

УДК 534.113

## МОДЕЛЬ ИЗГИБА БАЛКИ С НАДРЕЗОМ: ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ

А. М. Ахтямов, М. А. Ильгамов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа  
Башкирский государственный университет, 450074 Уфа  
E-mails: AkhtyamovAM@mail.ru, ilgamov@anrb.ru

Предложены условия сопряжения, моделирующие поперечный надрез в балке. С использованием этих условий решена задача об определении местоположения и размеров надреза. Проведена идентификация надреза в статическом случае по значениям прогибов балки в нескольких точках и в динамическом случае по ее первым собственным частотам колебаний. Получены зависимости первых собственных частот от характерных параметров задачи. Изучено влияние относительной погрешности измерения частот на относительную погрешность вычисления параметров надреза. Показано, что использование первых собственных частот изгибных колебаний балки относительно различных осей позволяет получить более точные результаты идентификации, чем использование собственных частот изгибных колебаний относительно одной оси. Поскольку локальное повреждение типа вмятины, местной коррозии, раскрытой трещины допускается моделировать надрезом, полученные результаты могут быть использованы также для диагностирования соответствующих дефектов.

Ключевые слова: обратная задача, балка, собственные частоты, надрез.

В настоящей работе определяются местоположение и размеры надреза в балке по ее прогибам в нескольких точках, а также по собственным частотам ее изгибных колебаний. Эти задачи связаны с задачами акустической диагностики [1, 2], обратными задачами математической физики [3] и задачей идентификации краевых условий и функции нагрузки [4]. Наиболее близкие к рассматриваемой проблеме задачи рассматривались в [5–12]. В [5–8] изучались возможности определения местоположения и размеров полости в стержне. В случае продольных колебаний стержня такие задачи изучались в [9], а в случае изгибных колебаний — в [10–12]. В настоящей работе, в отличие от работ [10–12], предлагаются условия сопряжения для надреза, которые в случае сквозного надреза стержня не содержат дополнительного условия, кроме естественных в таком случае условий свободных концов.

**1. Условия сопряжения, моделирующие надрез.** При рассмотрении изгиба балки с двусторонним надрезом (рис. 1) напряженно-деформированное состояние учитывается в рамках технической теории для тонкой балки без учета сложного деформированного состояния в пределах надреза. Не учитываются также инерционные и внешние силы в области надреза. Ширина прямоугольного поперечного сечения балки равна  $B$ , высота —  $H$ , длина надреза  $l$  значительно меньше длины балки  $L$ . Распределенная поперечная сила  $P$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-00293-а, 11-01-97002-р-поволжье.а, 11-01-12005-офи-м).

© Ахтямов А. М., Ильгамов М. А., 2013

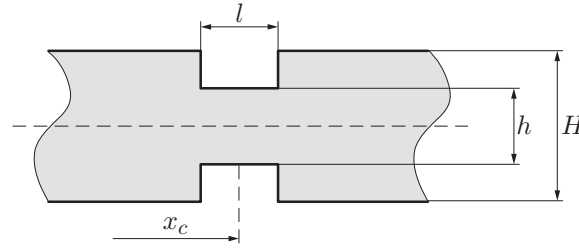


Рис. 1. Схема надреза балки

действует в вертикальной плоскости. Направления перемещения  $W(x, t)$  и силы  $P$  совпадают. Величины с нижним индексом 1 соответствуют области слева от надреза, величины с индексом 2 — области справа от надреза, величины с индексом 12 — области самого надреза  $[x_c - l/2; x_c + l/2]$ . В указанном приближении может быть рассмотрен также изгиб балки с односторонним надрезом.

Полагая  $E_i = E$ ,  $\rho_i = \rho$ ,  $J_i = J = BH^3/12$ ,  $F_i = BH$  и вводя обозначения

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad w_i = \frac{W_i}{L}, \quad \omega_*^2 = \frac{EH^2}{12\rho L^4}, \quad p = \frac{12L^3P}{EBH^3},$$

уравнение изгиба балки

$$E_i J_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = P \quad (i = 1, 2)$$

запишем в виде

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial \xi^4} + \frac{1}{\omega_*^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = p \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

При указанных выше предположениях в точке  $x = x_c$  выполняется приближенное равенство изгибающих моментов и перерезывающих сил:

$$M_1 \approx M_2 \approx M_{12}, \quad Q_1 \approx Q_2 \approx Q_{12}.$$

Здесь  $M_{12}$ ,  $Q_{12}$  — средние значения силовых факторов в области надреза.

Поскольку  $J_1 = J_2 = J$ , получаем

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} \quad \left( \xi = \frac{x_c}{L} = \xi_c \right). \quad (2)$$

Среднюю кривизну в пределах короткого надреза можно принять приближенно равной  $(\partial w_2 / \partial x - \partial w_1 / \partial x) / l$ . Поэтому при  $x = x_c$  из равенства  $M_1 = M_{12}$  следует условие

$$EJ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = EJ_{12} \frac{1}{l} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right).$$

Так как  $J_{12} = Bh^3/12$  (ширина надреза совпадает с шириной балки), то

$$\beta \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \quad \beta = \frac{lH^3}{Lh^3} \quad (\xi = \xi_c). \quad (3)$$

Принимая среднее значение  $\partial^3 w / \partial x^3$  в области надреза равным  $(w_2 - w_1) / l^3$ , из равенства  $Q_1 = Q_{12}$  получаем

$$\beta \frac{l^2}{L^2} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = w_2 - w_1 \quad (\xi = \xi_c). \quad (4)$$

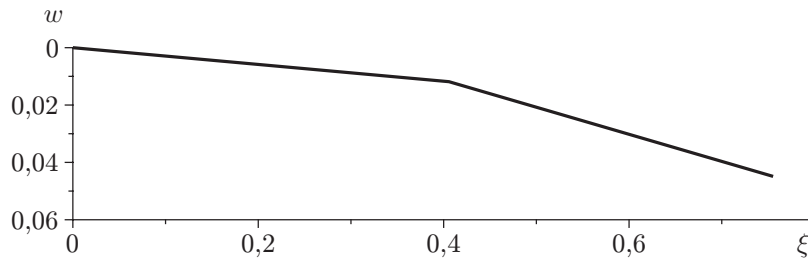


Рис. 2. Упругая линия балки

В случае  $l = 0$  (отсутствие надреза) условия (2)–(4) переходят в равенства изгибающих моментов, перерезывающих сил, прогибов и углов поворота в точке  $\xi = \xi_c$ .

В случае  $h = 0$  (разрез проходит по всей толщине балки) из (2)–(4) следуют условия на свободных концах балки в точке  $\xi = \xi_c$ . Заметим, что условия сопряжения, предложенные в [10, 11, 12. С. 566] для моделирования раскрытой трещины, в этом случае при  $\xi = \xi_c$  содержат дополнительное условие:  $w_2 = w_1 + (l/L) \partial w_1 / \partial \xi$  [10] или  $w_2 = w_1$  [11, 12].

**2. Прямая и обратная статические задачи.** Если величина вертикальной распределенной нагрузки  $p$  постоянна вдоль всей длины балки, то общим решением уравнения (1) в статическом случае является функция

$$w_i(\xi) = \frac{1}{24} p \xi^4 + \frac{1}{6} A_i \xi^3 + \frac{1}{2} B_i \xi^2 + C_i \xi + D_i \quad (i = 1, 2).$$

В случае консольной балки с условиями на концах

$$w_1(0) = 0, \quad \frac{dw_1(0)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2 w_2(1)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 w_2(1)}{d\xi^3} = 0 \quad (5)$$

при выполнении условий (2)–(4) можно определить функции прогиба

$$w_1(\xi) = (p\xi^2/24)(6 - 4\xi + \xi^2) \quad (0 \leq \xi < \xi_c); \quad (6)$$

$$w_2(\xi) = (p\xi^2/24)(6 - 4\xi + \xi^2) + (p\beta/2)(1 - \xi_c)[(1 - \xi_c)(\xi - \xi_c) - 2l^2/L^2] \quad (\xi_c < \xi \leq 1). \quad (7)$$

Если в (7) не учитывать член  $2l^2/L^2$ , пренебрежимо малый по сравнению с  $(\xi_c - 1)(\xi - \xi_c)$ , то получим

$$w_2(\xi) = (p\xi^2/24)(6 - 4\xi + \xi^2) + (p\beta/2)(1 - \xi_c)^2(\xi - \xi_c). \quad (8)$$

Из (6), (8) следует, что  $w_1(\xi_c) = w_2(\xi_c)$ . Поэтому указанное приближение означает замену условия (4) равенством  $w_1(\xi_c) = w_2(\xi_c)$ .

На рис. 2 показана упругая линия при  $p = 0,3$ ,  $\xi_c = 0,4$ ,  $l/L = 0,01$ ,  $h/H = 0,2$ . Коэффициент  $\beta = 1,25$ .

Представляет интерес сравнение приведенного решения с решением той же задачи, полученным с использованием условий точного равенства перемещений, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил в точках  $\xi_c - l/(2L)$  и  $\xi_c + l/(2L)$ . Соответствующие трем указанным выше участкам балки прогибы обозначим через  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_{12}$ ,  $\tilde{w}_2$ . Такое решение справедливо в случае малости толщины  $h$  балки на втором участке по сравнению с его длиной  $l$  (в приведенном выше примере при  $l/L = 0,01$ ,  $h/H = 0,2$   $h/l \approx 0,1$ ). Очевидно,  $\tilde{w}_1(\xi) = w_1(\xi)$ , а  $\tilde{w}_{12}$ ,  $\tilde{w}_2$  равны

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{12}(\xi) = & \frac{p\beta}{4} \left( (\xi_c - 1)^2(\xi - \xi_c) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (3(1 - \xi_c)^2 - 2(1 - \xi_c)(1 - \xi)) \frac{l}{L} + \frac{1}{12} (\xi - 3\xi_c + 2) \frac{l^2}{L^2} + \frac{1}{32} \frac{l^3}{L^3} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p}{2} \left( \frac{\xi \xi_c}{3} (\xi_c^2 - 3\xi_c + 3) - \frac{\xi_c^2}{12} (3\xi_c^2 - 8\xi_c + 6) + \right. \\
 & + \frac{H^3}{12h^3} (\xi_c^3(3\xi_c - 4\xi - 8) + \xi^2(\xi^2 - 4\xi + 6) + 6\xi_c(2\xi\xi_c - 2\xi + \xi_c)) - \\
 & \left. - \frac{1}{2} (\xi - \xi_c)(\xi_c - 1)^2 \frac{l}{L} + \frac{1}{8} (\xi_c - 1)(2\xi - 3\xi_c + 1) \frac{l^2}{L^2} + \frac{1}{24} (3\xi_c - \xi - 2) \frac{l^3}{L^3} - \frac{1}{64} \frac{l^4}{L^4} \right), \\
 \tilde{w}_2(\xi) = & \frac{p\xi^2}{24} (6 - 4\xi + \xi^2) + \frac{p\beta}{2} (1 - \xi_c)^2 (\xi - \xi_c) + \\
 & + \frac{p\xi_c}{2} [(1 - \xi_c)^2 - \xi] \frac{l}{L} + p \left( \beta - \frac{l}{L} \right) (\xi - 3\xi_c + 2) \frac{l^2}{L^2}.
 \end{aligned}$$

Если отбросить член, содержащий отношение  $l/L$ , то  $\tilde{w}_2(\xi) = w_2(\xi)$ .

Таким образом, условия (2)–(4) обеспечивают справедливость приближенных равенств  $\tilde{w}_1(\xi) \approx w_1(\xi)$ ,  $\tilde{w}_2(\xi) \approx w_2(\xi)$ .

Рассмотрим обратные краевые задачи для уравнения (1) с условиями сопряжения (2)–(4). Задачи могут быть поставлены при любых краевых условиях, однако для определенности были выбраны условия (5).

2.1. *Определение параметров надреза и нагрузки по прогибам балки.* Одной из естественных обратных задач является определение четырех параметров  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$  по прогибам балки  $w(\xi_k)$  в четырех точках  $\xi = \xi_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Однако такая задача не является корректной. Действительно, подставив  $\xi_k$  и  $w(\xi_k)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) в (6), (7), получаем систему четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$ . Решение этой системы не единственно. Более того, в случае замены решения (7) на решение (8), которое содержит только три параметра  $\xi_c$ ,  $p$ ,  $\beta = lH^3/(Lh^3)$ , найти однозначно  $l/L$ ,  $h/H$  из приведенного выражения для  $\beta$  без дополнительных условий нельзя. Например, можно потребовать чтобы значение  $l/L + h/H$  было минимальным.

Заметим, что если из двух параметров  $l/L$  и  $h/H$  неизвестным является только один, то задача идентификации трех неизвестных параметров по трем значениям прогибов  $w(\xi_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) также может быть некорректной. Из (6) следует, что по известным прогибам стержня слева от надреза  $\xi < \xi_c$  можно определить только один неизвестный параметр  $p$ . Поэтому по трем значениям прогибов  $w(\xi_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) при  $\xi_k < \xi_c$  ( $k = 1, 2$ ) все три параметра  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $h/H$  не могут быть однозначно определены.

В случаях  $\xi_1 < \xi_c < \xi_k$  ( $k = 2, 3$ ) и  $\xi_c < \xi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) задача решается однозначно. Например, если  $l/L = 0,01$ ,  $w(0, 2) = 0,002\ 62$ ,  $w(0, 8) = 0,054\ 50$ ,  $w(0, 9) = 0,066\ 23$ , а значения  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $h/H$  неизвестны, то из (6), (7) получаем систему трех уравнений относительно трех неизвестных. В интервалах  $\xi_c \in (0; 1)$  и  $h/H \in (0; 1)$  можно выделить единственное решение. Решив систему уравнений в указанных интервалах, получаем следующее решение:  $p = 0,300\ 00$ ,  $\xi_c = 0,399\ 89$ ,  $h/H = 0,200\ 00$ . Эти значения  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $h/H$  были заданы в прямой задаче при определении указанных значений прогибов в точках  $\xi = 0,2; 0,8; 0,9$  ( $\xi_c = 0,400\ 00$ ).

С увеличением погрешности определения прогибов увеличивается погрешность вычислений неизвестных параметров. Так, при  $w(0, 2) = 0,0026$ ,  $w(0, 8) = 0,0545$ ,  $w(0, 9) = 0,0662$  имеем  $p = 0,2977$ ,  $\xi_c = 0,4004$ ,  $h/H = 0,2003$ , при  $w(0, 2) = 0,003$ ,  $w(0, 8) = 0,055$ ,  $w(0, 9) = 0,066$  —  $p = 0,3435$ ,  $\xi_c = 0,3883$ ,  $h/H = 0,1867$ .

Рассмотренный пример соответствует случаю  $\xi_1 < \xi_c < \xi_k$  ( $k = 2, 3$ ).

В случае  $\xi_c < \xi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), подставив известные значения  $w$  в (7), получаем систему трех уравнений, из которой можно найти три параметра. Если  $l/L = 0,01$ ,  $w(0, 7) = 0,042\ 83$ ,  $w(0, 8) = 0,054\ 50$ ,  $w(0, 9) = 0,066\ 23$ , а значения  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $h/H$  неизвестны,

то из (7) получаем следующее решение:  $p = 0,288\,00$ ,  $\xi_c = 0,395\,51$ ,  $h/H = 0,196\,40$ . Таким образом, в случае  $\xi_c < \xi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) погрешность при определении неизвестных больше, чем в случае  $\xi_1 < \xi_c < \xi_k$  ( $k = 2, 3$ ). Такая же тенденция наблюдается при увеличении погрешности определения прогибов.

2.2. *Определение параметров надреза и нагрузки по заданным углам поворота сечения балки.* Углы поворота слева и справа от надреза равны

$$\frac{dw_1}{d\xi} = \frac{p\xi}{6} (\xi^2 - 3\xi + 3), \quad \frac{dw_2}{d\xi} = \frac{p\xi}{6} (\xi^2 - 3\xi + 3) + \frac{plH^3(\xi_c - 1)^2}{2Lh^3}. \quad (9)$$

Обратная задача состоит в том, чтобы по углам поворота в нескольких точках определить параметры задачи  $p$ ,  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$ . Задача поиска трех или четырех параметров имеет бесконечное множество решений, так как три параметра  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$  содержатся в (9) только в последнем слагаемом. Единственное решение имеет лишь задача поиска  $p$  и (или) одного из параметров  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$  по значениям углов поворота в двух точках, если хотя бы одна из точек находится справа от надреза.

2.3. *Определение параметров надреза и нагрузки по заданным деформациям верхней и нижней поверхностей балки.* Деформации  $\varepsilon = \pm(H/(2L)) \partial^2 w / \partial \xi^2$  слева и справа от надреза описываются одним выражением  $\pm(pH/(4L))(1 - 2\xi + \xi^2)$ , поэтому по ним (например, по показаниям тензометра) может быть определена лишь нагрузка, действующая на балку. Деформация  $\varepsilon$  и кривизна упругой линии не зависят от параметров надреза. Поэтому определение остальных параметров по известным деформациям верхней и нижней поверхностей балки в нескольких точках невозможно.

Приведенный пример показывает, что при определении местоположения и параметров локального повреждения балки, а также нагрузки на нее предъявляются повышенные требования к точности приборных измерений.

**3. Зависимость частот колебаний балки от местоположения и глубины надреза.** Принимая в (1)  $p \equiv 0$  и  $w_i(\xi, t) = y_i(\xi) \cos(\omega t)$ , получаем

$$y_i^{(4)}(\xi) = \lambda^4 y_i(\xi), \quad \lambda^4 = \omega^2 / \omega_*^2, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Нетривиальное решение (10) имеет вид [13]

$$y_i(\xi, \lambda) = A_i z_1(\xi, \lambda) + B_i z_2(\xi, \lambda) + C_i z_3(\xi, \lambda) + D_i z_4(\xi, \lambda), \quad i = 1, 2,$$

где функции

$$z_1(\xi, \lambda) = (\cos(\lambda\xi) + \operatorname{ch}(\lambda\xi))/2, \quad z_2(\xi, \lambda) = (\sin(\lambda\xi) + \operatorname{sh}(\lambda\xi))/(2\lambda),$$

$$z_3(\xi, \lambda) = (-\cos(\lambda\xi) + \operatorname{ch}(\lambda\xi))/(2\lambda^2), \quad z_4(\xi, \lambda) = (-\sin(\lambda\xi) + \operatorname{sh}(\lambda\xi))/(2\lambda^3)$$

удовлетворяют условиям

$$z_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq r, \\ 1, & j = r, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Константы  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) являются решениями системы восьми алгебраических уравнений — четырех краевых условий и четырех условий сопряжения (2)–(4). Нули определителя  $\Delta(\lambda)$  этой системы являются собственными значениями поставленной задачи.

Таблица 1

Собственные частоты образца 1

$k$	$f_{k0}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k0}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k0}$	$f_{k4}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k4}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k4}$	$f_{k8}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k8}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k8}$	$f_{k12}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k12}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k12}$
1	20,000	19,923	-0,4	20,000	19,900	-0,5	19,750	19,880	0,7	19,000	19,826	4,4
2	124,500	126,349	1,5	124,250	126,312	1,7	124,063	126,279	1,8	123,000	126,193	2,6
3	342,188	359,283	5,0	340,813	358,754	5,3	336,875	358,291	6,4	326,563	357,057	9,3

Таблица 2

Собственные частоты образца 2

$k$	$f_{k0}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k0}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k0}$	$f_{k4}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k4}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k4}$	$f_{k8}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k8}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k8}$	$f_{k12}^e, \Gamma_{\Pi}$	$f_{k12}, \Gamma_{\Pi}$	$\Delta_{k12}$
1	40,000	39,670	-0,8	39,698	39,643	-0,1	39,375	39,620	0,6	39,063	39,559	1,3
2	109,688	109,351	-0,3	109,063	109,244	0,2	108,125	109,149	1,0	105,938	108,902	2,8
3	215,000	214,371	-0,3	214,087	214,355	0,1	214,688	214,321	-0,2	214,375	214,260	-0,1

Рассмотрим следующие краевые условия:

$$EJ \frac{d^2 y_2(0)}{d\xi^2} - Lk_0 \frac{dy_2(0)}{d\xi} = 0, \quad EJ \frac{d^3 y_2(0)}{d\xi^3} - L^3 k_1 y_2(0) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 y_2(1)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 y_2(1)}{d\xi^3} = 0;$$

$$\frac{d^2 y_2(0)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 y_2(0)}{d\xi^3} = 0, \quad \frac{d^2 y_2(1)}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 y_2(1)}{d\xi^3} = 0. \quad (12)$$

Для балок с такими краевыми условиями и надрезами глубиной  $d = H - h = 4, 8, 12$  мм в [14] имеются экспериментальные данные. В табл. 1, 2 для двух алюминиевых балок (образцы 1, 2) приведены экспериментальные значения частот  $f_k^e$  и значения частот, вычисленные по формуле  $f_k = \omega_k / (2\pi) = \lambda_k^2 \omega_* / (2\pi)$ , где  $\lambda_k$  — нули определителя  $\Delta(\lambda)$  ( $f_{kd}, f_{kd}^e$  — расчетная и экспериментальная  $k$ -е частоты изгибных колебаний балки с надрезом глубиной  $d$ ; индекс  $d = 0$  соответствует балке без надреза; погрешность вычислялась по формуле  $\Delta_{kd} = 100(f_{kd} - f_{kd}^e) / f_{kd}$ ). Большинство параметров обоих образцов одинаковы:  $E = 6,979 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $B = 50$  мм,  $H = 25$  мм,  $l = 1$  мм. Различаются только длина, краевые условия и место надреза. Длина образца 1  $L = 996$  мм, краевыми условиями являются условия (11) с параметрами жесткости при повороте  $k_0 = 1,5 \cdot 10^5$  Н·м/рад и жесткости при перемещении по вертикали  $k_1 = 0,265 \cdot 10^8$  Н/м, надрез расположен на расстоянии  $x_c = 275$  мм от левого конца балки. Длина образца 2  $L = 1832$  мм, краевыми условиями являются условия свободных концов (12), надрез расположен на расстоянии  $x_c = 595$  мм от левого конца балки.

Из табл. 1 следует, что в случае высоких мод различие между расчетными и экспериментальными частотами возрастает даже для балки без надреза. Наличие надреза вызывает увеличение различия частот для высоких мод. Это может быть обусловлено несоответствием реальных условий в эксперименте и условий (11) на левом конце. В эксперименте по мере увеличения частоты возрастает влияние инерционности гибкого элемента опоры, что не учитывается в (11). Из табл. 2 следует, что результаты расчетов и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются, так как условия (12) соответствуют эксперименту с образцом 2.

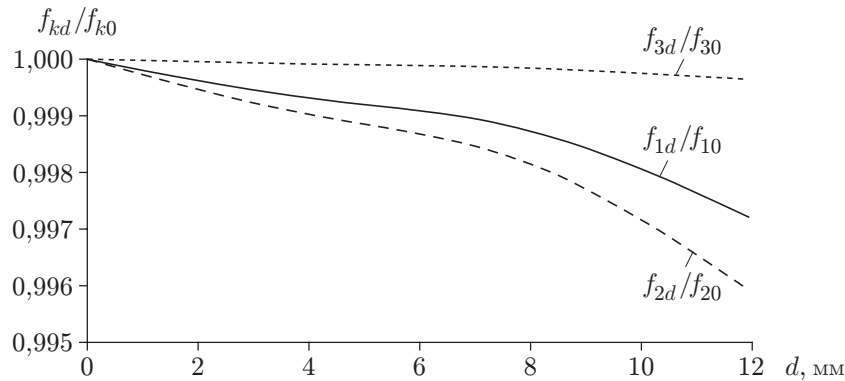
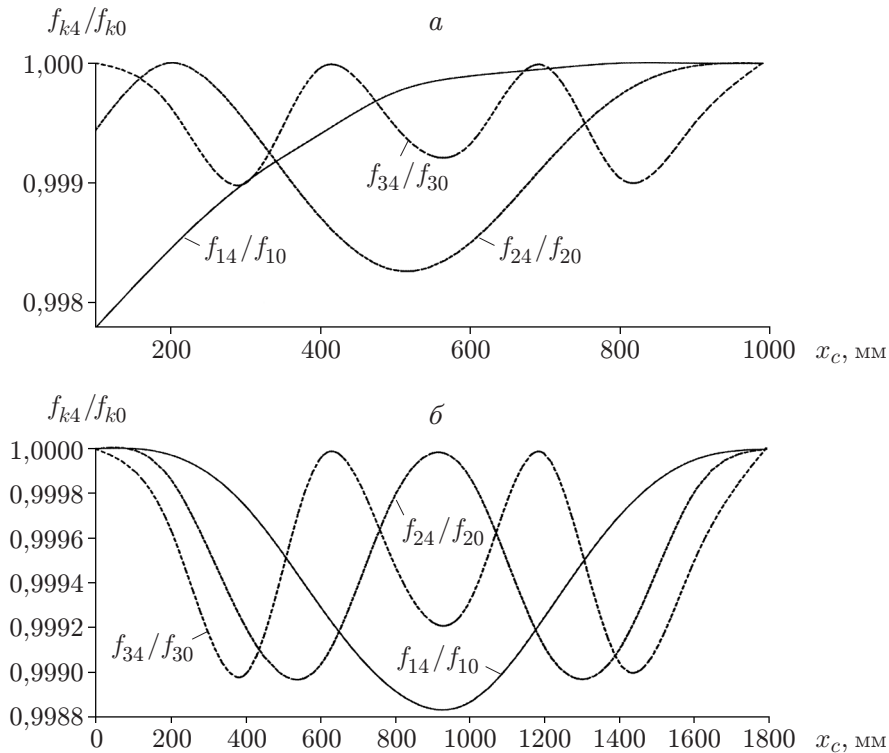


Рис. 3. Зависимость частоты от глубины надреза для образца 2

Рис. 4. Зависимости частоты от местоположения надреза:  
а — образец 1, б — образец 2

Ниже на основе предложенной модели проведен численный анализ зависимостей первых собственных частот от глубины и координаты надреза.

На рис. 3 показана зависимость отношений  $f_{kd}/f_{k0}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) от глубины надреза для образца 2 при  $x_c = 595$  мм. Видно, что с увеличением глубины надреза собственные частоты монотонно уменьшаются.

На рис. 4 показана зависимость отношений  $f_{k4}/f_{k0}$  от координаты надреза  $x_c$  для образцов 1, 2 при  $d = 4$  мм. По мере приближения координаты надреза к свободному концу балки первая частота увеличивается. Аналогично изменяются вторая и третья собственные частоты, однако при удалении от свободного конца их поведение становится немонотонным: третья частота изменяется быстрее, чем вторая.

В случае высоких собственных частот при определенном расположении надреза (для второй моды при  $\xi_c = 0,2$ ) собственные частоты балки с надрезом и без надреза могут

Таблица 3

Значения  $x_c$ ,  $d$  в зависимости от собственных частот для образца 2

$k$	$f_{14}$ , Гц	$f_{24}$ , Гц	$d$ , мм	$x_c$ , мм	$\delta f_{14}$ , %	$\delta f_{24}$ , %	$\delta d$ , %	$\delta x_c$ , %
1	39,643 296	109,243 689	4,00	595,00 (1237,00)	0	0	0	0
2	39,643 298	109,243 851	3,99	595,25 (1236,75)	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	-0,25	0,042
3	39,643 801	109,244 964	3,90	593,71 (1238,29)	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	-2,50	-0,220

совпадать. Это объясняется тем, что надрез совпадает с точкой перегиба соответствующей собственной функции, в которой кривизна упругой линии равна  $\partial^2 w_1 / \partial \xi^2 = 0$  ( $\xi = \xi_c$ ). При этом условие (3) переходит в условие  $\partial w_2 / \partial \xi = \partial w_1 / \partial \xi$ . Вследствие малости  $\beta \mu^3 (l/L)^2$  по сравнению с единицей ( $\mu$  — коэффициент изменчивости деформированного состояния) при  $\xi = \xi_c$  условие (4) переходит в равенство  $w_2(\xi) = w_1(\xi)$ . Тогда условия (2)–(4) переходят в равенства изгибающих моментов, перерезывающих сил, прогибов и углов поворота в точке  $\xi = \xi_c$  (в случае балки без надреза).

**4. Определение глубины и местоположения надреза по первым частотам колебаний балки.** Обратная задача состоит в определении местоположения и размеров надреза балки по собственным частотам ее колебаний. Решение этой задачи сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений  $\Delta(\lambda_k) = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) относительно неизвестных  $\xi_c$ ,  $l/L$ ,  $h/H$ .

Идентифицируя наряду с  $\xi_c$  параметры  $l$  и  $h$ , получаем бесконечное множество решений. Как и в статическом случае, это обусловлено тем, что при малых значениях  $\beta (l^2/L^2)$  условие сопряжения (4) сводится к равенству  $w_1 = w_2$  (для данных экспериментов  $(lH/Lh)^3 \sim 10^{-9}$ ). Поэтому искомые параметры  $l/L$  и  $h/H$  остаются только в условии (3), из которого ни один из них нельзя однозначно определить, не зная другой.

При определении  $\xi_c$  и одного из двух параметров ( $h/H$  или  $l/L$ ) обратной задачи по двум собственным значениям решение можно найти с помощью системы уравнений

$$\Delta(\lambda_1, \xi_c, lL^{-1}, hH^{-1}) = 0, \quad \Delta(\lambda_2, \xi_c, lL^{-1}, hH^{-1}) = 0. \quad (13)$$

В табл. 3 приведены значения параметров  $d$ ,  $x_c$  надреза в зависимости от частот для образца 2 ( $\delta$  — погрешность вычисления соответствующего параметра; в графе  $x_c$  в скобках указано расстояние от левого края до симметричного надреза). Относительная погрешность реконструкции увеличивается на четыре-пять порядков (возрастает в  $10^4 \div 10^5$  раз) по сравнению с относительной погрешностью входной информации. Поэтому в табл. 1, 2 значения частот приведены с точностью до тысячных долей герца (экспериментальные данные в [14] также найдены с точностью до тысячных долей герца).

Заметим, что если центр надреза расположен в середине балки ( $x_c = 916$  мм) со свободными концами, то при решении системы (13) возникают значительно бóльшие погрешности определения параметров надреза. В этом случае относительная погрешность реконструкции увеличивается на  $10 \div 11$  порядков по сравнению с относительной погрешностью входной информации. Это обусловлено тем, что в середине балки со свободными концами расположены узел и точка перегиба второй моды колебаний, поэтому вторая частота балки не меняется при увеличении глубины надреза и становится малоинформативной при диагностировании параметров надреза.

В данной работе предлагается другой метод диагностирования параметров надреза, в котором используются только первые собственные частоты изгибных колебаний относительно различных осей [15]. Этот метод позволяет проводить диагностику без использования вторых и последующих собственных частот и получать более точные результаты.



**5. Определение параметров надреза по собственным частотам изгибных колебаний балки относительно различных осей.** Выше использовались лишь собственные частоты изгибных колебаний относительно оси  $z$ , проходящей через центр тяжести сечения стержня перпендикулярно оси  $x$  и параллельно надрезу. При этом моменты инерции вычислялись по формулам  $J^{(1)} = BH^3/12$  (вне области разреза) и  $J_{12}^{(1)} = Bh^3/12$  (в области надреза). В случае изгибных колебаний относительно оси  $y$ , проходящей через центр тяжести сечения стержня перпендикулярно осям  $x$  и  $z$ , получаем следующие формулы для осевых моментов инерции:  $J^{(2)} = HB^3/12$  (вне области разреза),  $J_{12}^{(2)} = hB^3/12$  (в области надреза). Тогда в формулах (1)–(4), (10), (11)  $\omega_*^2$  следует заменить на  $EB^2/(12\rho L^4)$ ,  $p$  — на  $12L^3P/(EB^3H)$ , а  $\beta$  — на  $lH/(Lh)$ . Если изгибные колебания происходят относительно биссектрисы координатных углов II и IV системы  $zOy$ , то соответствующие осевые моменты инерции определяются по формулам  $J^{(3)} = HB(H^2 + B^2)/24$  (вне области разреза) и  $J_{12}^{(3)} = hB(h^2 + B^2)/24$  (в области надреза) [16. С. 138]. Если изгибные колебания происходят относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения стержня под углом  $-\pi/6$  к оси  $z$  (в плоскости  $zOy$ ), то осевые моменты инерции равны  $J^{(4)} = HB(3H^2 + B^2)/48$  (вне области разреза) и  $J_{12}^{(4)} = hB(3h^2 + B^2)/48$  (в области надреза) [16. С. 138]. Используя эти формулы, для каждого из четырех видов рассмотренных изгибных колебаний получаем следующие уравнения для определения первых собственных частот  $\omega_1^{(i)}$ :

$$\Delta^{(i)}(\lambda_1^{(i)}, \xi_c, lL^{-1}, hH^{-1}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (14)$$

и наоборот, если для каждого из четырех рассмотренных колебаний известны первые собственные частоты, то, используя любые три из четырех уравнений (14), можно найти все три неизвестных параметра  $\xi_c, l, h$  надреза.

В табл. 4 приведены результаты решения системы трех уравнений ( $i = 1, 2, 4$ ) для трех неизвестных  $x_c, d, l$  ( $f_1^{(i)}$  — первые собственные частоты, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1^{(i)}$ ). Вычисления проведены для образца 3. Образец 3 отличается от образца 2 тем, что в нем надрез расположен на расстоянии  $x_c = 916$  мм от левого конца балки.

Из табл. 4 следует, что в отличие от случая, рассмотренного в п. 4, при использовании спектров частот изгибных колебаний относительно разных осей можно определить все три параметра надреза. Это обусловлено тем, что по одному найденному параметру  $\beta^{(1)} = lJ^{(1)}/(LJ_{12}^{(1)})$  невозможно однозначно определить  $l$  и  $h$  (или  $d$ ); если же найти любые два параметра из четырех  $\beta^{(i)} = lJ^{(i)}/(LJ_{12}^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , то вследствие различия формул для осевых моментов инерции можно найти однозначное решение для  $l$  и  $h$  (или  $d$ ) в соответствующих интервалах. При реконструкции всех трех параметров надреза относительная погрешность возрастает в  $10^8 \div 10^9$  раз по сравнению с погрешностью вычисления собственных частот. Однако эти результаты значительно точнее результатов реконструкции трех параметров по трем собственным частотам одного и того же спектра частот изгибных колебаний.

Использование спектров частот изгибных колебаний относительно различных осей позволяет получить более точные результаты и при определении двух неизвестных параметров. В табл. 5, 6 приведены результаты численных экспериментов для образца 3. Из табл. 5, 6 следует, что в случае, когда в качестве исходной информации используются две частоты изгибных колебаний относительно одной и той же оси, относительная погрешность реконструкции возрастает в  $10^{10} \div 10^{11}$  раз по сравнению с погрешностью измерения частот для образца 3. Если используются первые частоты изгибных колебаний относительно различных осей, погрешность увеличивается в  $10^5 \div 10^6$  раз. Если неизвестен только один параметр, то при определении  $l$  относительная погрешность реконструкции

Таблица 4  
Значения  $x_c, d, l$  в зависимости от первых собственных частот изгибных колебаний относительно различных осей для образца 3

$k$	$f_1^{(1)}, \Gamma\text{ц}$	$f_1^{(2)}, \Gamma\text{ц}$	$f_1^{(4)}, \Gamma\text{ц}$	$d, \text{мм}$	$l, \text{мм}$	$x_c, \text{мм}$	$\delta f_1^{(1)}, \%$	$\delta f_1^{(2)}, \%$	$\delta f_1^{(4)}, \%$	$\delta d, \%$	$\delta l, \%$	$\delta x_c, \%$
1	39,623 644 22	79,274 339 48	52,428 852 96	3,98	1,01	865,97 (966,03)	0	0	0	0	0	0
2	39,623 644 15	79,274 339 61	52,428 852 92	3,99	1,19	731,96 (1100,04)	$-0,18 \cdot 10^{-6}$	$0,16 \cdot 10^{-6}$	$-0,76 \cdot 10^{-7}$	0,25	17,82	-15,48
3	39,623 643 99	79,274 336 26	52,428 852 70	3,99	2,38	522,60 (1309,404)	$-0,58 \cdot 10^{-6}$	$-0,40 \cdot 10^{-5}$	$-0,50 \cdot 10^{-6}$	0,25	135,64	-39,65

Таблица 5  
Значения  $x_c, d$  в зависимости от двух собственных частот изгибных колебаний относительно одной оси для образца 3

$k$	$f_1^{(1)}, \Gamma\text{ц}$	$f_2^{(1)}, \Gamma\text{ц}$	$d, \text{мм}$	$x_c, \text{мм}$	$\delta f_1^{(1)}, \%$	$\delta f_2^{(1)}, \%$	$\delta d, \%$	$\delta x_c, \%$
1	39,623 644 222 678	109,350 894 218 92	4,00	916,00 (916,00)	0	0	0	0
2	39,623 644 222 716	109,350 894 218 83	4,04	884,38 (947,62)	$10^{-10}$	$-0,8 \cdot 10^{-10}$	1	-3,5
3	39,623 644 221 000	109,350 894 220 03	13,40	253,21 (1578,79)	$-0,4 \cdot 10^{-8}$	$0,1 \cdot 10^{-8}$	235	-72,4

Таблица 6  
Значения  $x_c, d$  в зависимости от первых собственных частот изгибных колебаний относительно двух осей для образца 3

$k$	$f_1^{(1)}, \Gamma\text{ц}$	$f_1^{(4)}, \Gamma\text{ц}$	$d, \text{мм}$	$x_c, \text{мм}$	$\delta f_1^{(1)}, \%$	$\delta f_1^{(4)}, \%$	$\delta d, \%$	$\delta x_c, \%$
1	39,623 644	52,428 852	4,00	916,00 (916,00)	0	0	0	0
2	39,623 682	52,428 958	4,02	887,79 (944,21)	$9,6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0,50	-3,08
3	39,618 653	52,428 293	5,39	774,94 (1057,06)	-0,013	-0,001	34,75	-15,40

по сравнению с погрешностью измерения первой собственной частоты возрастает в  $10 \div 100$  раз, при определении  $d$  или  $x_c$  — в  $10^3 \div 10^4$  раз.

**Заключение.** Для балки с малым поперечным надрезом сформулированы условия сопряжения, используемые в статической и динамической задачах. Указанный надрез является моделью локальных повреждений балки. В прямой задаче по данным параметрам балки и надреза определяются прогиб балки или собственные частоты. В обратной задаче по прогибам в нескольких точках или по низшим собственным частотам определяются координата и параметры надреза. На основе известных результатов измерений решение позволяет определить местоположение, глубину или ширину локальных повреждений, в том числе на участках балки, недоступных для визуального осмотра и использования контактных средств диагностики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Артоболевский И. И.** Введение в акустическую динамику машин / И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. М.: Наука, 1979.
2. **Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р.** Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Техн. акустика. 2003. № 5. С. 1–7. [Электрон. ресурс]. <http://www.ejta.org>.
3. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
4. **Ахтямов А. М., Нафикова Э. Р.** Восстановление краевых условий и функций нагрузки // Контроль. Диагностика. 2007. № 9. С. 50–52.
5. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
6. **Ватульян А. О., Солуянов Н. О.** Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
7. **Ахтямов А. М., Аюпова А. Р.** Диагностирование полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. Т. 46, № 5. С. 29–35.
8. **Ватульян А. О., Солуянов Н. О.** Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 152–158.
9. **Ильгамов М. А.** Диагностика повреждений вертикальной штанги // Тр. Ин-та механики Уфим. науч. центра РАН. 2007. Вып. 5. С. 201–211.
10. **Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.** Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
11. **Morassi A.** Crack-induced changes in eigenparameters on beam structures // J. Engng Math. 1993. V. 119. P. 1798–1803.
12. **Гладвелл Г. М. Л.** Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2008.
13. **Вибрации** в технике: Справ. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.
14. **Sinha J. K., Friswell M. I., Edwards S.** Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data // J. Sound Vibrat. 2002. V. 251, N 1. P. 13–38.
15. **Ахтямов А. М., Саляхова Е. В.** Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? // Техн. акустика. 2011. Т. 7. С. 1–10. [Электрон. ресурс] <http://www.ejta.org>.
16. **Рудицын М. Н.** Справочное пособие по сопротивлению материалов / М. Н. Рудицын, П. Я. Артемов, М. И. Любошиц. Минск: Вышэйш. шк., 1970.

*Поступила в редакцию 27/1 2011 г.,  
в окончательном варианте — 16/1 2012 г.*