УДК 532.5.013

ЭВОЛЮЦИЯ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск
E-mail: andr@icm.krasn.ru

Исследуется инвариантное решение уравнений вязкой теплопроводной жидкости, интерпретируемое как однонаправленное движение двух таких жидкостей в плоском слое с общей границей раздела под действием нестационарного перепада давления. Получены априорные оценки скорости и температуры. Определено стационарное состояние и установлено (при некоторых условиях на градиент давления), что при больших временах это состояние является предельным. Для полубесконечных слоев с помощью преобразования Лапласа получено решение в замкнутой форме.

Ключевые слова: вязкая теплопроводная жидкость, поверхность раздела, стационарное течение.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение двух несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей с общей границей раздела. Введем следующие обозначения: Ω_j $(j = 1, 2)$ — области, занятые жидкостями, с поверхностью раздела Γ, $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{x}, t)$, $p_j(\boldsymbol{x}, t)$ — вектор скорости и давление соответственно, $\theta_j(\boldsymbol{x}, t)$ — отклонения от среднего значения температуры. Тогда в отсутствие внешних сил система уравнений имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j}\nabla p_j = \nu_j \Delta \boldsymbol{u}_j, \qquad \frac{d\theta_j}{dt} = \chi_j \Delta\theta_j, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j = 0, \tag{1.1}$$

где ρ_j — средняя плотность; ν_j — кинематическая вязкость; χ_j — температуропроводность; $d/dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}_j \cdot \nabla$.

На поверхности раздела Γ зададим следующие условия:

— равенство скоростей

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma; \tag{1.2}$$

— кинематическое условие

$$\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{n} = V_{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma; \tag{1.3}$$

— динамическое условие (в отсутствие поверхностного натяжения)

$$(P_2 - P_1)\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma; \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00836), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5873.2006.1) и в рамках комплексного Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.

— условие непрерывности температуры и потоков тепла

$$\theta_1 = \theta_2, \qquad k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{1.5}$$

В (1.2)–(1.5) $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ, направленный из области Ω_1 в область Ω_2; $V_{\boldsymbol{n}}$ — скорость перемещения поверхности в направлении нормали; $P_j = -p_j E + 2\rho_j \nu_j D(\boldsymbol{u}_j)$ — тензоры напряжений; D — тензор скоростей деформаций; постоянные k_j — теплопроводность.

Области Ω_1 и Ω_2 могут контактировать не только друг с другом, но и с твердыми стенками Σ_j. На стенках ставится условие прилипания

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{a}_j(\boldsymbol{x}, t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Sigma_j, \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{a}_j(\boldsymbol{x}, t)$ — скорость движения стенки Σ_j. Кроме того, температуру на Σ_j будем считать заданной:

$$\theta_j = \theta_w^j(\boldsymbol{x}, t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Sigma_j. \tag{1.7}$$

Для завершения постановки задачи к соотношениям (1.1)–(1.7) следует добавить начальные условия

$$\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_{0j}(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{0j} = 0, \qquad \theta_j(\boldsymbol{x}, 0) = \theta_{0j}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega_j.$$

Ниже рассматривается система уравнений двумерного движения двух жидкостей с плоской границей раздела. Можно показать, что эта система допускает однопараметрическую подгруппу [1], соответствующую оператору

$$\frac{\partial}{\partial x} + A_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} - \rho_j f_j(t) \frac{\partial}{\partial p_j}$$

(A_j — постоянные; $f_j(t)$ — функции времени). Инвариантное решение следует искать в виде

$$u_j = u_j(y, t), \quad v_j = v_j(y, t), \quad p_j = -\rho_j f_j(t) x + P_j(y, t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y, t).$$

Из уравнения сохранения массы следует, что v_j зависит только от времени: $v_j = v_j(t)$, а из проекции уравнений импульса на ось y следует соотношение $\rho_j^{-1} P_{jy} = v_{jt}(t)$, где индексы y, t обозначают частные производные по соответствующим переменным. Далее будем считать $v_j(t) = 0$, иначе условия прилипания на неподвижных стенках не выполняются. Таким образом, инвариантное решение представляется в виде

$$u_j = u_j(y, t), \quad v_j = 0, \quad p_j = \rho_j f_j(t) x + P_j(t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y, t). \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в систему уравнений (1.1), с учетом условий (1.2)–(1.5) на границе раздела $y = 0$ получаем начально-краевую задачу

$$\begin{gathered} u_{jt} = \nu_j u_{jyy} + f_j(t), \qquad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - A u_j \\ \text{при} \quad -l_1 < y < 0 \ (j = 1), \quad 0 < y < l_2 \ (j = 2); \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered} u_1(0, t) = u_2(0, t), \qquad T_1(0, t) = T_2(0, t), \\ k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t), \qquad \rho_2 \nu_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \nu_1 u_{1y}(0, t) = 0, \\ u_j(y, 0) = 0, \qquad T_j(y, 0) = 0. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Во втором уравнении (1.9) $A \equiv A_1 = A_2$ (вследствие равенства температур при $y = 0$). К условиям (1.10) необходимо добавить условия на твердых стенках $y = -l_1$, $y = l_2$ (1.6):

$$u_1(-l_1, t) = u_2(l_2, t) = 0 \tag{1.11}$$

и задать нулевые возмущения температуры (1.7):

$$T_1(-l_1,t)=0, \qquad T_2(l_2,t)=0. \tag{1.12}$$

Таким образом, решению (1.8) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что в начальный момент времени первая жидкость заполняет слой $-l_1 < y < 0$, вторая — слой $0 < y < l_2$. Жидкости находятся в состоянии покоя, в каждом слое поле температур $\theta_j = Ax$. Мгновенно возникающие градиенты давления $f_j(t)$ вызывают движение жидкостей, при котором поверхность раздела остается плоской ($y = 0$), а траектории являются прямыми, параллельными оси x. Функции u_j, T_j будем называть возмущениями состояния покоя жидкостей. При $A \neq 0$ поле скоростей оказывает влияние на возмущение температуры в слоях $(-l_1, 0)$, $(0, l_2)$. Эволюция таких возмущений описывается решением начально-краевой задачи (1.9)–(1.12).

Следует отметить, что однонаправленные (слоистые) движения вязкой жидкости под действием перепада давления хорошо изучены (см., например, [2, 3]). Поле скоростей, как правило, представляется в виде ряда для каналов конечной ширины. В случае движения двух вязких жидкостей с общей границей раздела для полуограниченных слоев найдены автомодельные решения, описывающие сглаживание плоского разрыва скорости [3] и термокапиллярное движение [1].

Замечание 1. Так как $p_1 = p_2$ при $y = 0$ для всех x, из динамического условия на поверхности раздела (1.4) следует

$$\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t), \qquad P_1(t) = P_2(t). \tag{1.13}$$

Таким образом, уравнения (1.9)–(1.12) образуют две последовательно решаемые задачи для функций (u_1, u_2), (T_1, T_2).

2. Определение поля скоростей в слоях. С учетом замечания 1 рассмотрим задачу о поле скоростей в слоях при внезапно возникшем перепаде давления в одном из слоев. В этом случае имеем линейную сопряженную начально-краевую задачу ($f(t) \equiv f_1(t)$):

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} + f(t), \qquad -l_1 < y < 0; \tag{2.1}$$

$$u_1(-l_1,t) = 0; \tag{2.2}$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} + (\rho_1/\rho_2) f(t), \qquad 0 < y < l_2; \tag{2.3}$$

$$u_2(l_2,t) = 0; \tag{2.4}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad \mu_1 u_{1y}(0,t) = \mu_2 u_{2y}(0,t), \qquad t \geqslant 0; \tag{2.5}$$

$$u_1(y,0) = 0, \quad -l_1 < y < 0, \qquad u_2(y,0) = 0, \quad 0 < y < l_2. \tag{2.6}$$

Здесь $\mu_{1,2} = \rho_{1,2}\nu_{1,2}$ — динамические вязкости.

Замечание 2. Без ограничения общности в (1.13) можно считать $P_1(t) = P_2(t) = 0$, так как эти функции не оказывают влияния на движение жидкостей.

Получим некоторые априорные оценки решения задачи (2.1)–(2.6). Уравнение (2.1) умножим на $\rho_1 u_1(y,t)$ (уравнение (2.3) — на $\rho_2 u_2(y,t)$) и проинтегрируем по y от $-l_1$ до нуля (от нуля до l_2). Складывая полученные равенства, с использованием граничных условий (2.2), (2.4), (2.5) получаем соотношение

$$\frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int\limits_{-l_1}^{0} u_{1y}^2\,dy + \mu_2 \int\limits_{0}^{l_2} u_{2y}^2\,dy = \rho_1 f(t)\Big(\int\limits_{-l_1}^{0} u_1\,dy + \int\limits_{0}^{l_2} u_2\,dy\Big), \tag{2.7}$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2}\,\rho_1 \int\limits_{-l_1}^{0} u_1^2(y,t)\,dy + \frac{1}{2}\,\rho_2 \int\limits_{0}^{l_2} u_2^2(y,t)\,dy \tag{2.8}$$

есть кинетическая энергия двух слоев.

Из (2.7), в частности, следует единственность решения задачи (2.1)–(2.6): если $f(t) = 0$, то и $u_1(y,t) = u_2(y,t) \equiv 0$.

Равенство (2.7) позволяет определить (при некоторых ограничениях на функцию $f(t)$) асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$. Действительно, в силу условий (2.2), (2.4) для $u_1(y,t)$, $u_2(y,t)$ справедливы неравенства Фридрихса

$$\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^2(y,t)\,dy \leqslant \frac{l_1^2}{2} \int\limits_{-l_1}^{0} u_{1y}^2(y,t)\,dy, \qquad \int\limits_{0}^{l_2} u_2^2(y,t)\,dy \leqslant \frac{l_2^2}{2} \int\limits_{0}^{l_2} u_{2y}^2(y,t)\,dy. \tag{2.9}$$

Используя неравенства (2.9) и неравенство Коши — Буняковского, с учетом $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ из (2.7) получаем

$$\frac{dE(t)}{dt} + 4\delta E(t) \leqslant 2\delta_1 |f(t)| \sqrt{E(t)}\,, \tag{2.10}$$

где $\delta = \min\,(l_1^{-2}\nu_1, l_2^{-2}\nu_2)$; $\delta_1 = \rho_1 \max\,(\sqrt{l_1/\rho_1}, \sqrt{l_2/\rho_2})$. Учитывая, что согласно (2.8) и начальным условиям (2.6) $E(0) = 0$, из (2.10) находим

$$E(t) \leqslant \delta_1^2 \Big(\int\limits_0^t |f(t)|\, \mathrm{e}^{2\delta t}\, dt \Big)^2 \mathrm{e}^{-4\delta t}\,. \tag{2.11}$$

Следовательно, если сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty |f(t)|\, \mathrm{e}^{2\delta t}\, dt \equiv \sqrt{C_1} > 0, \tag{2.12}$$

то из (2.11) вытекает неравенство

$$E(t) \leqslant \delta_1^2 C_1\, \mathrm{e}^{-4\delta t} \tag{2.13}$$

для всех $t \geqslant 0$. Поэтому при $t \to \infty$ L^2-нормы функций $u_1(y,t)$, $u_2(y,t)$ стремятся к нулю по экспоненте равномерно по $y \in (-l_2, 0)$ и $y \in (0, l_2)$, если выполнено условие (2.12). Для получения оценок $|u_j(y,t)|$ необходимо получить оценки интегралов

$$\int\limits_{-l_1}^{0} u_{1y}^2\,dy, \qquad \int\limits_{0}^{l_2} u_{2y}^2\,dy.$$

Пусть $u(y,t)$ является решением уравнения $u_t = \nu u_{yy} + F(y,t)$, $y \in [a,b]$. Тогда имеет место тождество

$$\int\limits_0^t \int\limits_a^b (u_t^2 + \nu^2 u_{yy}^2)\,dy\,dt + \nu \int\limits_a^b u_y^2\,dy =$$

$$= 2\nu \int\limits_0^t (u_t u_y)\big|_a^b\,dt + \nu \int\limits_a^b u_{0y}^2\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_a^b F^2(y,t)\,dy\,dt, \tag{2.14}$$

где $u_0(y) = u(y,0)$. Тождество (2.14) следует из равенств

$$\int\limits_0^t \int\limits_a^b (u_t - \nu u_{yy})^2\,dy\,dt = \int\limits_0^t \int\limits_a^b F^2(y,t)\,dy\,dt, \qquad u_t u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_t u_y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_y^2).$$

В (2.14) положим сначала $u = u_1$, $a = -l_1$, $b = 0$, $\nu = \nu_1$, $F = f(t)$ и полученное равенство умножим на ρ_1; затем положим $u = u_2$, $a = 0$, $b = l_2$, $\nu = \nu_2$, $F = \rho_1\rho_2^{-1}f(t)$ и полученное равенство умножим на ρ_2. Сложив эти равенства, для задачи (2.1)–(2.6) находим интегральное тождество

$$\rho_1\int\limits_0^t\int\limits_{-l_1}^0(u_{1t}^2+\nu_1^2u_{1yy}^2)\,dy\,dt+\rho_2\int\limits_0^t\int\limits_0^{l_2}(u_{2t}^2+\nu_2^2u_{2yy}^2)\,dy\,dt+{}$$
$$+\mu_1\int\limits_{-l_1}^0u_{1y}^2\,dy+\mu_2\int\limits_0^{l_2}u_{2y}^2\,dy=\rho_1(l_1+l_2)\int\limits_0^tf^2(t)\,dt. \qquad (2.15)$$

При выводе (2.15) учтены граничные условия (2.2), (2.4), (2.5) и начальные условия (2.6). Следовательно, для всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{-l_1}^0u_{1y}^2\,dy\leqslant\frac{E_1(t)}{\mu_1},\qquad\int\limits_0^{l_2}u_{2y}^2\,dy\leqslant\frac{E_1(t)}{\mu_2}, \qquad (2.16)$$

где $E_1(t)$ — правая часть (2.15). Тогда, если помимо интеграла в (2.12) сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty f^2(t)\,dt\equiv C_2>0, \qquad (2.17)$$

то имеют место оценки, равномерные по y ($y \in (-l_1, 0)$ и $y \in (0, l_2)$):

$$|u_j(y,t)|\leqslant\Big(2\delta_1\sqrt{\frac{2C_1C_3}{\mu_j\rho_j}}\Big)^{1/2}\mathrm{e}^{-2\delta t}, \qquad (2.18)$$

где $C_3 = \rho_1(l_1 + l_2)C_2$; $j = 1, 2$. Оценки (2.18) получаются с использованием равенств

$$u_1^2(y,t)=2\int\limits_{-l_1}^yu_1(y,t)u_{1y}(y,t)\,dy,\qquad u_2^2(y,t)=-2\int\limits_y^{l_2}u_2(y,t)u_{2y}(y,t)\,dy,$$

неравенств (2.7), (2.16), (2.17) и неравенства Коши — Буняковского.

Замечание 3. Можно показать, что если выполнено условие (2.12), то выполнено и условие (2.17).

Таким образом, доказана

Теорема. *Решение задачи* (2.1)–(2.6) *при выполнении условия* (2.12) *и* $t \to \infty$ *стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки скорости сходимости* (2.18), *равномерные в интервалах* $(-l_1, 0)$, $(0, l_2)$.

Иными словами, если в одной из жидкостей градиент давления достаточно быстро стремится к нулю, то согласно неравенствам (2.18) происходит торможение этих жидкостей за счет вязкого трения.

Для получения более точной информации о поведении $u_j(y,t)$ к задаче (2.1)–(2.6) применим преобразование Лапласа:

$$\tilde u_j(y,p)=\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{-pt}\,u_j(y,t)\,dt,\qquad j=1,2 \qquad (2.19)$$

(условия применимости формулы (2.19) см., например, в [4]). В результате получим краевую задачу для изображений $\tilde{u}_j(y,p)$:

$$\begin{gathered}
\tilde{u}_1'' - \frac{p}{\nu_1}\,\tilde{u}_1 = -\frac{\tilde{f}(p)}{\nu_1} \quad (-l_1 < y < 0), \qquad \tilde{u}_1(-l_1,p) = 0,\\
\tilde{u}_2'' - \frac{p}{\nu_2}\,\tilde{u}_2 = -\frac{\rho_1}{\rho_2\nu_2}\,\tilde{f}(p) \quad (0 < y < l_2), \qquad \tilde{u}_2(l_2,p) = 0,\\
\tilde{u}_1(0,p) = \tilde{u}_2(0,p), \qquad \mu_1\tilde{u}_1'(0,p) = \mu_2\tilde{u}_2'(0,p)
\end{gathered} \tag{2.20}$$

(штрих означает дифференцирование по y).

После ряда преобразований из (2.20) находим

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(y,p) = &-\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)}\Big[\Big(\rho - (\rho-1)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,(y+l_1) -\\
&-\Big(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,y + \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2 + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,y - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big],\\
\tilde{u}_2(y,p) = &-\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)}\Big[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\Big(1 + (\rho-1)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,(l_2-y) +\\
&+\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\,\rho\Big(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,y - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1 + \rho\Big(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,y - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь $\tilde{f}(p)$ — изображение $f(t)$; $\rho = \rho_1/\rho_2$; $\mu = \mu_1/\mu_2$; $\nu = \nu_1/\nu_2$;

$$W(p) = \operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{cth}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\operatorname{th}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big). \tag{2.22}$$

Оригиналы $u_j(y,t)$ $(j=1,2)$ восстанавливаются по формуле

$$u_j(y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{e}^{pt}\,\tilde{u}_j(y,p)\,dp. \tag{2.23}$$

Предположим, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f_0 = \mathrm{const}$. Тогда $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde{f}(p) = f_0$ [4]. Ясно, что в этом случае функция $f(t)$ не удовлетворяет условию (2.12). Вычислим $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde{u}_j(y,p)$ согласно формулам (2.21). Проведя простые, но громоздкие расчеты с учетом асимптотических представлений $\operatorname{sh} x \sim x + x^3/6$, $\operatorname{ch} x \sim 1 + x^2/2$ при $x \to 0$, получим

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} p\tilde{u}_1(y,p) &= \frac{l_1^2 f_0}{2\nu_1}\Big[-\Big(\frac{y}{l_1}\Big)^2 + \frac{\mu - l^2}{l(\mu+l)}\,\frac{y}{l_1} + \frac{\mu(l+1)}{l(\mu+l)}\Big] \equiv u_1^0(y),\\
\lim_{p\to 0} p\tilde{u}_2(y,p) &= \frac{l_2^2 f_0\mu}{2\nu_1}\Big[-\Big(\frac{y}{l_2}\Big)^2 + \frac{\mu - l^2}{\mu+l}\,\frac{y}{l_2} + \frac{l(l+1)}{\mu+l}\Big] \equiv u_2^0(y),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где $l = l_1/l_2$. Легко проверить, что правые части в (2.24) являются точным стационарным решением задачи (2.1)–(2.6) при замене $f(t)$ на f_0. Таким образом, при $t \to \infty$ решение задачи (2.1)–(2.6) выходит на стационарный режим.

Из формул (2.21) можно получить решение для полуограниченных слоев. Для этого в формулах (2.21) положим $l_1, l_2 \to \infty$. Тогда согласно (2.22)

$$W(p) \sim \Big(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\Big)\exp\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1 + \sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big).$$

Обозначая пределы $\tilde{u}_j(y,p,l_1,l_2)$ через $\tilde{U}_j(y,p)$, в результате некоторых преобразований находим

$$\begin{gathered}\tilde{U}_1(y,p)=\frac{\tilde{f}(p)}{p}\Big[1+\frac{\sqrt{\nu}\,(\rho-1)}{\mu+\sqrt{\nu}}\exp\Big(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,y\Big)\Big],\\ \tilde{U}_2(y,p)=\frac{\tilde{f}(p)}{p}\Big[\rho-\frac{\mu(\rho-1)}{\mu+\sqrt{\nu}}\exp\Big(-\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,y\Big)\Big].\end{gathered}\tag{2.25}$$

Используя свойства обратного преобразования Лапласа [4], восстанавливаем оригиналы:

$$\begin{gathered}U_1(y,t)=\int\limits_0^t f(\tau)\Big[1+\frac{\sqrt{\nu}\,(\rho-1)}{\mu+\sqrt{\nu}}\ \mathrm{Erf}\Big(-\frac{y}{2\sqrt{\nu_1(t-\tau)}}\Big)\Big]\,d\tau,\\ U_2(y,t)=\int\limits_0^t f(\tau)\Big[\rho-\frac{\mu(\rho-1)}{\mu+\sqrt{\nu}}\ \mathrm{Erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{\nu_2(t-\tau)}}\Big)\Big]\,d\tau.\end{gathered}\tag{2.26}$$

Здесь

$$\mathrm{Erf}\,z=1-\mathrm{erf}\,z,\qquad \mathrm{erf}\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-z^2}\,dz.$$

Из формул (2.26) получаем решение задачи (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) в полуограниченных слоях.

Вместо перепада давления можно задать объемный расход жидкостей в слоях:

$$Q_1(t)=\int\limits_{-l_1}^0 u_1(y,t)\,dy,\qquad Q_2(t)=\int\limits_0^{l_2} u_2(y,t)\,dy.\tag{2.27}$$

Например, слой $(-l_1,0)$ — вода, слой $(0,l_2)$ — нефть, и задан расход нефти $Q_2(t)$. Применяя преобразование Лапласа (2.19) к равенствам (2.27) и используя формулы (2.21), получим

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1(p)=-\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)}\Big[\sqrt{\frac{\nu_1}{p}}\Big(\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1-1\Big)\Big(\rho-(\rho-2)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big)+{}\\ +\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\frac{\nu_1}{p}}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2-{}\\ -l_1\Big(\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2+\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\ \mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\Big)\Big];\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_2(p)=-\frac{\tilde{f}(p)}{pW(p)}\Big[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\frac{\nu_2}{p}}\Big(\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2-1\Big)\Big(1+(2\rho-1)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big)+{}\\ +\rho\sqrt{\frac{\nu_2}{p}}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1-{}\\ -\rho l_2\Big(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1+\mathrm{ch}\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,l_2\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,l_1\Big)\Big].\end{aligned}\tag{2.29}$$

Из (2.29) находим $\tilde{f}(p)$, а по формуле (2.23) восстанавливаем $f(t)$. Расход в первой жидкости (воде) определяется из (2.28), (2.23).

Представляет интерес определение расхода для стационарного течения (2.24). В этом случае

$$Q_1^0 = \int\limits_{-l_1}^{0} u_1^0(y)\,dy = \frac{f_0 l_1^3}{12\nu_1 l(\mu+l)}\,(4\mu l + 3\mu + l^2),$$

$$Q_2^0 = \int\limits_{0}^{l_2} u_2^0(y)\,dy = \frac{f_0 l_2^3 \mu}{12\nu_1(\mu+l)}\,(\mu + 4l + 3l^2).$$

Отношение

$$\frac{Q_2^0}{Q_1^0} = \frac{\mu}{l^2}\,\frac{\mu + 4l + 3l^2}{4\mu l + 3\mu + l^2}$$

существенно зависит от толщины слоев. Так, при $l = 0{,}25$ ($l_2 = 4l_1$) для воды и нефти ($\mu = 0{,}312$) имеем $Q_2^0/Q_1^0 \approx 5{,}71$, а при $l = 0{,}5$ ($l_2 = 2l_1$) — $Q_2^0/Q_1^0 \approx 2{,}11$.

3. Эволюция температурных возмущений. Начально-краевая задача имеет вид

$$T_{1t} = \chi_1 T_{1yy} - Au_1, \qquad -l_1 < y < 0; \tag{3.1}$$

$$T_1(-l_1, t) = 0; \tag{3.2}$$

$$T_{2t} = \chi_2 T_{2yy} - Au_2, \qquad 0 < y < l_2; \tag{3.3}$$

$$T_2(l_2, t) = 0; \tag{3.4}$$

$$T_1(0,t) = T_2(0,t), \qquad k_1 T_{1y}(0,t) = k_2 T_{2y}(0,t); \tag{3.5}$$

$$T_1(y,0) = 0, \qquad T_2(y,0) = 0. \tag{3.6}$$

Постановка задачи (3.1)–(3.6) совпадает с постановкой задачи (2.1)–(2.6), где $f(t)$ надо заменить на $-Au_1(y,t)$, $\rho_1\rho_2^{-1}f(t)$ — на $-Au_2(y,t)$, ν_j — на χ_j, а μ_j — на k_j. Поскольку $\chi_j = k_j/(\rho_j c_{0j})$ (c_{0j} — удельные теплоемкости смесей), умножая уравнение (3.1) на $\rho_1 c_{01} T_1$ (уравнение (3.3) — на $\rho_2 c_{02} T_2$), интегрируя по y от $-l_1$ до 0 (от 0 до l_2) и складывая полученные равенства, аналогично (2.7) находим

$$\frac{dE_2}{dt} + k_1\int\limits_{-l_1}^{0} T_{1y}^2\,dy + k_2\int\limits_{0}^{l_2} T_{2y}^2\,dy = -A\Big(\rho_1 c_{01}\int\limits_{-l_1}^{0} u_1 T_1\,dy + \rho_2 c_{02}\int\limits_{0}^{l_2} u_2 T_2\,dy\Big), \tag{3.7}$$

где

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\,\rho_1 c_{01}\int\limits_{-l_1}^{0} T_1^2\,dy + \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{02}\int\limits_{0}^{l_2} T_2^2\,dy. \tag{3.8}$$

Из оценки (2.13) следует

$$\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^2\,dy \leqslant \frac{2\delta_1^2 C_1\,\mathrm{e}^{-4\delta t}}{\rho_1}, \qquad \int\limits_{0}^{l_2} u_2^2\,dy \leqslant \frac{2\delta_1^2 C_1\,\mathrm{e}^{-4\delta t}}{\rho_2}. \tag{3.9}$$

Для функций $T_j(y,t)$ справедливы неравенства Фридрихса (2.9), поэтому из (3.7) получаем неравенство, аналогичное (2.10):

$$\frac{dE_2}{dt}+4\delta_2E_2(t)\leqslant 2\delta_3\sqrt{E_2(t)}\,\mathrm{e}^{-2\delta t},$$

где $\delta_2=\min\,(l_1^{-2}\chi_1,l_2^{-2}\chi_2)$; $\delta_3=\sqrt{2}\,|A|\delta_1\sqrt{C_1}\,\max\,(\sqrt{c_{01}},\sqrt{c_{02}})$. Отсюда следует

$$E_2(t)\leqslant\begin{cases}\delta_3^2(\mathrm{e}^{-2\delta t}-\mathrm{e}^{-2\delta_2t})^2/[4(\delta_2-\delta)^2], & \delta_2\neq\delta,\\ \delta_3^2t^2\,\mathrm{e}^{-4\delta_2t}, & \delta_2=\delta.\end{cases}\qquad(3.10)$$

При выводе оценки (3.10) учтено, что $E_2(0)=0$ в силу (3.8) и начальных данных (3.6).

Оценки интегралов

$$\int\limits_{-l_1}^{0}T_{1y}^2\,dy,\qquad\int\limits_{0}^{l_2}T_{2y}^2\,dy$$

получаются из тождества (2.14), где ν_j надо заменить на χ_j, u_j — на T_j, F_j — на $-Au_j$. Умножая (2.14) на ρ_jc_{0j} и складывая полученные равенства, имеем тождество

$$\rho_1c_{01}\int\limits_0^t\int\limits_{-l_1}^{0}(T_{1t}^2+\chi_1^2T_{1yy}^2)\,dy\,dt+\rho_2c_{02}\int\limits_0^t\int\limits_0^{l_2}(T_{2t}^2+\chi_2^2T_{2yy}^2)\,dy\,dt+$$

$$+\,k_1\int\limits_{-l_1}^{0}T_{1y}^2\,dy+k_2\int\limits_0^{l_2}T_{2y}^2\,dy=A^2\Big(\rho_1c_{01}\int\limits_0^t\int\limits_{-l_1}^{0}u_1^2\,dy\,dt+\rho_2c_{02}\int\limits_0^t\int\limits_0^{l_2}u_2^2\,dy\,dt\Big).\qquad(3.11)$$

Используя неравенства (3.9), из (3.11) находим

$$\int\limits_{-l_1}^{0}T_{1y}^2\,dy\leqslant\frac{\delta_4(1-\mathrm{e}^{-4\delta t})}{k_1},\qquad\int\limits_0^{l_2}T_{2y}^2\,dy\leqslant\frac{\delta_4^2(1-\mathrm{e}^{-4\delta t})}{k_2},\qquad(3.12)$$

где

$$\delta_4=A^2\delta_1^2C_1(c_{01}+c_{02})/(2\delta).$$

Поэтому из (3.8)–(3.10), (3.12) получаем

$$|T_j(y,t)|\leqslant\Big(2\sqrt{2\delta_4E_2(t)/(k_j\rho_jc_{0j})}\ \Big)^{1/2}.$$

Следовательно, в данном случае возмущения температуры экспоненциально затухают со временем (по закону $\mathrm{e}^{-2\delta t}$ при $\delta\leqslant\delta_2$ и $\mathrm{e}^{-2\delta_2t}$ при $\delta>\delta_2$).

Применяя преобразование Лапласа к задаче (3.1)–(3.6), получим краевую задачу для изображений

$$\begin{aligned}&\tilde T_1''-\frac{p}{\chi_1}\,\tilde T_1=\frac{A\tilde u_1(y,p)}{\chi_1}, && -l_1<y<0,\\ &\tilde T_2''-\frac{p}{\chi_2}\,\tilde T_2=\frac{A\tilde u_2(y,p)}{\chi_2}, && 0<y<l_2;\end{aligned}\qquad(3.13)$$

$$\tilde T_1(0,p)=\tilde T_2(0,p),\qquad k\tilde T_1'(0,p)=\tilde T_2'(0,p);\tag{3.14}$$

$$\tilde T_1(-l_1,p)=0,\qquad \tilde T_2(l_2,p)=0,\tag{3.15}$$

где $k=k_1/k_2$; штрих означает дифференцирование по y. Решение задачи (3.13) можно представить в виде

$$\tilde T_1(y,p)=L_1\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,y+L_2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,y+\frac{A}{\chi_1\sqrt{p\chi_1^{-1}}}\int\limits_{-l_1}^{y}\tilde u_1(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,(y-z)\,dz;\tag{3.16}$$

$$\tilde T_2(y,p)=L_3\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,y+L_4\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,y+\frac{A}{\chi_2\sqrt{p\chi_2^{-1}}}\int\limits_{0}^{y}\tilde u_2(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,(y-z)\,dz,\tag{3.17}$$

при этом функции $L_i(p)$ $(i=\overline{1,4}\,)$ находятся из (3.14), (3.15):

$$\begin{gathered}L_1=\frac{G_1(p)-G_2(p)}{W_2(p)},\qquad L_2=L_1\operatorname{th}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,l_1,\qquad L_3=\frac{k}{\sqrt{\chi}}\,L_1-G_1,\\ L_4=L_2-\frac{A}{\chi_1\sqrt{p\chi_1^{-1}}}\int\limits_{-l_1}^{0}\tilde u_1(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,z\,dz.\end{gathered}\tag{3.18}$$

Здесь

$$G_1(p)=-\frac{kA}{\chi_1}\sqrt{\frac{\chi_2}{p}}\int\limits_{-l_1}^{0}\tilde u_1(z,p)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,z\,dz,$$

$$\begin{aligned}G_2(p)=-\frac{A\operatorname{cth}\sqrt{p\chi_2^{-1}}\,l_2}{\chi_1\sqrt{p\chi_1^{-1}}}\int\limits_{-l_1}^{0}\tilde u_1(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,z\,dz\,+&\\ +\frac{A}{\chi_2\sqrt{p\chi_2^{-1}}\,\operatorname{sh}\sqrt{p\chi_2^{-1}}\,l_2}\int\limits_{0}^{l_2}\tilde u_2(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,(l_2-z)\,dz,&\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$W_2(p)=\frac{k}{\sqrt{\chi}}+\operatorname{th}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,l_1\operatorname{cth}\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,l_2.$$

Найдем стационарное решение задачи (3.1)–(3.5) (при этом начальные данные (3.6) не учитываются). Для функций $T_1^0(y)$, $T_2^0(y)$ имеем задачу

$$\begin{gathered}T_{1yy}^0=\frac{A}{\chi_1}\,u_1^0(y),\qquad -l_1<y<0,\\ T_{2yy}^0=\frac{A}{\chi_2}\,u_2^0(y),\qquad 0<y<l_2;\end{gathered}\tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}T_1^0(-l_1)=0,\qquad T_2^0(l_2)=0,\\ T_1^0(0)=T_2^0(0),\qquad kT_{1y}^0(0)=T_{2y}^0(0),\qquad k=k_1/k_2.\end{gathered}\tag{3.21}$$

Подставив в правые части уравнений (3.20) функции $u_1^0(y)$, $u_2^0(y)$ из (2.24), после интегрирования и простых преобразований из (3.20), (3.21) получаем

$$
\begin{aligned}
T_1^0(y) &= \frac{Al_1^2 f_0}{2\chi_1\nu_1}\Big(-\frac{y^4}{12l_1^2} + \frac{(\mu - l^2)y^3}{6l_1 l(\mu + l)} + \frac{\mu(l+1)y^2}{2l(\mu + l)}\Big) + a_1 y + a_2,\\
T_2^0(y) &= \frac{Al_2^2 f_0\mu}{2\chi_2\nu_1}\Big(-\frac{y^4}{12l_2^2} + \frac{(\mu - l^2)y^3}{6l_2(\mu + l)} + \frac{l(l+1)y^2}{2(\mu + l)}\Big) + ka_1 y + a_2,
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

где постоянные a_1, a_2 определяются по формулам

$$
a_1 = \frac{Al_1^3 f_0}{24\chi_1\nu_1(\mu + l)(k + l)}\,\big[l^3(5\mu l + 4\mu + l^2) - \chi\mu(\mu + 4l^2 + 5l)\big],
$$

$$
a_2 = -\frac{Al_1 l_2^3 f_0}{24\chi_1\nu_1(\mu + l)(k + l)}\,\big[kl^2(5\mu l + 4\mu + l^2) + \chi\mu(\mu + 4l^2 + 5l)\big].
$$

Можно доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty} T_j(y,t) = T_j^0(y)$, т. е. со временем возмущение температур в слоях выходит на стационарный режим, если $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f_0$. Для этого достаточно вычислить пределы $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde T_j(y,p)$. В качестве примера для $j = 1$ преобразуем выражение (3.16), используя (3.18):

$$
\tilde T_1(y,p) = \frac{G_1(p) - G_2(p)}{W_2(p)\operatorname{ch}\sqrt{p\chi_1^{-1}}\,l_1}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,(y + l_1) +
$$

$$
+ \frac{A}{\chi_1\sqrt{\chi_1^{-1}p}}\int\limits_{-l_1}^{y}\tilde u_1(z,p)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,(y - z)\,dz. \tag{3.23}
$$

Далее можно подставить $\tilde u_j(y,p)$ из (2.21) в (3.18), (3.19), (3.23) и получить явное выражение для $\tilde T_1(y,p)$. Однако это выражение очень громоздкое и в данной работе не приводится. Существует более простой способ вычисления предела $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde T_1(y,p)$ на основе (3.23) и найденных пределов $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde u_j(y,p) = u_j^0(y)$ по формулам (2.24). При $p \to 0$ ($\operatorname{sh} x \approx x$, $\operatorname{ch} x \approx 1$, $x \to 0$) из (3.19) следует

$$
W_2(p) \sim \frac{k + l}{\sqrt{\chi}}, \qquad pG_1(p) \sim -\frac{kA}{\chi_1\sqrt{\chi_2^{-1}p}}\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^0(z)\,dz,
$$

$$
pG_2(p) \sim \frac{A}{\chi_1 l_2\sqrt{p\chi_2^{-1}}}\Big(-\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^0(z)z\,dz + \chi\int\limits_{0}^{l_2} u_2^0(z)(l_2 - z)\,dz\Big).
$$

Интегралы, входящие в правые части этих выражений, легко вычисляются с использованием формул (2.24):

$$
\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^0(z)\,dz = \frac{f_0 l_1^3}{12\nu_1 l(\mu + l)}\,(4\mu l + 3\mu + l^2),
$$

$$\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^0(z)z\,dz = -\frac{f_0 l_1^4}{24\nu_1 l(\mu+l)}\,(3\mu l + 2\mu + l^2),$$

$$\int\limits_{0}^{l_2} u_2^0(z)\,dz = \frac{f_0 l_2^3\mu}{12\nu_1(\mu+l)}\,(\mu + 3l^2 + 4l),$$

поэтому

$$\lim_{p\to 0}\frac{pG_1(p)-pG_2(p)}{W_2(p)\,\mathrm{ch}\sqrt{p\chi_1^{-1}}\,l_1}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,(y+l_1) =$$

$$= -\frac{Af_0 l_2^3[kl^2(8\mu l + 6\mu + 2l^2) + l^3(3\mu l + 2\mu + l^2) - \mu\chi(\mu + 4l^2 + 5l)](y+l_1)}{24\nu_1\chi_1(\mu+l)(k+l)}. \qquad (3.24)$$

Второе слагаемое в (3.23), умноженное на p, при $p\to 0$ имеет предел

$$\frac{A}{\chi_1}\int\limits_{-l_1}^{y} u_1^0(z)(y-z)\,dz = \frac{Af_0 l_1^2}{2\nu_1\chi_1}\Big(-\frac{y^4}{12l_1^2} + \frac{(\mu-l^2)y^3}{6l_1 l(\mu+l)} +$$

$$+\frac{\mu(l+1)y^2}{2l(\mu+l)} + \frac{l_1(8\mu l + 6\mu + 2l^2)y + l_1^2(3\mu l + 2\mu + l^2)}{12l(\mu+l)}\Big). \qquad (3.25)$$

Складывая (3.24) и (3.25), получаем ту же формулу (3.22) для $T_1^0(y)$. Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{p\to 0} p\tilde{T}_2(y,p) = T_2^0(y)$.

Для полуограниченных слоев при $l_1, l_2 \to \infty$ из (3.16)–(3.19) находим ($\mathrm{Pr}_j = \nu_j/\chi_j \neq 1$)

$$\tilde{Z}_1(y,p) = \frac{A\tilde{f}(p)}{p^2}\Big[C_1\exp\big(\sqrt{\chi_1^{-1}p}\,y\big) - \frac{\sqrt{\nu}\,(\rho-1)\,\mathrm{Pr}_1}{(\mu+\sqrt{\nu})(\mathrm{Pr}_1-1)}\,\exp\big(\sqrt{\nu_1^{-1}p}\,y\big) - 1\Big],$$

$$\tilde{Z}_2(y,p) = \frac{A\tilde{f}(p)}{p^2}\Big[C_2\exp\big(-\sqrt{\chi_2^{-1}p}\,y\big) - \frac{\mu(\rho-1)\,\mathrm{Pr}_2}{(\mu+\sqrt{\nu})(1-\mathrm{Pr}_2)}\,\exp\big(-\sqrt{\nu_2^{-1}p}\,y\big) - \rho\Big], \qquad (3.26)$$

где

$$\tilde{Z}_j(y,p) = \lim_{l_1,l_2\to\infty}\tilde{T}_j(y,p,l_1,l_2),$$

$$C_1 = \frac{\rho-1}{(\mu+\sqrt{\nu})(k+\sqrt{\chi})}\Big(\frac{\mu\sqrt{\chi}\,(1+\sqrt{\mathrm{Pr}_2})}{\mathrm{Pr}_2-1} + \frac{k(\sqrt{\chi}+\sqrt{\nu\,\mathrm{Pr}_1})}{\mathrm{Pr}_1-1}\Big), \qquad (3.27)$$

$$C_2 = \frac{\rho-1}{(\mu+\sqrt{\nu})(k+\sqrt{\chi})}\Big(\frac{\mu(\sqrt{\chi\,\mathrm{Pr}_2}-k)}{\mathrm{Pr}_2-1} + \frac{k\sqrt{\nu}\,(\sqrt{\mathrm{Pr}_1}-1)+\sqrt{\chi}\,(k-\sqrt{\nu})}{\mathrm{Pr}_1-1}\Big).$$

Функции $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ удовлетворяют уравнениям (3.13), где в правых частях $\tilde{u}_j$ надо заменить на $\tilde{U}_j$ с использованием соотношений (3.25), а также граничным условиям (3.14).

Из (3.26), применяя обратное преобразование Лапласа (2.23), получим следующие представления возмущений температуры:

$$Z_1(y,t) = A\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\Big\{C_1\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\chi_1(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(-\frac{y}{2\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_1(t-\tau)}\Big)\Big] - \frac{\sqrt{\nu}\,(\rho-1)\operatorname{Pr}_1}{(\mu+\sqrt{\nu})(\operatorname{Pr}_1-1)}\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\nu_1(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(-\frac{y}{2\sqrt{\nu_1(t-\tau)}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\nu_1(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\nu_1(t-\tau)}\Big)\Big] - 1\Big\}\,d\tau \qquad (3.28)$$

при $y < 0$,

$$Z_2(y,t) = A\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\Big\{C_2\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\chi_2(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_2(t-\tau)}\Big)\Big] - \frac{\mu(\rho-1)\operatorname{Pr}_2}{(\mu+\sqrt{\nu})(1-\operatorname{Pr}_2)}\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\nu_2(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{\nu_2(t-\tau)}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\nu_2(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\nu_2(t-\tau)}\Big)\Big] - \rho\Big\}\,d\tau \qquad (3.29)$$

при $y > 0$ с постоянными C_1, C_2 из формул (3.27).

Если числа Прандтля равны единице ($\operatorname{Pr}_j = 1$), то решение имеет иной вид:

$$Z_1(y,t) = A\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\Big\{q_1\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\chi_1(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(-\frac{y}{2\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_1(t-\tau)}\Big)\Big] + \frac{\sqrt{\chi}\,(\rho-1)}{2(\mu+\sqrt{\chi})}\,\frac{y}{\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\Big[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_1(t-\tau)}\Big) + \frac{y}{\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\operatorname{Erf}\Big(-\frac{y}{2\sqrt{\chi_1(t-\tau)}}\Big)\Big] - 1\Big\}\,d\tau,$$

$$Z_2(y,t) = A\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\Big\{q_2\Big[\Big(1+\frac{y^2}{2\chi_2(t-\tau)}\Big)\operatorname{Erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{y}{\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\,\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_2(t-\tau)}\Big)\Big] + \qquad (3.30)$$

$$+\frac{\mu(\rho-1)}{2(\mu+\sqrt{\chi})}\frac{y}{\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\Big[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{y^2}{4\chi_2(t-\tau)}\Big)-$$

$$-\frac{y}{\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\,\mathrm{Erf}\Big(\frac{y}{2\sqrt{\chi_2(t-\tau)}}\Big)\Big]-\rho\Big\}\,d\tau.$$

Здесь

$$q_1=-\frac{\sqrt{\chi}\,(\rho-1)(k+\mu+2\sqrt{\chi}\,)}{2(\mu+\sqrt{\chi}\,)(k+\sqrt{\chi}\,)},\qquad q_2=\frac{(\rho-1)(2\mu k+\mu\sqrt{\chi}\,+k\sqrt{\chi}\,)}{4(\mu+\sqrt{\chi}\,)(k+\sqrt{\chi}\,)}.$$

При $f(t)=f_1/\sqrt{t}$ ($f_1=\mathrm{const}$) среди решений (2.26), (3.28)–(3.30) содержатся автомодельные решения вида $U_j=\sqrt{t}\,a_j(\xi_j)$, $Z_j=\sqrt{t^3}\,b_j(\xi_j)$, где $\xi_j=y/\sqrt{\nu_j t}$, поскольку только в этом случае уравнения (2.1), (2.3) и (3.1), (3.3) инвариантны относительно группы преобразований растяжения $\bar{u}=\gamma u$, $\bar{y}=\gamma y$, $\bar{t}=\gamma^2 t$, $\bar{T}=\gamma^3 T$ с параметром γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
2. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
3. **Бетчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
4. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 28/VI 2007 г.