

## ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ГРУНТА

Н. А. Алексеев, Х. А. Рахматулин, А. Я. Сагомонян

(Москва)

Анализ многочисленных экспериментальных исследований различных авторов [1-5] показывает, что грунты являются пластическим телом с нелинейной и необратимой объемной деформацией. Опыты по определению коэффициента бокового распора при одноосной деформации образцов грунта различной воздушной пористости (отношение объема пор, занятых воздухом к объему всего грунта) показали существенное его изменение в зависимости от пористости грунта и нелинейность и необратимость связи между осевым и радиальным напряжением, что подтверждается и в работах других авторов [6].

Ниже выведены основные уравнения движения грунта с учетом указанных выше свойств. Грунт моделируется сплошной [1] сжимаемой средой, допускающей конечные пластические деформации. Проведенные авторами экспериментальные исследования по динамическому сжатию грунтов позволили определить функциональные зависимости между инвариантами, входящими в уравнения движения.

§ 1. Применение условия пластичности Прандтля для исследования одномерного движения грунта. Грунты обладают свойствами пластических тел; сжимаемость грунта значительна, поэтому для решения задач необходимо иметь связь между среднегидростатическим давлением и объемной деформацией. Опыты, проведенные авторами по определению этой связи, показали, что она нелинейна и имеет необратимый характер.

Таким образом, динамическую теорию грунта можно представить как теорию пластичности Хенке — Мизеса при необратимой объемной деформации.

Сказанное справедливо для грунтов малой влажности. Для водонасыщенных грунтов объемная деформация становится обратимой и существенны силы вязкости, поэтому такие грунты целесообразно моделировать вязкой жидкостью (или идеальной в зависимости от величины действующих давлений и граничных условий).

Заметим, что в таких грунтах будет играть существенную роль разница в плотностях жидкости и частиц скелета. Поэтому в таких грунтах жидкость, газ и твердые частицы могут иметь различные скорости, т. е. в этом случае такие грунты должны рассматриваться как многокомпонентные среды [7,8].

При очень больших давлениях, когда среднегидростатическое давление значительно превосходит касательные напряжения, как водонасыщенные грунты, так и грунты воздушной влажности можно рассматривать как сжимаемую жидкость с необратимой или обратимой объемной деформацией. Грунты очень большой связности (например, скальные породы) могут рассматриваться как упругие или пластические тела.

Динамическую теорию грунтов можно рассматривать так же, как некоторое обобщение теории статики грунтов [9,10] при соблюдении гипотезы наличия необратимой связи между напряжениями и объемной деформацией. Покажем, что в этом случае динамическая задача об одномерном движении грунта является замкнутой. Уравнения неразрывности и движения грунта в переменных Лагранжа в этом случае будут

$$\frac{1}{v+1} \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^{v+1} = \frac{\rho_0}{\rho} r^v \quad (1.1)$$

$$\rho_0 r^v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r+u)^v \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^v \quad (1.2)$$

Здесь  $r$  — начальное расстояние частицы от центра симметрии;  $u$  — смещение частицы;  $t$  — время;  $\rho_0, \rho$  — начальная и текущая массовая плотность частицы грунта;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение;  $\sigma_\varphi$  — тангенциальное напряжение;  $v = 2, 1, 0$  — соответственно для сферического, цилиндрического и плоского случаев движения.

Условие предельного состояния для грунтов имеет вид (10)

$$|\tau| = -\sigma \operatorname{tg} \nu + k \quad (1.3)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение на рассматриваемой площадке в грунте,  $\sigma$  — нормальное напряжение,  $\nu$  — угол внутреннего трения,  $k$  — коэффициент сцепления. В компонентах тензора напряжений получим

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k \cos \nu - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \nu \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  — главные нормальные напряжения.

В рассматриваемом случае уравнение (1.4) примет вид

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -\tau_0 + (\sigma_r + \sigma_\varphi) \mu \quad (\tau_0 = 2k \cos \nu, \mu = \sin \nu) \quad (1.5)$$

Здесь, как показано в работе [11], при решении задачи  $\sigma_\varphi > \sigma_r$ .

Как следует из опытов, для грунта существует определенная зависимость между гидростатическим давлением и объемной деформацией, записываемая в виде

$$\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p(\varepsilon) \quad (1.6)$$

где  $\varepsilon$  — объемная деформация.

Этих уравнений достаточно для замыкания задачи в случаях плоского одномерного движения и движения со сферической симметрией. В случае движения с цилиндрической симметрией отсутствие осевой деформации вызовет осевое напряжение  $\sigma_z$ .

Если осевая деформация отсутствует, то предполагая наличие линейной связи между тензором напряжений и деформаций, получим

$$\sigma_r + \sigma_{\varphi}^2 = 2\sigma_z + 2G\varepsilon \quad (1.7)$$

Если это условие присоединить к предыдущим, то получим замкнутую систему уравнений для случая движения с цилиндрической симметрией.

Заметим, что (1.6) имеет место только тогда, когда идет активный процесс, при котором среднегидростатическое давление и объемная деформация растут.

При разгрузке (1.6) заменяется условием

$$p = \text{const} \quad (1.8)$$

или же зависимостью

$$\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \psi(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad (\psi(\varepsilon_0, \varepsilon_0) = p(\varepsilon_0)) \quad (1.9)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — максимальная деформация частицы, достигнутая в процессе нагрузки (фиг. 1).

Таким образом, пространство делится на две области движущейся поверхности. В одной из них имеет место (1.6), а в другой (1.8) или (1.9). На границе этих областей будут непрерывны  $p(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$ . Так как производные функции  $p(\varepsilon)$  и  $\psi(\varepsilon, \varepsilon_0)$  в точке  $\varepsilon = \varepsilon_0$  терпят разрыв, указанная поверхность, являющаяся волной разгрузки, может быть поверхностью разрыва производных от напряжений и деформаций.

Обращаем внимание, что для случая разгрузки уравнения движения будут существенно более сложными, чем для нагрузки, так как в них войдет неизвестная функция  $\varepsilon_0$ . В случае пространственного движения грунта, основываясь только на гипотезе пластичности Прандтля и соотношении (1.6), получить замкнутую систему уравнений невозможно.

§ 2. Вывод уравнений движения грунта на основе теории конечных упруго-пластических деформаций. Для общего пространственного напряженного и деформированного состояния грунта можно предложить теорию, аналогичную деформационной теории пластичности. В данном случае имеем пластическую среду существенно сжимаемую и в отличие от остальных пластических сред обладающую еще и необратимостью объемных деформаций.

Таким образом, некоторые грунты могут быть моделированы пластической средой, обладающей необратимостью деформаций формы изменения и объемной деформации. Так как возможны случаи больших деформаций грунтов, то можно учесть и это обстоятельство и сформулировать теорию пластичности с конечными деформациями.

Введем так же как и в работе [12] тензор конечных деформаций  $E(\varepsilon_{xx})$ . Кроме того, введем тензор условных напряжений  $\sigma(X_x^*)$ . Как показано, в этом случае для обратимых процессов существует упругий потенциал и

$$X_x^* = \partial U / \partial \varepsilon_{xx} \quad (2.1)$$

Здесь  $U$  — упругий потенциал, зависящий в общем случае от трех инвариантов тензора деформаций. Если ограничиться зависимостью упругого потенциала только от двух инвариантов тензора деформаций

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon, \quad I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \quad (2.2)$$

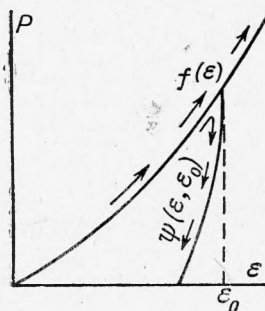
и ввести интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  и интенсивность условных [12] напряжений  $\sigma_i$ , то получим следующую связь между компонентами выше указанных тензоров:

$$X_x^* = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_{xx}, \quad X_y^* = G\varepsilon_{xy} \quad (2.3)$$

Здесь  $\lambda$  и  $G$  выражаются через упругий потенциал следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{9} \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i}, \quad G = \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i} \quad (2.4)$$

Для  $U(\varepsilon, \varepsilon_i)$  в согласии с экспериментами, примем следующие гипотезы:



Фиг. 1

1. Первый инвариант тензора условных напряжений является функцией первого инварианта тензора деформаций.

2. Интенсивность условных напряжений является функцией только интенсивности деформаций.

Эти гипотезы позволяют непосредственно воспользоваться для определения упругого потенциала результатами экспериментальных исследований по определению осевой деформации и бокового распора при одноосной деформации цилиндрического образца грунта, проведенных на кафедре газовой и волновой динамики Московского университета. Действительно, в этом случае

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \sigma_1^* = \frac{X_x}{1 + \partial u / \partial x}, \quad \sigma_2^* = \sigma_3^* = Y_y \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

Здесь  $\partial u / \partial x$  — объемная деформация образца;  $X_x$  — осевое,  $Y_y$  — радиальное напряжения, определяемые из опыта. Тогда

$$p = F_1 \left( \bar{X}_x, \bar{Y}_y, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \varepsilon = F_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

Так как в эксперименте известны

$$X_x = f_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad Y_y = f_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

то всегда из соотношения (2.6) можно определить функцию  $p = F(\varepsilon)$ .

Согласно второй гипотезе  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ ; в рассматриваемом случае

$$\sigma_i = \left| X_x \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} - Y_y \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

Воспользовавшись соотношением (2.7), из уравнения (2.8) всегда можно определить функцию  $\Phi(\varepsilon_i)$ . С другой стороны, зависимости (2.3) дают

$$3F(\varepsilon) = (3\lambda + 2G)\varepsilon, \quad \Phi(\varepsilon_i) = 3G\varepsilon_i \quad (2.9)$$

Полученные выражения позволяют из (2.4) определить упругий потенциал. Действительно

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i} = \Phi(\varepsilon_i), \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = F(\varepsilon) \quad (2.10)$$

Отсюда с точностью до произвольной постоянной

$$U = \int \Phi(\varepsilon_i) d\varepsilon_i + \int F(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.4), получим окончательно

$$G = \frac{1}{3\varepsilon_i} \Phi(\varepsilon_i), \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon} F(\varepsilon) - \frac{2}{9} \frac{1}{\varepsilon_i} \Phi(\varepsilon_i) \quad (2.12)$$

Таким образом, коэффициенты системы (2.3) полностью определены как функции составляющих тензоров деформаций.

Существование упругого потенциала, позволившего получить инвариантные зависимости между тензорами напряжений и деформаций, необходимо рассматривать как гипотезу, тем более, что в случае пластических деформаций доказательство существования соответствующего потенциала отсутствует. Однако применение этой гипотезы позволяет создать теорию движения грунта, обладающую инвариантными свойствами. Следовательно, можно составить уравнение движения грунта в смещениях для активного процесса.

Для пассивного процесса (когда происходит разгрузка) вместо  $\Phi(\varepsilon_i)$  и  $F(\varepsilon)$  надо подставить их ветви, соответствующие процессу разгрузки грунта и определяемые по экспериментальным данным (фиг. 2), где дано среднегидростатическое давление  $p$  [кг/см<sup>2</sup>] и интенсивность напряжений  $\sigma_i$  [кг/см<sup>2</sup>] в зависимости от объемной деформации  $\varepsilon$  и интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  для случая нагрузки и разгрузки смеси песка с 10% глины. В этом случае

$$F = \psi_1(\varepsilon, \varepsilon_0), \quad \Phi = \psi_2(\varepsilon_i, \varepsilon_{0i})$$

Здесь  $\varepsilon_{0i}$  — интенсивность деформации,  $\varepsilon_0$  — объемная деформация, соответствующие началу разгрузки.

Заметим, что начала разгрузки по интенсивности напряжений и объемной деформации могут не совпадать, поэтому возможны три режима разгрузки.

1) Начало разгрузки по  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon$  совпадают.

2) Разгрузка по  $\epsilon_i$  происходит раньше, чем по  $\epsilon$ .

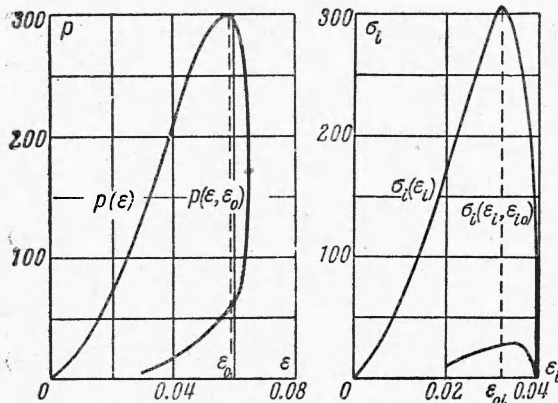
3) Разгрузка по  $\epsilon_i$  происходит позже, чем по  $\epsilon$ .

Указанным режимам разгрузки будут соответствовать три системы волны разгрузки. Уравнения движения в этих случаях также будут иметь различный вид.

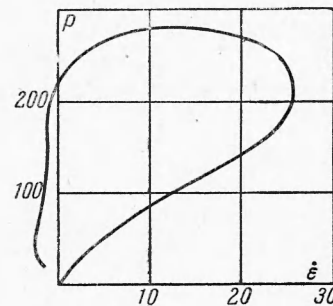
Полученные результаты позволяют написать общие уравнения динамики грунта, аналогичные динамическим уравнениям Ламе в теории упругости.

В отличие от водонасыщенных и сухих грунтов, слабо водонасыщенные грунты обладают свойствами пластических тел. Так, например, из опытов видно, что при сжатии таких грунтов имеет место

петля гистерезиса объемных деформаций и необратимая связь между скоростями деформаций и напряжениями (фиг. 3), где приведена экспериментальная зави-



Фиг. 2



Фиг. 3

симость среднегидростатического давления  $p$  [ $\text{кг/см}^2$ ] как функция скорости объемной деформации при сжатии смеси песка с 10% глины при влажности 12%.

В этом случае, используя экспериментальные зависимости  $p = F(\epsilon)$  и  $\sigma_i = \Phi(\epsilon_i)$ , а также связь между среднегидростатическим давлением и скоростью объемных деформаций можно построить теорию вязко-пластического течения грунта аналогично теории течения Р. Мизеса и др. авторов [9, 12]. И в этом случае рассмотренных выше экспериментальных данных достаточно для составления замкнутой системы уравнений пластического течения грунта.

В общем случае для описания реального движения грунта может оказаться, что тензор напряжений зависит как от тензора деформаций, так и от тензора скоростей деформаций. Можно показать, что и в этом случае не трудно найти инвариантную связь между тензорами напряжений, деформаций и скоростей деформаций.

В случае линейной связи ее коэффициенты также могут быть определены из результатов рассмотренных выше экспериментальных исследований.

Поступила 17 VIII 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. Изд. 3, Госстройиздат, 1951.
2. Герсеванов Н. М. Расчеты фундаментов гидротехнических сооружений на основании учета деформаций построенных сооружений. Госстройиздат, 1923.
3. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов. Госстройиздат, 1952.
4. Кузнецов В. Н. Механические свойства горных пород. Углетехиздат, 1949.
5. Алексеев Н. А. Метод определения динамических характеристик грунтов при больших давлениях. Сб. № 44. Динамика грунтов, Госстройиздат, 1961.
6. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6.
7. Рахматулин Х. А. Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.
8. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
9. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. Гостехиздат, 1953.
10. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. 2, ГИТТЛ, 1954.
11. Сагомоян А. Я. Одномерные движения грунта с образованием ударных волн. Научн. докл. высш. школы, серия физ.-матем. н. 1958, № 3.
12. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.