

КОНВЕКТИВНЫЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В СПУТНОМ ПОТОКЕ СОБСТВЕННЫХ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ

Л. К. Гусаченко, В. Е. Зарко, Ю. Ю. Серебряков, В. В. Карасев, В. А. Шандаков*

Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск

*Федеральный научно-производственный центр «Алтай», 659322 Бийск

Для конвективного режима фильтрационного горения энергетических материалов в спутном потоке собственных продуктов рассмотрена модель с предельно упрощенными представлениями о кинетике и теплопередаче, показавшая неустойчивость процесса. Показано, что более точная «двухтемпературная» модель описывает стационарный режим. В этом режиме температура газа на «горячей» границе зоны прогрева существенно меньше температуры горения, а температура твердой фазы существенно ниже предложенной в последних исследованиях на эту тему. Отмечена фактическая необоснованность «двухтемпературного» подхода и необходимость учета внутригранульной неизотермичности для конвективных режимов. Показано, что учитывающая этот эффект «трехтемпературная» модель не дает устойчивого стационарного решения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что в волне горения пористого твердого материала в спутном потоке фильтрующегося сквозь него теплоносителя может достигаться относительно высокая «сверхадиабатическая» температура, что важно при сжигании низкокалорийных материалов. В [1, 2] были исследованы стационарные режимы и их устойчивость [3] для различных типов реакций в волне горения, при этом теплоноситель мог быть активным (например, окислитель) или инертным, в последнем случае химические превращения сводятся к экзотермическому термическому разложению исходного твердого вещества. Для схемы с инертным теплоносителем в [4] выделен высокоскоростной конвективный режим горения, в котором теплопроводностью можно пренебречь, и показана устойчивость такого режима.

Для практики представляет интерес режим, в котором поток инертного теплоносителя на горячем конце образца отсутствует, теплоноситель образуется в зоне реакции при разложении исходного пористого вещества и фильтруется сквозь него к «холодному» концу образца. В [5] описана конструкция соответствующего

газогенератора и приведены результаты экспериментов. Теория такого процесса не может быть создана на базе результатов [1–4], поэтому необходимо проведение соответствующих исследований. Стационарные режимы изучались в работе [6], при этом также был выделен конвективный режим. Однако устойчивость процесса не исследовалась. В [6] сообщается также об экспериментальной реализации конвективного горения, но без выхода на стационарный режим и высказано предположение, что стационарный режим не получен из-за недостаточной длины экспериментальной установки. Однако не исключено, что стационарное конвективное горение по приведенной схеме может оказаться неустойчивым. Статья посвящена проверке этой гипотезы.

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

Покажем вначале неустойчивость упомянутой схемы при наиболее грубых предположениях о кинетике и теплопередаче, максимально упрощающих математическое описание (некоторым оправданием такой постановки задачи служит уязвимость для критики «двухтемпературной» модели [6] с более точной кинетикой и теплопередачей, см. ниже).

Пусть в газогенераторе, схема которого изображена на рис. 1, по исходному пористому веществу плотностью ρ распространяется

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00617) и Федеральной целевой программы «Интеграция науки и высшей школы» (проект 1080К).

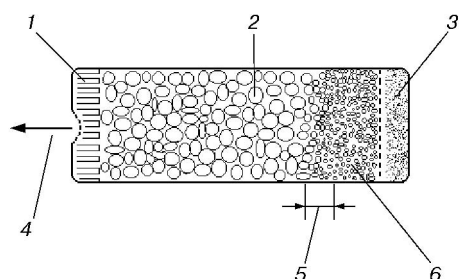


Рис. 1. Схема газогенератора:

1 — фильтр, 2 — исходный энергетический материал, 3 — воспламенитель, 4 — поток газообразных продуктов разложения, 5 — зона разложения энергетического материала, 6 — конденсированные продукты разложения

ся волна разложения конечной ширины, передний и задний фронты (начало и конец зоны реакции) находятся на расстоянии $l_b(t)$ и $l_e(t)$ от места возникновения волны. При этом массовая доля ν исходного вещества превращается в газ и фильтруется к «холодному» концу, остальные продукты реакции образуют неподвижный каркас. Предполагается, что передний фронт, проходя через частицу исходного вещества, инициирует в ней выделение горячего газа постоянной интенсивности M_1^* , г/(см³·с), которое продолжается в течение времени τ . Окончание газовыделения означает прохождение заднего фронта через частицу. Величины M_1^* , τ для данного состава полагаем постоянными. Они связаны соотношением

$$M_1^* \tau = \nu \rho.$$

Из изложенных представлений о кинетике следует

$$l_e(t) = l_b(t - \tau), \quad t > \tau.$$

Выражение для потока горячего газа через передний фронт записывается в виде

$$M^* = (l_b(t) - l_e(t))M_1^* = (l_b(t) - l_b(t - \tau))M_1^*.$$

Предполагается, что скорость распространения переднего фронта пропорциональна потоку горячего газа сквозь него:

$$dl_b(t)/dt = kM^* = (l_b(t) - l_b(t - \tau))k\nu\rho/\tau, \quad t > \tau. \quad (1)$$

Решение (1) имеет вид

$$l_b = \text{const} \cdot \exp at, \quad (2)$$

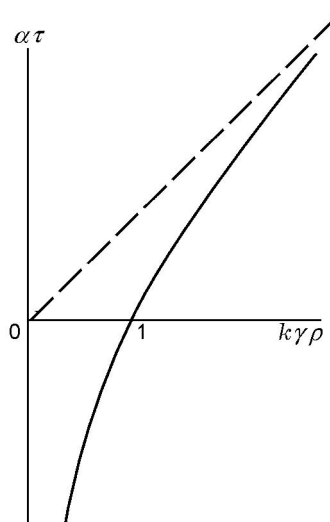


Рис. 2. К решению (1)

величина a удовлетворяет соотношению $k\nu\rho = a\tau/(1 - \exp(-a\tau))$ (см. также рис. 2).

Согласно рис. 2 выражение (2) описывает движение волны горения при $k\nu\rho > 1$. Для определения константы в (2) следует рассмотреть область $0 < t < \tau$, когда задний фронт еще не отошел от «горячего» конца образца и, следовательно, $l_e = 0$. При этом следует учесть поток M_{bu}^* через сечение $x = 0$ горячих газов воспламенителя. Возьмем его в виде

$$M_{bu}^* = (M_{bu}/t_{bu}) \exp(-t/t_{bu}),$$

где M_{bu} — полная масса газов воспламенителя, t_{bu} — время его срабатывания. Тогда

$$dl_b/dt = k(l_b M_1^* + M_{bu}^*) = k[(\nu\rho/\tau)l_b(t) + (M_{bu}/t_{bu}) \exp(-t/t_{bu})], \quad l_b(0) = 0. \quad (3)$$

Решение (3) имеет вид

$$0 < t < \tau, \quad l_b(t) = \frac{\exp(k\nu\rho t/\tau) - \exp(-t/t_{bu})}{1 + k\nu\rho t_{bu}/\tau}. \quad (3')$$

Если воспламенитель сгорает быстро ($t_{bu} \ll \tau$), из (3') следует

$$l_b(\tau) = kM_{bu} \exp k\nu\rho. \quad (4)$$

Теперь (2) можно представить в виде

$$l_b(t) = l_b(\tau) \exp(a(t - \tau)). \quad (5)$$

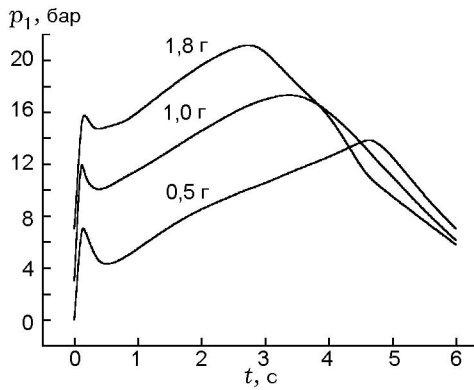


Рис. 3. Диаграммы давления в установке типа представленной на рис. 1:

масса воспламенителя проставлена около кривых

Таким образом, в данной постановке с предельно упрощенными представлениями о кинетике и теплопередаче стационарный режим отсутствует, а координата и скорость распространения начала волны реакции в каждый момент времени пропорциональны массе воспламенителя.

На рис. 3 показаны результаты нескольких экспериментов, проведенных в ходе выполнения работы [5], но не описанных в ней. Изображена зависимость от времени давления в установке типа изображенной на рис. 1. Можно ожидать, что давление в установке пропорционально скорости газовой выделению в ней, а последняя выражается через какую-то комбинацию координаты переднего фронта реакции и скорости его распространения. Поскольку обе величины согласно (4), (5) пропорциональны массе воспламенителя, можно сделать вывод, что изложенная выше максимально упрощенная модель правдоподобно описывает зависимость давления от массы воспламенителя.

В ИХКиГ СО РАН проведены эксперименты, аналогичные описанным в [5]. Кроме давления записывались показания нескольких термопар, последовательно проходящих фронтом горения, что позволило получить некоторую информацию о величинах $x_b(t)$ и dx_b/dt . Как видно из рис. 4, и здесь эти величины примерно пропорциональны массе воспламенителя.

Разумеется, изложенная простейшая модель не описывает многие сложные процессы, наблюдавшиеся в упомянутых выше экспериментах, например эволюцию жидкого натрия, присутствовавшего в продуктах разложения. Тем не менее она наглядно демонстрирует

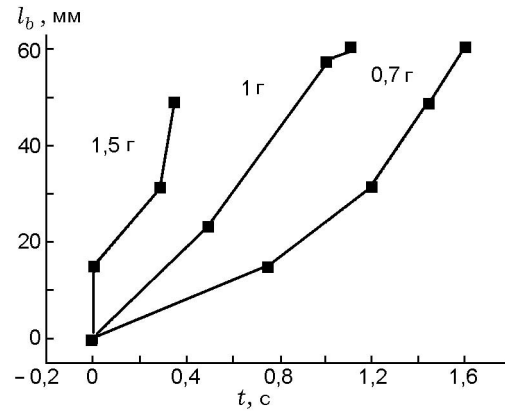


Рис. 4. Координата переднего фронта волны в зависимости от времени и массы воспламенителя (обработка показаний термопар):

масса воспламенителя проставлена около кривых

рует дестабилизирующие возможности упомянутой в [6] жесткой обратной связи фильтрующего потока и скорости волны реакции.

«ДВУХТЕМПЕРАТУРНАЯ» МОДЕЛЬ

Для проверки устойчивости рассматриваемой схемы горения в более точной постановке получим и исследуем нестационарный аналог использованной в [6] математической модели (вывод см. в приложении):

$$\begin{aligned} \rho_0(1-\varepsilon)c\left(1-\eta\nu\frac{c_1}{c}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u(t)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \\ = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha\frac{S_1}{d}(T_1-T) + QW, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho_1 V c_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \alpha \frac{S_1}{d} (T_1 - T) + \nu W c_1 (T_1 - T), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 V = \rho_0(1-\varepsilon)\nu \left[u(t)(1-\eta) + \right. \\ \left. + \int_x^\infty \frac{\partial \eta}{\partial t} dx \right] = \nu \int_x^\infty W dx, \end{aligned} \quad (8)$$

$$T(-\infty, t) = T_0, \quad \eta(-\infty, t) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} (+\infty, t) = 0.$$

Здесь начало координат взято в некоторой условной точке «начала реакций» (в асимптотическом подходе, использующем резкую зависимость скорости реакции от температуры, неопределенность исчезает и начало координат берется в точке завершения реакций); T , T_1 — температуры твердой части пористой среды (исходного вещества и твердого продукта) и ее газовой части; η — степень (массовая доля) разложения исходного вещества; ρ_0 — его плотность; c , c_1 — удельные (на единицу массы) теплоемкости исходного вещества и газа; W , Q , ν — скорость потребления массы исходного вещества реакцией разложения в единице объема, тепловой эффект этой реакции и массовая доля газа в продуктах; u , $\rho_1 V$ — скорость движения исходного вещества (и жестко связанного с ним твердого продукта) вправо и массовая скорость фильтрации газообразного продукта влево; α , S_1/d , d — коэффициент межфазного теплообмена по Ньютону, удельная поверхность и размер частиц, из которых спрессован пористый образец. При выводе (6)–(8) использованы предположения $u/V \ll 1$, $\rho_1/\rho_0 \ll 1$, $dQ/dT = 0$.

Далее рассматривается только конвективный режим. Формально это означает, что всюду, включая зону реакций, кондуктивным членом в (6) пренебрегаем. (Реализация кондуктивного или конвективного режима зависит от того, какой из них дает большую скорость распространения волны горения. Такое исследование проведено в [4], но только для «безгазовых» составов со спутной продувкой инертного теплоносителя).

Стационарный конвективный режим получим аналогично [6]. Поскольку в стационарном режиме все тепло передается твердому продукту реакции, его температуру T_m^0 можно записать сразу:

$$Q = (1 - \nu)c_2(T_m^0 - T_0), \quad (9)$$

$$T_m^0 = T_0 + Q/((1 - \nu)c_2) = T_0 + Q/(c - \nu c_1).$$

Здесь c_2 — теплоемкость твердого продукта, использованное соотношение

$$(1 - \nu)c_2 = c - \nu c_1 \quad (10)$$

следует из предположения $dQ/dT = 0$ (см. приложение). Уравнения (6)–(8) принимают вид

$$\rho_0(1 - \varepsilon)(c - \nu c_1)uT' = (S_1/d)\alpha(T_1 - T) + QW, \quad (11)$$

$$\rho_0(1 - \varepsilon)(1 - \eta)\nu c_1 u T_1' = (S_1/d)\alpha(T_1 - T) + \nu W c_1(T_1 - T), \quad (12)$$

$$\rho_0(1 - \varepsilon)u\eta' = W, \quad W = W(T, \eta). \quad (13)$$

Вычитая (12) из (11) и подставляя (13), получим

$$(c - c_1\eta\nu)T' - \nu c_1(1 - \eta)T_1' = Q\eta' - \nu c_1(T_1 - T)\eta', \quad (14)$$

откуда следует (с использованием соотношений $T(-\infty) = T_1(-\infty) = T_0$, $\eta(-\infty) = 0$)

$$(T - T_0)(c - c_1\eta\nu) = (T_1 - T_0)\nu c_1(1 - \eta) + Q\eta. \quad (15)$$

Интегрируя (14) с «горячего» конца с условиями $\eta = 1$, $T_1 = T = T_m$, можно получить

$$(T_m - T)(c - c_1\eta\nu) - (T_m - T_1)\nu c_1(1 - \eta) = Q(1 - \eta). \quad (15')$$

С учетом (10) выполняется соотношение $c - c_1\eta\nu = c(1 - \eta) + c_2(1 - \nu)\eta$, после подстановки его в (15) виден простой смысл этого уравнения: тепло для нагрева от T_0 до температуры T исходного вещества и конденсированных продуктов сгорания, находящихся в сечении x (левая часть), поступает в виде энтальпии всего газа, образующегося выше по течению (первый член правой части), и всего тепла реакции, проходящей ниже по течению (второй член).

Зона прогрева $x < -0$. Здесь еще можно пренебречь скоростью реакции и степенью разложения ($W = 0$, $\eta = 0$). Из (15) следует, что в зоне прогрева $T_1 - T_0 = (T - T_0)c/\nu c_1$ и подстановка этого соотношения в (11) дает

$$c\rho_0(1 - \varepsilon)u(T - T_0)' = (S_1/d)\alpha(T - T_0)(c/\nu c_1 - 1),$$

откуда

$$T - T_0 = (T^* - T_0) \exp(x/x_1),$$

$$x_1 = c\rho_0(1 - \varepsilon)ud/[S_1\alpha(c/\nu c_1 - 1)], \quad (16)$$

$$T'(0) = (T^* - T_0)/x_1.$$

Здесь $T^* = T(-0)$ — температура исходного вещества на границе с зоной реакции. Из (16) видно, что при $\alpha \sim u$ (что реализуется на практике, см. ниже) стационарное распределение температуры в зоне прогрева не зависит от скорости горения, толщина зоны пропорциональна размеру частиц образца.

Зона реакций $x > -0$. Считая зависимость скорости реакции от температуры достаточно сильной и соответственно зону реакции узкой по сравнению с зоной прогрева, применим обычный асимптотический подход $W \rightarrow \text{const} \delta(x - x_m)$, $x_m/x_1 \rightarrow +0$. Здесь δ — дельта-функция Дирака. Подставляя в (11), учтем ограниченность первого члена справа, что дает основание пренебречь им в зоне быстрой реакции. После этого, деля (11) на (13), получим

$$(c - c_1 \eta \nu) \frac{dT}{d\eta} = Q, \quad 0 < \eta < 1, \quad T|_{\eta=1} = T_m. \quad (17)$$

Решение (17) имеет вид

$$T_m - T = \frac{Q}{\nu c_1} \ln \frac{1 - \eta \nu c_1 / c}{1 - \nu c_1 / c}. \quad (18)$$

Срачивание. Полагая в (18) $\eta = 0$, получим температуру твердой фазы на «холодном» конце зоны реакций, которая должна совпадать с температурой T на «горячем» конце зоны прогрева:

$$T^* = T_m - \frac{Q}{c} \frac{c}{\nu c_1} \ln \frac{1}{1 - \nu c_1 / c}. \quad (19)$$

Используя (15') при $\eta = 0$, получим и температуру газа при $x = -0$

$$\begin{aligned} T_1^* &= T_m - \frac{c}{\nu c_1} \left(T_m - T^* - \frac{Q}{c} \right) = \\ &= T_m - \frac{Q}{c} \frac{c}{\nu c_1} \left(\frac{c}{\nu c_1} \ln \frac{1}{1 - \nu c_1 / c} - 1 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Обращает на себя внимание существенное отличие температур T^* и T_1^* от соответствующих значений $T_m - Q/c$ и T_m , полученных в [4] для случая инертного теплоносителя и затем использованных (по-видимому, необоснованно) в [6]. Например, при $c = c_1$, $\nu = 0,5$ температурный скачок по (19) составит $2 \ln 2Q/c \approx 1,38Q/c$ вместо Q/c , как в [6]. Для T^* отличие исчезает при $\nu c_1 / c \rightarrow 0$, для T_1^* оно сохраняется и в этом случае:

$$\nu c_1 / c \rightarrow 0, \quad T^* \rightarrow T_m - Q/c, \quad T_1^* \rightarrow T_m - 0,5Q/c. \quad (21)$$

Указанное различие имеет простое объяснение. Поскольку при асимптотическом подходе в относительно узкой зоне реакций можно пренебречь межфазным теплообменом, газ из этой

зоны будет выходить с той же температурой, какую имел при поступлении в нее. Но температура поступающего газа в постановке [4] с инертным теплоносителем есть T_m , а в постановке [6] весь газ создается в зоне реакций и имеет при образовании температуру T породившего его исходного состава (см. вывод уравнений в приложении). Поскольку в зоне реакций T претерпевает конечное изменение (переходящее при асимптотическом подходе в скачок по x), температура газа на выходе в зону прогрева равна некоторой средней температуре исходного вещества в зоне реакции. Грубо говоря, в зоне реакции температурный скачок в газе примерно равен половине такового для твердой фазы, что и подтверждает соотношение (21).

Стационарную скорость горения получим, также требуя срачивания температурных градиентов на границе зон прогрева и реакций. Согласно (11) на «холодной» границе зоны реакций

$$T'_{x=+0} = QW(T^*, 0) / [c\rho_0(1 - \varepsilon)u]. \quad (22)$$

Величина $T'_{x=-0}$ задана уравнением (16),

$$QW(T^*, 0) / [c\rho_0(1 - \varepsilon)u] = (T^* - T_0) / x_1. \quad (23)$$

Соотношение (23), определяющее стационарную скорость горения, практически совпадает с аналогичным из [6] (за исключением отмеченного выше различия в величине T^*). Скорость горения извлекаем из (23), используя эмпирическую зависимость $\alpha(\rho_1 V)$. В [6] она взята в виде $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1(\rho_1 V)^n$ со ссылкой на [7]. При $\alpha_0 > 0$ и достаточно низкой температуре T^* формула (22) не дает вещественного положительного решения для величины $\rho_1 V$, что трактуется в [6] как невозможность конвективного режима. На самом деле, этот эффект вызван использованием неудачной аппроксимации $\alpha(\rho_1 V)$ и ему не следует придавать физический смысл. Заметим, что в [7] такой вид $\alpha(\rho_1 V)$ используется для одиночной частицы, а для зернистого слоя там предложен частный случай (формула Бернштейна (1948 г.), в которой $\alpha_0 = 0$, $n = 0,6$). Но предпочтительнее использовать более современные данные. В [8] показано, что в зернистых слоях в каждом пустотном «кармане» реализуются хорошо изученные закономерности теории струй. В широком диапазоне изменения скорости продувки ($\alpha_0 = 0$, $n = 1$)

$$\alpha = \text{Nu}\lambda_1/d, \quad \text{Nu} = \text{RePr}^{1/3}\psi(\varepsilon)/4,$$

$$\text{Re} = \rho_1 Vd/\mu, \quad \text{Pr} = c_1\mu/\lambda_1,$$

$$\psi(\varepsilon) = 0,508 - 0,56(1 - \varepsilon), \quad \varepsilon < 0,4, \quad (24)$$

$$\psi(\varepsilon) = 1 - 1,164(1 - \varepsilon)^{2/3}, \quad \varepsilon > 0,4,$$

$$\alpha = \nu c_1 \rho_0 (1 - \varepsilon) u \text{Pr}^{-2/3} \psi(\varepsilon) / 4.$$

Здесь λ_1, μ — теплопроводность и вязкость газа, $\text{Nu}, \text{Re}, \text{Pr}$ — числа Нуссельта, Рейнольдса и Прандтля. Из (23), (24), (9), (19) следует

$$\rho_0(1 - \varepsilon)u = W(T^*, 0)d \frac{2}{3} \frac{\text{Pr}^{2/3}}{(1 - \varepsilon)\psi(\varepsilon)} f\left(\frac{\nu c_1}{c}\right),$$

$$f(z) = \frac{z}{z + (1 - z) \ln(1 - z)}. \quad (25)$$

Здесь использовано также выражение для удельной поверхности S_1/d в виде произведения числа частиц в единице объема $6(1 - \varepsilon)/\pi d^3$ на поверхность πd^2 одной частицы, так что $S_1 = 6(1 - \varepsilon)$.

Формула (25) позволяет получить необходимое условие существования конвективного режима. Оценим толщину той зоны химической реакции, которая была использована в асимптотическом подходе (зоны, где $T > T^*$). Как отмечалось в [4], здесь фактически происходит адиабатический тепловой взрыв от температуры исходного вещества T^* . Известно, что время такого взрыва имеет порядок $\rho_0(1 - \varepsilon)/W(T^*, 0)$. Поскольку твердое вещество движется к поверхности горения со скоростью u , за это время оно проходит путь

$$\Delta x_c = \rho_0 u (1 - \varepsilon) / W(T^*, 0), \quad (26)$$

который и представляет собой толщину зоны реакции. Из (25) следует

$$\Delta x_c \approx d \frac{2}{3} \frac{\text{Pr}^{2/3}}{(1 - \varepsilon)\psi(\varepsilon)} f\left(\frac{\nu c_1}{c}\right) \sim d. \quad (26')$$

Теперь можно оценить роль теплопроводности в зоне реакций, рассматривая отношение кондуктивного и конвективного потоков тепла:

$$(\lambda \Delta T / \Delta x_c) / c \rho_0 u \Delta T \sim \lambda / c \rho_0 u d. \quad (27)$$

Если в системе (6)–(8) ввести безразмерную координату x/x_1 , используя для x_1 выражение из (16) с учетом (24), то при кондуктивном члене появится параметр, практически совпадающий с правой частью (27). Согласно (27) конвективного режима нет (и обязательно нужно учитывать теплопроводность), если этот параметр больше единицы или сравним с ней. В противном случае конвективный режим существует, но реализация его зависит, как отмечалось выше, от соотношения скоростей двух режимов.

Из соотношения (26) следует еще один важный вывод: какие-либо уточнения структуры зоны реакции при конвективном режиме в рамках квазигомогенного подхода бесполезны (d — размер неоднородностей, совпадающий с размером частицы). Более того, бесполезны попытки уточнить структуру и зоны прогрева в рамках квазигомогенного подхода, поскольку подстановка (24) в (16) и для толщины прогретого слоя дает порядок $x_1 \sim d$, а точнее,

$$x_1 = 2d / (3(1 - \varepsilon)\psi(\varepsilon)(1 - z)\text{Pr}^{2/3}). \quad 16'$$

Из (26), (23), (19), (9) следует, что

$$\Delta x_c / x_1 = (1 - z) f(z), \quad z = \nu c_1 / c.$$

z	$\Delta x_c / x_1$
0,5	1,63
0,6	1,03
0,7	0,62
0,8	0,335

Из таблицы видно, что при $z < 0,8$ не выполняется условие $\Delta x_c / x_1 \ll 1$, необходимое для использования метода сращиваемых асимптотических разложений.

Устойчивость стационарного режима. Зона реакций считается квазистационарной, в ней выполняются соотношения (19), (20), (22).

В зоне прогрева вводим безразмерные переменные и малые возмущения стационарного режима:

$$x = \xi x_1, \quad t = \tau x_1 / u^0, \quad T - T_0 = (T^* - T_0)v,$$

$$T_1 - T_0 = (T^* - T_0)v_1,$$

$$v^0 = \exp(\xi), \quad v_1^0 = c / \nu c_1 v^0, \quad v = v^0 + \delta v \exp(n\tau),$$

$$v_1 = v_1^0 + \delta v_1 \exp(n\tau),$$

$$u/u^0 = 1 + (\delta u/u) \exp(n\tau).$$

Тогда уравнения (6), (7) принимают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{u}{u^0} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{u}{u^0} (\theta_1 - \theta),$$

$$\frac{\nu c_1}{c} \frac{u}{u^0} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{u}{u^0} (\theta_1 - \theta),$$

$$\theta(-\infty, \tau) = \theta_1(-\infty, \tau) = 0,$$

$$n\delta\theta + \delta\theta' = \delta\theta_1 - \delta\theta, \quad (28)$$

$$(\nu c_1/c)\delta\theta_1' = \delta\theta_1 - \delta\theta, \quad (29)$$

$$\delta\theta(-\infty) = \delta\theta_1(-\infty) = 0.$$

Подставляя $\delta\theta$ из (29) в (28), для $\delta\theta_1$ получим

$$(\nu c_1/c)\delta\theta_1'' + (\nu c_1/c - 1 + n\nu c_1/c)\delta\theta_1' - n\delta\theta_1 = 0, \quad (30)$$

$$\delta\theta_1(-\infty) = 0.$$

Еще одно условие получим, исключив $T_m(t)$ из условий сращивания (19), (20). Тогда $T_1(0, t) - T(0, t) = \text{const}$ и согласно (29) $\delta\theta_1'(0) = 0$. Поскольку возмущение скорости $\delta u/u$ выпало из системы (28), (29), оно выражается (через $\delta\theta_1(0)$) из условия сращивания (22), которое, таким образом, ничего не добавляет к исследованию устойчивости решения задачи (30).

Полагая $\delta\theta_1 \sim \exp(m\tau)$, из (30) получим

$$m^2 - m(c/\nu c_1 - 1 - N) - N = 0, \quad (31)$$

$$N = nc/\nu c_1.$$

При исследовании корней уравнения следует иметь в виду, что $c/\nu c_1 - 1 = (1 - \nu)c_2/\nu c_1 > 0$. Вещественные части обеих корней должны быть положительными, так как условию $\delta\theta_1'(0) = 0$ можно удовлетворить, только если в выражении $\delta\theta_1 = B_1 \exp(m_1\xi) + B_2 \exp(m_2\xi)$ обе константы не равны нулю, при этом условие $\delta\theta_1(-\infty) = 0$ требует выполнения $\text{Re}(m_1) > 0$, $\text{Re}(m_2) > 0$, что имеет место при $N < 0$. Следовательно, решений с $N > 0$ нет и система устойчива к малым возмущениям.

«ТРЕХТЕМПЕРАТУРНАЯ» МОДЕЛЬ

Полученный результат, однако, не решает проблему устойчивости конвективного режима. Оценим область применимости используемой для его описания «двухтемпературной» модели. Следующее из (27) ограничение

$$A = \lambda/c\rho_0 u d \ll 1 \quad (32)$$

отделяет упомянутую область от области применимости «однотемпературной» модели с кондуктивным режимом. Однако при достаточно малых значениях параметра A можно ожидать появления «внутригранульной» неизотермичности в волне горения. В самом деле, характерное время прогрева частицы t_h имеет порядок $c\rho_0 d_2/\lambda$, а время пребывания ее в зоне прогрева волны горения согласно (16') $t_r \sim x_1/u \sim d/u$. Таким образом, условие (32) означает, что

$$A \sim t_r/t_h \ll 1, \quad (33)$$

т. е. в конвективном режиме температура в прогреваемой частице не успевает выровняться. Следовательно, «двухтемпературная» модель неприменима без дополнительных исследований. Конечно, можно представить себе частные случаи ее применимости, например, когда сами частицы металлические, а «межчастичная» теплопроводность ограничена прослойками теплоизолирующего связующего.

Возможный учет неизотермичности в частицах. Это было сделано, например, в [9], где в постановке задачи записано уравнение теплопроводности внутри частицы, что привело к увеличению размерности задачи.

Обсудим вначале возможные физические последствия эффекта для всего процесса. Можно ожидать существенного (по сравнению с предсказаниями «двухтемпературной» модели) увеличения скорости распространения волны горения, поскольку тепло газового потока будет расходоваться теперь только на нагревание наружных слоев гранул до температуры возбуждения в них самоподдерживающейся реакции (T_s^*). При этом ширина зоны реакции, в которой догорают частицы, может стать значительно больше. Неизотермичность в гранулах может привести к появлению в зоне реакции локальных фронтов горения на частицах. Нечто похожее наблюдается при воспламенении зернистого заряда в артиллерийском оружии. Нас, однако, интересует возможность стационарного распространения волны горения в газогенераторе типа представленного на рис. 1.

Как и в «двухтемпературной» модели, будем пренебрегать кондуктивной теплопередачей между частицами и по газу. В любом сечении зоны прогрева между температурой гранул T_{gr} (средней по объему гранулы) и температурой газа T_1 имеет место соотношение

$$c_1\nu(T_1 - T_0) = c(T_{gr} - T_0). \quad (34)$$

Оно означает, что переносимый газом поток избытка энтальпии полностью возвращается обратно в виде потока избытка энтальпии гранул. Множитель ν учитывает тот факт, что массовый поток газа составляет долю ν массового потока гранул.

Выражение для T_{gr} получим, рассматривая неизотермичность гранулы в процессе ее прогрева. Для этого используем приближенный метод (фактически метод интегральных соотношений). Распределение температуры в грануле по радиусу ищем в виде $T = T_{r=0} + (T_s - T_{r=0})(r/R)^2$, где $R = d/2$ — радиус гранулы, T_s — температура ее поверхности. Потребуем выполнения условия $\lambda(\partial T/\partial r)_{r=R} = q(x)$, так что $\lambda(T_s - T_{r=0})/R = q$. Здесь x — координата гранулы, $q(x) = \alpha(T_1 - T_s)$ — тепловой поток на единицу ее поверхности из газа. Легко показать, что при такой аппроксимации

$$T_{gr} = T_s - qd/10\lambda. \quad (35)$$

Пределы применимости использованной аппроксимации профиля температур в грануле следуют из структуры (35): T_{gr} не должна быть меньше T_0 . Разумеется, соотношение (35) весьма приближенное: во-первых, тепловой поток на поверхности гранулы в разных местах неодинаков, во-вторых, благодаря прессованию гранулы представляют собой не свободно лежащие сферы, а узлы сложной связанной системы.

Исключая T_{gr} из (34), (35), получим

$$\begin{aligned} \frac{\alpha d}{10\lambda} &= \frac{ud}{40\kappa} zPr^{2/3}(1 - \varepsilon)\psi(\varepsilon) = \\ &= \frac{T_s - T_0 - (c_1\nu/c)(T_1 - T_0)}{T_1 - T_s}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь α определено в (24), $\kappa = \lambda/c\rho$. Если на «горячей» границе зоны прогрева считать, что T_s^* и T_1^* известны, то выражение (36) будет определять стационарную скорость распространения волны.

Стационарные профили температур получим, используя (34), (35) и баланс энергии типа (11)

$$c\rho_0 u T'_{gr} = (s_1/d)\alpha(T_1 - T_s).$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T_s - T_0}{T_s^* - T_0} &= \frac{T_1 - T_0}{T_1^* - T_0} = \frac{T_{r=0} - T_0}{T_{r=0}^* - T_0} = \exp \frac{x}{x_m}, \\ x_1 &= \frac{c\rho u d}{6(1 - \varepsilon)\alpha} \frac{1 + \alpha d/10\lambda}{c/\nu c_1 - 1} = \\ &= \frac{2d}{3Pr^{2/3}(1 - \varepsilon)^2\psi(\varepsilon)} \frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_s}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$T_{r=0}^* - T_0 = 0,5(5(c_1\nu/c)(T_1^* - T_0) - 3(T_s^* - T_0)). \quad (38)$$

Согласно (37) толщина прогретого слоя положительно зависит от скорости горения и поэтому может принимать большие значения в отличие от случая «двухтемпературной» модели, где она не зависит от скорости горения (полезно сравнить и с «однотемпературной» кондуктивной моделью, где толщина прогретого слоя обратно пропорциональна скорости горения). Возможно, замеченная при конвективных режимах в экспериментах [6] большая толщина прогретого слоя как раз и есть признак «внутригранульной» термической неоднородности.

Выражение (38) должно давать положительные значения $T_{r=0}^* - T_0$. Невыполнение этого требования будет означать, что параболической аппроксимации недостаточно для описания профиля температур в частице.

Обратим внимание на зависимость (36), которая при $x = 0$ определяет скорость горения. В нее не входит скорость реакции разложения вещества. Эта реакция проходит «в режиме отрыва» и поэтому не влияет на скорость горения. Для сравнения: в «двухтемпературной» модели $u \sim W(T^*)$, в «однотемпературной» (кондуктивной) $u \sim (W(T_m))^{1/2}$. Поскольку T^* и T_m положительно зависят от T_0 , в этих моделях зависимость $u(T_0)$ положительная. В рассматриваемой модели с внутригранульной неизотермичностью, напротив, эта зависимость отрицательная. В самом деле, $u \sim [T_s^* - T_0(1 - c_1\nu/c) - (c_1\nu/c)T_1^*(T_0)]$, величина T_s^* , по-видимому, должна слабо зависеть от T_0 , а температура газа T_1^* (как некоторая средняя величина между T_s^* и окончательной температурой продуктов сгорания) должна зависеть от T_0 положительно. Таким образом, $\partial u/\partial T_0 < 0$.

Этот результат кажется парадоксальным, однако следует заметить, что ситуация $\partial u/\partial T_0 < 0$ в принципе возможна и при обычном (без фильтрации) горении энергетического материала с ведущей ролью реакций в конденсированной фазе (или на поверхности). В этом случае скорость горения положительно зависит от температуры поверхности, которая при частичном испарении исходного вещества, в свою очередь, положительно зависит от концентрации пара над поверхностью. Последняя величина при определенном сочетании параметров модели может и отрицательно зависеть от начальной температуры. Такая возможность фактически показана в [10] численным счетом. При этом было получено $\partial T_s/\partial T_0 < 0$, но $\partial u/\partial T_0 > 0$, поскольку при использованных значениях параметров ведущая роль принадлежала газовой фазе. В [10] отмечено также, что согласно феноменологической модели нестационарного горения (Зельдовича — Новожилова) при $\partial T_s/\partial T_0 < 0$ стационарный режим горения в «кондуктивном» режиме неустойчив.

Проверка устойчивости режима с внутригранульной неизотермичностью. Нестационарные уравнения отличаются от (6)–(8) только тем, что в конвективных членах вместо $T_1 - T$ стоит $T_1 - T_s$, величина T имеет смысл средней температуры по частице (то, что в (35) обозначено через T_{gr}), а W — средней скорости реакции по локальному объему пористого вещества:

$$\begin{aligned} \rho_0(1-\varepsilon)c\left(1-\eta\nu\frac{c_1}{c}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u(t)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \\ = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha\frac{S_1}{d}(T_1 - T_s) + QW, \quad (6') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 V c_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \alpha \frac{S_1}{d} (T_1 - T_s) + \\ + \nu W c_1 (T_1 - T), \quad (7') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 V = \rho_0(1-\varepsilon)\nu\left(u(t)(1-\eta) + \int_x^\infty \frac{\partial \eta}{\partial t} dx\right) = \\ = \nu \int_x^\infty W dx, \quad (8') \end{aligned}$$

$$T(-\infty, t) = T_0, \quad \eta(-\infty, t) = 0,$$

$$\partial T/\partial x(+\infty, t) = 0.$$

Из (35) получим

$$T_1 - T_s = (T_1 - T)/(1 + \alpha d/10\lambda). \quad (39)$$

В частности, в «сечении зажигания»

$$x = -0, \quad T_1 - T_s^* = \frac{T_1 - T}{1 + \alpha d/10\lambda}. \quad (39')$$

Зону реакций считаем квазистационарной, как и в «двухтемпературной» модели. При этом для скорости реакции, имеющей резкие неоднородности на гранулах, процесс осреднения по сечению образца вызывает сомнения. Оправданием может служить то, что процедура нахождения решения в зоне реакций (см. выше для «двухтемпературной» модели) предусматривает исключение W . Вторым (и главным) аргументом служит то, что реакции идут «в режиме отрыва» и, значит, никак не влияют на зону прогрева, а только подстраиваются к ней. Температура T_1^* газа, выходящего из зоны реакций, тоже подстраивается к изменениям количества тепла, поставляемого сюда из зоны прогрева. Результат совпадает с таковым для «двухтемпературной» модели и сводится к условию на «холодной» границе зоны реакций:

$$\delta T(0) = \delta T^* = \delta T_1(0) = \delta T_1^*. \quad (40)$$

В зоне прогрева ($\eta = 0$, $W = 0$) стационарные распределения имеют вид (37). Вычитая (7') из (6') и применяя метод малых возмущений $T(x) = T^0(x) + \delta T(x) \exp nt$, $T_1(x) = T_1^0(x) + \delta T_1(x) \exp nt$, $u = u^0 + \delta u \exp nt$, получим, как и в «двухтемпературной» модели,

$$(n/u)\delta T + \delta T' = (\nu c_1/c)\delta T_1'. \quad (41)$$

Подставим (8') и (39) в (7') и учтем, что $\alpha \sim u$, тогда

$$\delta T_1' = \frac{\alpha s_1}{\nu \rho_0(1-\varepsilon)c_1 u d} \delta \left(\frac{T_1 - T}{1 + \alpha d/10\lambda} \right). \quad (42)$$

С учетом (39), (39') запишем

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{T_1 - T}{1 + \alpha d/10\lambda} \right) = \\ = \gamma \left(\delta T_1 - \delta T - (1 - \gamma)(T_1 - T) \frac{\delta u}{u} \right), \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{T_1^* - T_s^*}{T_1^* - T^*}. \quad (43)$$

Из (39') следует

$$\delta T_1(0) = \delta T_1^* = -\gamma(T_s^* - T^*)\delta u/u. \quad (44)$$

Используя (37), полученную систему представим в виде

$$N\delta T + d\delta T/d\xi = z d\delta T_1/d\xi,$$

$$(1/z - 1)d\delta T_1/d\xi = \gamma(\delta T_1 - \delta T) + \delta T_1(0) \exp \xi, \quad (45)$$

$$\delta T(0) = \delta T_1(0), \quad \delta T(-\infty) = \delta T_1(-\infty) = 0.$$

Здесь $\xi = x/x_m$, $N \sim n$. Переходя к безразмерным возмущениям температур $\underline{\delta T_1}(\xi) = \delta T_1(\xi)/\delta T_1(0)$, $\underline{\delta T}(\xi) = \delta T(\xi)/\delta T_1(0)$, перепишем систему (45):

$$N\underline{\delta T} + d\underline{\delta T}/d\xi = z d\underline{\delta T_1}/d\xi,$$

$$(1/z - 1)d\underline{\delta T_1}/d\xi = \gamma(\underline{\delta T_1} - \underline{\delta T}) + \exp \xi, \quad (45')$$

$$\underline{\delta T}(0) = \underline{\delta T_1}(0) = 1, \quad \underline{\delta T}(-\infty) = \underline{\delta T_1}(-\infty) = 0.$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \underline{\delta T}(\xi) &= A \exp k\xi + B \exp \xi, \\ \underline{\delta T_1}(\xi) &= A_1 \exp k\xi + B_1 \exp \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Для выполнения граничного условия при $\xi = -\infty$ требуется $\text{Re}(k) > 0$. Если таких решений окажется несколько, следует взять столько же соответствующих членов в (46). Подставляя (46) в (45') и приравнявая слева и справа коэффициенты при $\exp \xi$, находим

$$\begin{aligned} B_1 &= 1/(1/z - 1 + \gamma(1 - z/(N + 1))), \\ B &= B_1 z/(N + 1). \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично приравниваем слева и справа коэффициенты при $\exp(k\xi)$:

$$A/A_1 = 1 - (1 - z)k/\gamma z = kz/(N + k). \quad (48)$$

Наконец, требуем выполнения условия $A + B = 1$, $A_1 + B_1 = 1$ при $\xi = 0$, и после подстановки (47) получаем

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1 - \frac{z/(N+1)}{1/z-1+\gamma(1-z/(N+1))}}{1 - \frac{1}{1/z-1+\gamma(1-z/(N+1))}}. \quad (49)$$

Комбинация (48), (49) задает частотное уравнение. Подставляя $N = 0$, в плоскости (γ, z) получим линию $z = 1$, которая представляет собой границу «апериодической» неустойчивости. Подставляя $z = 0,5$ и $\gamma = 2$ в (48), (49) в качестве «пробных» координат внутри проверяемой области, получим $k = -1$, $N = +2/3$, что означает неустойчивость стационарного режима при $z < 1$, т. е. всюду, поскольку решение в области $z > 1$ не имеет физического смысла. По этой причине мы не обсуждаем границу дополнительной колебательной неустойчивости, которая отходит от линии $z = 1$ при $\gamma = 1$.

ВЫВОДЫ

В данной работе на моделях различной степени сложности исследована устойчивость стационарного конвективного режима фильтрационного горения энергетических материалов в спутном потоке собственных продуктов. Простейшая модель оказалась неустойчивой. Используемая обычно в задачах фильтрационного горения «двухтемпературная» модель изучаемого процесса устойчива, но она пригодна лишь в узкой области параметров. В рамках более точной «трехтемпературной» модели показана неустойчивость процесса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По аналогии со «стационарным» выводом [6] получим нестационарные уравнения в системе координат, на которую слева надвигается исходное вещество со скоростью u . При этом полагаем, что $u/V \ll 1$, $\rho_1/\rho \ll 1$, $dQ/dT = 0$. Для определения энтальпий (h , h_1 , h_2) и концентраций (ρ , ρ_1 , ρ_2) исходного вещества, газообразных и конденсированных продуктов используются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho h + \rho_2 h_2) + u(t) \frac{\partial}{\partial x}(\rho h + \rho_2 h_2) = \\ = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{S_1}{d} \alpha(T - T_1) - W\nu h_1(T), \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 V h_1(T_1)) = -\frac{S_1}{d} \alpha(T_1 - T) + W\nu h_1(T), \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} \rho_2 = (\rho_0 - \rho)(1 - \nu), \quad \rho = \rho_0(1 - \eta), \\ \rho_2 = \rho_0(1 - \nu)\eta, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u(t)\frac{\partial\rho}{\partial x} = -W, \quad (\text{П.4})$$

$$= \rho_0\nu \left(u(t)(1-\eta) + \int_x^\infty \frac{\partial\eta}{\partial t} dx \right).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 V) = -\nu W, \quad \rho_1 V = \nu \int_x^\infty W dx. \quad (\text{П.5})$$

Раскрывая левую часть (П.1) с помощью (П.3), (П.4), запишем ее в виде

$$-Wh(T) + (1-\nu)Wh_2(T) + (\rho c + \rho_2 c_2) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u(t)\frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Подставляя последнее выражение в (П.1) и учитывая, что разность энтальпий образования исходных и конечных продуктов есть тепловой эффект реакции, получим

$$h - \nu h_1 - (1-\nu)h_2 = Q. \quad (\text{П.6})$$

Из (П.3) следует

$$\rho c + \rho_2 c_2 = \rho_0(c - \eta(c - (1-\nu)c_2)).$$

Далее, из (П.6) находим $dQ/dT = c - \nu c_1 - (1-\nu)c_2$. Если положить $dQ/dT = 0$, то $c - (1-\nu)c_2 = \nu c_1$. При этом

$$\rho c + \rho_2 c_2 = \rho_0 c(1 - \eta\nu c_1/c).$$

Окончательно (П.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_0 c \left(1 - \frac{\eta\nu c_1}{c} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u(t)\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \\ = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{S_1}{d} (T_1 - T) + QW, \quad T(-\infty) = T_0. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем (П.2) с учетом (П.5):

$$\rho_1 V c_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{S_1}{d} \alpha (T_1 - T) + \nu W c_1 (T_1 - T). \quad (\text{П.7})$$

Входящий в (П.7) газовый поток с помощью (П.4), (П.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 V = \nu \int_x^\infty W dx = -\nu \int_x^\infty \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} \right) dx = \\ = \rho_0\nu u(t) \int_x^\infty \left(\frac{1}{u} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) dx = \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алдушин А. П., Сеплярский Б. С.** Распространение волны экзотермической реакции в пористой среде при продуве газа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 1. С. 72.
2. **Алдушин А. П., Мержанов А. Г.** Теория фильтрационного горения: Общие представления и состояние исследований // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах / Под ред. Ю. Ш. Матроса. Новосибирск: Наука, 1988. С. 9–52.
3. **Алдушин А. П., Каспарян С. Г.** Устойчивость стационарных волн фильтрационного горения // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 6. С. 37–49.
4. **Алдушин А. П.** Теплопроводный и конвективный режимы горения пористых систем при фильтрации теплоносителя // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 2. С. 60–68.
5. **Шандаков В. А., Пузанов В. Н., Комаров В. Ф., Борочкин В. П.** Способ генерации холодных газов в твердотопливных газогенераторах // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 4. С. 75–78.
6. **Алдушин А. П., Звиненко К. И.** Горение пиротехнических смесей в условиях теплообмена с газообразными продуктами реакции // Физика горения и взрыва. 1991. Т. 27, № 6. С. 56–60.
7. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
8. **Гольдштиг М. А.** Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984.
9. **Киселев О. В., Матрос Ю. Ш., Чумакова В. А.** Явление распространения теплового фронта в слое катализатора // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах / Под ред. Ю. Ш. Матроса. Новосибирск: Наука, 1988. С. 145–202.
10. **Гусаченко Л. К., Зарко В. Е.** Возможность отрицательной зависимости температуры поверхности от начальной температуры // Тр. конф. по прикладным проблемам горения. Томск, 1998.

Поступила в редакцию 28/VI 2000 г.