  и  $F_{uu}(z)$ :  $F_u[z(u)] = f'(u)$ ,  $F_{uu}[z(u)] = f''(u)$ .

4.1. *Построение и анализ функции  $f(u)$* . Бесконечности  $x \rightarrow \infty$  в физической плоскости соответствует точка  $u = 1$ . Рассмотрим окрестность этой точки  $u = 1 - \delta$ ,  $\delta \ll 1$ . Величину  $\delta \ll 1$  можно связать с  $x \gg 1$  с помощью формулы (4.1) отображения  $z(u)$ . Используя разложение в ряд Тейлора для тета-функций из (4.1), найдем

$$x|_{u=1-\delta, \delta \ll 1} = \frac{h}{\pi\delta} \left[ 1 + \frac{\delta^2}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0; i\tau) \right] + O(\delta^3). \tag{4.4}$$

Эту формулу можно обратить:

$$\delta|_{u=x \gg 1} = \frac{h}{\pi x} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{\pi x} \right)^2 \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0; i\tau) \right] + O(x^{-5}). \tag{4.5}$$

Переходя в задаче (3.1) с сингулярной частью (3.4) к функции  $f(u)$  с учетом (4.4), получим следующую краевую задачу для  $f'(u)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f'(u) &\approx \delta^{-1}, & u = 1 - \delta, & & \operatorname{Re} f'(u) = 0, & u \in C'C, \\ \operatorname{Im} f'(u) &= 0, & u \in A'A, & & f'(u) = f'(u + 1), & u \in A'C'. \end{aligned} \tag{4.6}$$

По особенностям найдем эллиптическую функцию  $f'(u)$  и затем  $f(u)$  [9]:

$$f'(u) = -\frac{d}{du} \ln \frac{\vartheta_1}{\vartheta_4}(u; 2i\tau), \quad f(u) = -\ln \frac{\vartheta_1}{\vartheta_4}(u; 2i\tau). \tag{4.7}$$

С учетом полученных результатов можно детально описать поведение функции  $f(u)$  в окрестности точки  $u = 1$ . Имеем

$$\operatorname{Re} f(u)|_{u=1-\delta} = -\ln \left| \delta \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}(0; 2i\tau) \right| + \frac{\delta^2}{2} \left[ \frac{\vartheta_4'''}{\vartheta_4'}(0; 2i\tau) - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0; 2i\tau) \right] + O(\delta^4),$$

$$\operatorname{Re} f'(u)|_{u=1-\delta} = \delta^{-1} - \delta \left[ \frac{\vartheta_4'''}{\vartheta_4'}(0; 2i\tau) - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0; 2i\tau) \right] + O(\delta^3),$$

$$\operatorname{Re} f''(u)|_{u=1-\delta} = \delta^{-2} + \left[ \frac{\vartheta_4'''}{\vartheta_4'}(0; 2i\tau) - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}(0; 2i\tau) \right] + O(\delta^2).$$

Используя в этих соотношениях зависимость  $\delta(x)$  (4.5), исследуем поведение функций  $F(z)$ ,  $F_u(z)$  и  $F_{uu}(z)$  на бесконечности  $z = x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= \ln x + C_0 + C_2 x^{-2} + O(x^{-4}), \\ \operatorname{Re} F_u(z) &= (\pi/h)(x - C_1/x) + O(x^{-3}), \quad \operatorname{Re} F_{uu}(z) = (\pi^2/h^2)(x^2 + 2C_2) + O(x^{-2}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь  $C_i$  — функции параметра  $\tau$ :

$$\begin{aligned} C_0 &= \ln \left| \frac{\pi}{h(\tau)} \frac{\vartheta_4}{\vartheta_1'}(0; 2i\tau) \right|, \quad C_1 = \frac{h^2(\tau)}{3\pi^2} \sum_{k=2}^4 \left[ a_k \frac{\vartheta_k''}{\vartheta_k'}(0; 2i\tau) + \frac{\vartheta_k''}{\vartheta_k'}(0; i\tau) \right], \\ C_2 &= \frac{h^2(\tau)}{3\pi^2} \sum_{k=2}^4 \left[ \frac{a_k}{2} \frac{\vartheta_k''}{\vartheta_k'}(0; 2i\tau) - \frac{\vartheta_k''}{\vartheta_k'}(0; i\tau) \right], \quad a_2 = a_3 = -1, \quad a_4 = 2. \end{aligned}$$

Наконец, выпишем задачу, которой удовлетворяет функция  $f''(u)$ . Из системы уравнений (4.6) для  $f'(u)$  следует

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f''(u) &\approx \delta^{-2}, \quad u = 1 - \delta, \quad \operatorname{Re} f''(u) = 0, \quad u \in C'C, \\ \operatorname{Im} f''(u) &= 0, \quad u \in A'A, \quad f''(u) = f''(u+1), \quad u \in A'C'. \end{aligned}$$

4.2. *Построение функций  $T_0(x, y)$ ,  $T_1(x, y)$ .* Формулы (4.1), (4.3), (4.7) определяют вид функции  $T_0(x, y)$ . Из первого соотношения в (4.8) можно определить поведение функции  $T_0(x, y)$  на бесконечности  $z = x \rightarrow \infty$ :

$$T_{0,0}(x, y)|_{y=0, x \rightarrow \infty} = m_{0,0}(\ln x + C_0 + C_2 x^{-2})/\pi + O(x^{-4}).$$

Сравнивая это выражение с (3.4), найдем связь  $m_{i,0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с  $\varepsilon$ ,  $\tau$ :

$$\pi/m_{0,0} = \ln(2/\varepsilon) - \gamma + C_0, \quad m_{1,0} = 0, \quad m_{2,0} = m_{0,0}(h^2 - 2C_2). \quad (4.9)$$

Задача для  $T_1(x, y)$  записывается в виде системы (3.1) и условия на бесконечности в виде сингулярной части второго соотношения в (3.4). Заметим, что второе сингулярное слагаемое в условии на бесконечности имеет ту же структуру, что и сингулярная часть условия (3.4) для  $T_0(x, y)$ . Это приводит к появлению слагаемого  $m_{0,1}\pi^{-1}f(u)$  у функции  $T_1(x, y)$  и слагаемого вида  $m_{0,1}\pi^{-1}C_0$  у члена порядка единицы разложения  $T_1(x, y)$  на бесконечности. В то же время первое сингулярное слагаемое в условии на бесконечности не дает вклада порядка единицы в это разложение (см. ниже). В результате регулярный член второго соотношения в (3.4) порядка единицы дает условие вида  $m_{0,1}[\ln(\varepsilon/2) + \gamma] = m_{0,1}C_0$ , которое в силу первого соотношения в (4.9) удовлетворяется только в случае  $m_{0,1} = 0$ . Таким образом, в сингулярной части условия на бесконечности для  $T_1(x, y)$  остается только первое слагаемое.

Сравнивая задачу для  $T_1(x, y)$  с задачей (4.6) для функции  $f'(u)$ , получим

$$T_{1,1}(x, y) = -(h/\pi) \operatorname{Re} F_u(z).$$

Тогда второе выражение в (4.8) дает разложение  $T_1(x, y)$  на бесконечности

$$T_{1,1}(x, y)|_{y=0, x \rightarrow \infty} = -x + C_1 x^{-1} + O(x^{-3}). \quad (4.10)$$

Сравнивая члены порядка  $x^{-1}$  в соотношении (4.10) и втором соотношении в (3.4), получим  $m_{1,1} = -\pi C_1$ .

Отметим, что функция  $T_0$  обладает четной, а  $T_1$  — нечетной симметрией относительно оси  $y$  аналогично случаю одиночной пластины [4].

**5. Определение третьего члена асимптотики.** Граничное условие для функции  $T_2$  на бесконечности (третье соотношение в (3.4)) можно упростить, учитывая найденные выражения для  $m_{i,k}$ . С точностью до  $O(x^{-1})$  имеем

$$\frac{\pi}{m_{0,0}} T_{2,2}(x, y) \approx \frac{x^2 \ln x}{4} + \left( C_0 - 1 - \frac{\pi}{m_{0,0}} \right) \frac{x^2}{4} + \left( \frac{m_{0,2}}{m_{0,0}} + \frac{h^2 - C_2}{2} \right) \left( \ln \frac{\varepsilon x}{2} + \gamma \right) - \frac{C_2}{4}. \quad (5.1)$$

Так же как в п. 4, структуру функции  $T_{2,2}(x, y)$  как решения системы (3.2), (5.1) определяют сингулярные члены, т. е. первые три слагаемые в фигурных скобках в условии (5.1). Однако в этом случае функция  $T_{2,2}(x, y)$  бигармоническая и более сложна на бесконечности.

Введем вспомогательные функции  $P(z)$  и  $G(z)$ :

$$P(z) = \int_0^z F(z') dz', \quad G(z) = \frac{1}{2} \int_{z_E}^z P(z') dz' \quad (5.2)$$

и проанализируем их.

5.1. *Анализ вспомогательных функций.* Функция  $T(x, y)$  непосредственно связана с распределением температуры и поэтому однозначна вместе со своими производными всюду в области  $D_z$ . Соответственно однозначными будут и функции  $T_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) со своими производными. Вместе с тем функция  $F(z)$  неоднозначна в  $D_z$ : при обходе разреза  $\Gamma$  по любому замкнутому контуру ее мнимая часть увеличивается на  $\pi$ . Если провести вспомогательный разрез  $\Lambda$  (см. рис. 1,а), на котором  $\text{Im } F(z)$  претерпевает скачок, то в области  $D_z \cup \Lambda$  функция  $F(z)$  будет однозначной. Из определения функций  $P(z)$  и  $G(z)$  следует, что они также будут неоднозначными в области  $D_z$ .

С учетом сказанного выше можно утверждать, что функция  $F(z)$  в области  $D_z \cup \Lambda$  удовлетворяет краевым условиям

$$\text{Re } F(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \text{Im } F(z) = 0, \quad y = 0, \quad \text{Im } F(z) = \pm H(y - h)\pi/2, \quad x = \pm 0$$

( $H$  — функция Хевисайда;  $x = \pm 0$  — приближение к оси  $y$  справа и слева) и условию на бесконечности  $|z| \rightarrow \infty$

$$\text{Re } F(z)|_{|z| \rightarrow \infty} = \ln z + C_0 + C_2 z^{-2} + O(|z|^{-4}),$$

вытекающему из (4.8) с учетом того, что  $0 \leq \arg z \leq \pi/2$  и используется главная ветвь логарифма.

В соответствии с определением функции  $P(z)$  в области  $D_z \cup \Lambda$  она удовлетворяет краевым условиям вида

$$\begin{aligned} \text{Re } P(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \text{Im } P(z) = 0, \quad y = 0, \\ \text{Re } P(z) = \mp(y - h)H(y - h)\pi/2, \quad x = \pm 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

и условию на бесконечности  $|z| \rightarrow \infty$

$$P(z)|_{|z| \rightarrow \infty} = z \ln z + (C_0 - 1)z + P_\infty - C_2 z^{-1} + O(z^{-3}). \quad (5.4)$$

Здесь  $P_\infty$  — член разложения порядка единицы. Определим его вид.

В плоскости  $z$  проведем окружность большого радиуса  $R \gg 1$  с центром в начале координат (рис. 3,а). Точки ее пересечения с осями координат обозначим через  $A_1$  и  $A_2$ . Из определения функции  $P(z)$  имеем

$$\text{Re } P(z)|_{z=R} = \text{Re} \int_{FA_1} F(z') dz'.$$



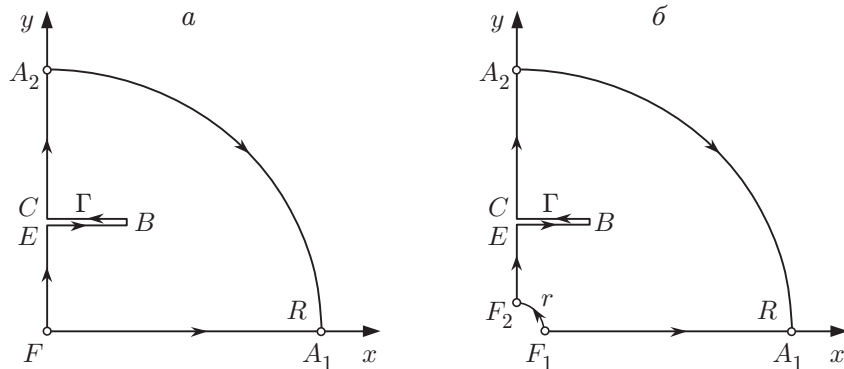


Рис. 3. Контуры интегрирования в плоскости  $z$  для вычисления значений  $P_\infty$  (а) и  $G_\infty$  (б)

Применяя теорему Коши [11] для аналитической функции  $F(z)$ , заменим путь интегрирования  $FA_1$  на  $FEBCA_2A_1$ . В результате получим соотношение

$$\operatorname{Re} P(z)|_{z=R} = R \ln R + (C_0 - 1)R + \pi h/2 - C_2/R + O(R^{-3}).$$

Сравнивая его с (5.4), получим выражение  $P_\infty(\tau) = \pi h/2$ . Отметим, что здесь и далее в аналогичной ситуации для  $G(z)$  используется условие на бесконечности  $|z| \rightarrow \infty$ , а не только  $z = x \rightarrow \infty$ .

В соответствии с (5.3), (5.4) и определением функции  $G(z)$  в области  $D_z \cup \Lambda$  функция  $G(z)$  удовлетворяет краевым условиям вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(z) &= 0, \quad z \in \Gamma, & \operatorname{Im} G(z) &= 0, \quad y = 0, \\ \operatorname{Im} G(z) &= \pm [h^2 - 2C_2 - (y - h)^2] H(y - h) \pi/8, & x &= \pm 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

и условию на бесконечности  $|z| \rightarrow \infty$

$$G(z)|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{z^2}{4} \ln z + \left(C_0 - \frac{3}{2}\right) \frac{z^2}{4} + \frac{\pi h}{4} z - \frac{C_2}{2} \ln z + G_\infty + O(|z|^{-2}). \quad (5.6)$$

При выводе последнего условия в (5.5) учитывалось вычисленное с помощью последнего выражения в (4.9) значение  $\operatorname{Im} G(z_C) = (h^2 - 2C_2)\pi/8$ . В (5.6)  $G_\infty$  — член разложения порядка единицы, полностью определяемый формулами (5.2) и известным видом функции  $F(z)$ . При этом очевидно, что  $G_\infty$  зависит только от  $\tau$ . Найдем эту зависимость.

Проведем в плоскости  $z$  окружности большого радиуса  $R \gg 1$  и малого радиуса  $r \ll 1$  с центром в начале координат. Точки пересечения первой окружности с осями координат  $x, y$  обозначим через  $A_1$  и  $A_2$ , второй — через  $F_1$  и  $F_2$  соответственно (рис. 3, б). Применяя теорему Коши [11] для аналитической функции  $G(z)/z$  и контура интегрирования  $\Sigma = A_1F_1F_2EBCA_2A_1$ , имеем

$$\oint_{\Sigma} \frac{G(z)}{z} dz = 0.$$

В результате интегрирования и последующего предельного перехода  $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  получим

$$G_\infty = \frac{J_1}{2} - \frac{J_2}{2\pi} - \frac{h^2}{2}, \quad J_1 = \int_{u_F}^{u_E} f'(u) \left(\frac{y^2}{2} - hy\right)_{y=\operatorname{Im} z(u)} du,$$

$$J_2 = \int_{u_E}^{u_C} \operatorname{Im} f'(u) \left[ \frac{x^2 - h^2}{2} \ln(x^2 + h^2) - \frac{3x^2 + h^2}{2} + 2hx \operatorname{arctg} \frac{x}{h} \right]_{x=\operatorname{Re} z(u)} du.$$

Здесь  $J_1, J_2$  — вещественные величины.

С учетом соотношений Коши — Римана [11] скачок на разрезе  $\Lambda$  вида (5.5) функции  $G(z)$  приводит к скачку производной функции  $\operatorname{Re} G(z)$  по направлению  $x$ :  $\partial \operatorname{Re} G(z) / \partial x|_{\Lambda^\pm} = \mp(y - h)\pi/4$ .

5.2. *Построение функции  $T_2(x, y)$ .* Функцию  $T_2(x, y)$  будем искать в виде

$$\pi T_2(x, y) / m_{0,0} = (z + \bar{z})[P(z) + P(\bar{z})] / 8 - \operatorname{Re} G(z) + \operatorname{Re} \Omega(z), \quad (5.7)$$

где  $\Omega(z)$  — неизвестная пока функция. Применяя оператор Лапласа к выражению (5.7), находим, что уравнение Пуассона в системе (3.2) удовлетворяется за счет первого слагаемого в (5.7). Второе слагаемое обеспечивает нужный вид старшего сингулярного члена разложения  $T_2(x, y)$  на бесконечности (5.1) — члена порядка  $x^2 \ln x$  и соответственно компенсирует скачки производной первого слагаемого в (5.7) по направлению  $x$  на разрезе  $\Lambda$ .

Запишем задачу для аналитической функции  $\Omega(z)$ . Из системы (3.2) и выражений (5.3), (5.5) получим граничные условия

$$\operatorname{Re} \Omega(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad \operatorname{Im} \Omega(z) = 0, \quad y = 0, \quad \operatorname{Im} \Omega(z) = 0, \quad x = 0,$$

а из формул (5.1), (5.4), (5.6) — условие на бесконечности  $z = x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Re} \Omega(z) = \left( \frac{2\pi}{m_{0,0}} - 1 \right) \frac{x^2}{8} + \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{2m_{0,0}} \left( \ln \frac{\varepsilon x}{2} + \gamma \right) + \frac{C_2}{2} \left( \ln \frac{\varepsilon}{2} + \gamma + \frac{1}{2} \right) + G_\infty, \quad (5.8)$$

где для простоты использованы соотношения (4.9). Из сравнения этой задачи с задачей для функций  $F(z)$  и  $F_{uu}(z)$  следует, что  $\Omega(z)$  можно представить в виде линейной комбинации этих функций:

$$\Omega(z) = \left( \frac{2\pi}{m_{0,0}} - 1 \right) \frac{h^2}{8\pi^2} F_{uu}(z) + \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{2m_{0,0}} F(z).$$

В силу условий (4.8) разложение  $\operatorname{Re} \Omega(z)$  на бесконечности имеет вид

$$\operatorname{Re} \Omega(z)|_{z=x \rightarrow \infty} = \left( \frac{2\pi}{m_{0,0}} - 1 \right) \left[ \frac{x^2}{8} + \frac{C_2}{4} \right] + \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{2m_{0,0}} [\ln x + C_0] + O(x^{-2}).$$

Сравнивая его с (5.8), получим соотношение, связывающее  $m_{0,2}$  и  $G_\infty(\tau)$ :

$$\left( \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{2m_{0,0}} + \frac{C_2}{2} \right) \left( \ln \frac{\varepsilon}{2} + \gamma \right) + G_\infty = \left( \frac{\pi}{m_{0,0}} - 1 \right) \frac{C_2}{2} + \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{2m_{0,0}} C_0.$$

С учетом (4.9) найдем последний неизвестный момент функции  $\mu(x)$ :

$$m_{0,2} = (2G_\infty + C_2(1 + C_0))m_{0,0}^2 / (2\pi) - h^2 m_{0,0} / 2.$$

**6. Анализ результатов.** Приведем окончательный вид членов асимптотического разложения (1.6) функции  $T(x, y)$  в терминах аналитических функций  $z(u)$ ,  $f(u)$  и моментов  $m_{i,j}$ :

$$T_0(x, y) = m_{0,0} \frac{\operatorname{Re} f(u)}{\pi}, \quad T_1(x, y) = -h \frac{\operatorname{Re} f'(u)}{\pi}, \quad T_2(x, y) = m_{0,0} \frac{\operatorname{Re} w(u) - J_1}{2\pi}.$$

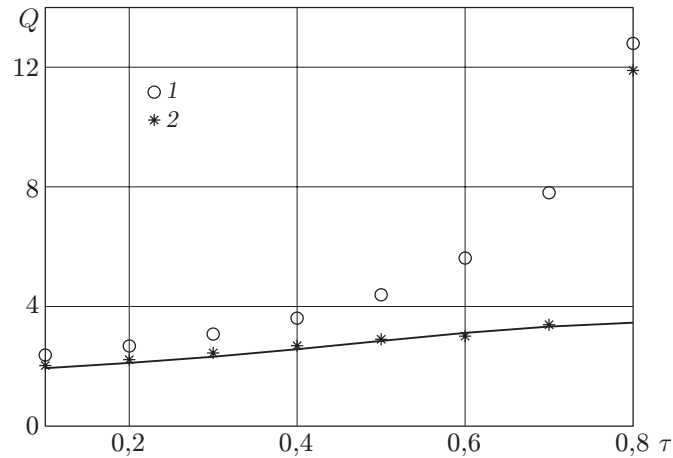


Рис. 4. Сравнение асимптотической зависимости  $Q(\tau)$  с результатами численных расчетов, проведенных по методике [3] при  $Re = 0,5$ : линия — результаты численных расчетов [3]; 1 — расчет по асимптотической формуле (6.1) в нулевом приближении, 2 — то же во втором приближении

Здесь

$$w(u) = f(u) \left[ |z^2(u)| + \frac{z^2(u)}{2} \right] - \int_{1/2}^u \left[ \overline{z(u)} z(\zeta) + \frac{z^2(\zeta)}{2} \right] f'(\zeta) d\zeta + \left( \frac{2\pi}{m_{0,0}} - 1 \right) \frac{h^2}{4\pi^2} f''(u) + \frac{2m_{0,2} + m_{2,0}}{m_{0,0}} f(u).$$

Используя формулу (1.4), можно вычислить суммарный тепловой поток к пластине  $Q$  как функцию параметров  $Re$  и  $\tau$ . Оставляя только ненулевые моменты  $m_{i,j}$ , получим

$$Q = m_{0,0} + \varepsilon^2(m_{1,1} + m_{0,2} + m_{2,0}/2). \quad (6.1)$$

Для того чтобы от параметра  $\tau$  перейти к параметру  $h$  в этой формуле, достаточно воспользоваться соотношением (4.2).

Для проверки полученных формул при  $Re = 0,5$  проведено сравнение асимптотической зависимости (6.1) с зависимостью, полученной в результате численного решения граничного интегрального уравнения (1.4) по методике [3]. Результаты сравнения приведены на рис. 4. Хотя число Пекле не очень мало, учет второго члена асимптотики значительно улучшает согласие с расчетами [3] вплоть до  $\tau = 0,7$ . Различие значений  $Q$  при больших  $\tau$  можно объяснить увеличением  $h$ . При получении асимптотики предполагалось, что  $h \sim 1$ , а при  $\tau = 0,8$  в соответствии с рис. 2 имеем  $h \approx 3$ . Аналогичное сравнение для  $Re = 0,1$  дает практически полное совпадение асимптотической зависимости  $Q(\tau)$  с рассчитанной по методике [3] вплоть до  $\tau = 1$  (для больших значений  $\tau$  расчеты не проводились).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
2. Корнев К. Г., Чугунов В. А. Определение равновесной формы тел, образовавшихся при застывании фильтрационного потока // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 6. С. 991–996.

3. **Alimov M., Kornev K., Mukhamadullina G.** Hysteretic effects in the problems of artificial freezing // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59, N 2. P. 387–410.
4. **Алимов М. М.** Асимптотическое решение задачи о теплообмене пластины с безграничным и равномерным потоком жидкости // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 86–93.
5. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
6. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
7. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. **Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
9. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
10. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
11. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 30/VII 2002 г.,  
в окончательном варианте — 3/XII 2002 г.*

---