

УДК 536.46

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРЕНИЯ ТВЕРДЫХ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ЭРОЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

К. О. Сабденов, М. Ерзада

Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, 150000 Петропавловск,
Казахстан, sabdenovko@yandex.kz

Отрицательный эрозионный эффект при моделировании горения возникает вследствие генерации турбулентного движения в зоне газификации твердого энергетического материала. Тепловая энергия в зоне газификации складывается из тепла химических источников в ней и тепла, поступающего к поверхности газификации из зоны пламени в газовой фазе. Часть этой энергии возвращается в газовую фазу в виде механической энергии турбулентного движения, и эта турбулентность приводит к охлаждению зоны газификации. На основе модели дано объяснение наблюдаемому в опытах ослаблению отрицательного эрозионного эффекта при повышении давления и снижении начальной температуры.

Ключевые слова: поверхность газификации, внутренняя турбулентность, коэффициент эрозии, эффект Вилюнова — Дворяшина.

DOI 10.15372/FGV20190204

ВВЕДЕНИЕ

Движение газовых продуктов горения вдоль поверхности газификации твердого энергетического материала (обдув) приводит к изменению скорости горения. Это изменение определяется коэффициентом эрозии при горении $\varepsilon = u_w/u_0$, где u_w , u_0 — скорости горения при скорости обдува $w \neq 0$ и $w = 0$. Если скорость горения увеличивается, то это положительный эрозионный эффект, обнаруженный О. И. Лейпунским в 30-х годах XX в. [1] (эффект Лейпунского). Он же указал на пороговую природу этого явления: рост коэффициента эрозии происходит после превышения скоростью обдува w порогового значения w_* . Верхний предел ε_{\max} еще не установлен. Происхождение порога скорости w_* и приближенный теоретический способ его расчета описаны в работе [2].

Обнаруженное позже [3, 4] уменьшение скорости горения известно как отрицательный эрозионный эффект (эффект Вилюнова — Дворяшина (ВД)). Снижение скорости горения при обдуве поверхности газификации наблюдается в опытах с гомогенными [3, 4] и гетерогенными топливами [5, 6]. Поэтому объяснение эффекта ВД опирается на общие физические процессы, где конкретный состав энергетического мате-

риала является лишь второстепенным фактором.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕОРИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЭРОЗИОННОГО ЭФФЕКТА

В теоретических исследованиях [7–10] коэффициент эрозии не может быть меньше теоретически минимального значения $\varepsilon_{\min} = 1/\sqrt{e} \approx 0.61$. Если $\varepsilon < \varepsilon_{\min}$, горение будет неустойчивым и может прекратиться. Неустойчивость возможна и при $\varepsilon > \varepsilon_{\min}$, это зависит от близости параметров горения к границе устойчивости, определяемой большим количеством других физических параметров. К настоящему времени наименьшее наблюдаемое значение коэффициента эрозии в опытах составляет $0.7 \div 0.73$ [5, 6]. Эффект ВД наблюдается при относительно низких скоростях обдува w . Дальнейшее увеличение w ведет к росту ε вследствие возникновения турбулентного пламени в газовой фазе, стимулирующего развитие положительного эрозионного эффекта [7].

В [7–10] авторы обращают внимание на возникновение эффекта ВД в полужамкнутых пространствах [3–6], когда часть внутренней энергии продуктов горения превращается в механическую (кинетическую) энергию движения вдоль поверхности топлива и, как следствие,

может возникнуть отрицательный эрозионный эффект. Если же в экспериментах обдув осуществляется внешним потоком горячего газа и нет производства механической работы [11–13], то эрозионный эффект только положительный.

В экспериментах обдувающий поток имеет характерную скорость $w_\infty = \text{const}$, в ракетных двигателях w_∞ — скорость газа на оси цилиндрической камеры сгорания. Поэтому явление эрозии удобно представлять в виде функциональной зависимости $\varepsilon(w_\infty)$. Более универсальные зависимости коэффициента эрозии можно определить с помощью числа Виллюнова Vi или числа Булгакова — Липанова Θ [7, 9]:

$$Vi = \sqrt{\zeta} \frac{\rho w_\infty}{\rho_c u}, \quad \Theta = \frac{\delta_b}{\delta_g},$$

где ζ — коэффициент гидродинамического сопротивления, ρ , ρ_c — плотности газа и конденсированной фазы топлива, δ_b — толщина зоны горения в газовой фазе, δ_g — толщина вязкого подслоя в турбулентном пограничном слое. Число Виллюнова удобно использовать для обработки и представления экспериментальных данных [11, 12], а число Булгакова — Липанова больше подходит для теоретических исследований [7, 9]. Необходимое условие реализации эффекта Лейпунского — $\Theta > 1$. Если $\Theta < 1$, может наблюдаться эффект Виллюнова — Дворяшина [2, 7, 9]. В теории [2, 7–10] возникают два масштаба скорости обдува:

$$w_0 = \sqrt{c_p T_b}, \quad w_* = \frac{32.5 \nu}{\sqrt{\zeta} \delta_b},$$

где c_p — теплоемкость газовых продуктов горения при постоянном давлении, T_b — температура пламени в газе или температура горения, ν — кинематическая вязкость газа. Типичные значения масштабных скоростей — $w_0 \approx 10^3$, $w_* \approx 10^2$ м/с. Первая из них характеризует эффект ВД, вторая — эффект Лейпунского. Согласно теории подобия и размерностей [14] эрозионный коэффициент ε можно представить функцией двух безразмерных параметров V_1 и V_2 :

$$\varepsilon = F(V_1, V_2) = F\left(\frac{w_\infty}{w_0}, \frac{w_\infty}{w_*}\right),$$

$$V_1 = \frac{w_\infty}{w_0}, \quad V_2 = \frac{w_\infty}{w_*}.$$

Если двигаться в положительном направлении по координате w_∞ , то сначала всегда наблюдается отрицательный эрозионный эффект, но после превышения первой пороговой скорости обдува w_{*1} ($w_\infty > w_{*1}$) скорость горения начинает расти, при этом $\varepsilon < 1$. Скорость w_{*1} является корнем уравнения $\frac{dF}{dw_\infty} = 0$. Далее, при достижении второй пороговой скорости $w_\infty = w_{*2}$ коэффициент эрозии равен $\varepsilon = F = 1$, после этого скорость горения может только возрастать. Как правило, $w_{*1} \neq w_{*2}$, но если $w_{*1} = w_{*2}$, то эффект ВД не возникает. В экспериментах никогда не наблюдается обратный процесс, т. е. после положительного эрозионного эффекта не может возникнуть отрицательный эрозионный эффект. Такому одностороннему характеру эрозионного эффекта и существованию скоростей обдува w_{*1} и w_{*2} дано следующее объяснение [7]: эффект ВД может проявляться, если зона химических реакций в газовой фазе находится в вязком подслое, в таком случае горение в газовой фазе преимущественно ламинарное. С увеличением скорости обдува толщина вязкого подслоя уменьшается, а толщина зоны горения остается практически постоянной. Соотношение $w_\infty \approx w_{*1}$ определяет условную границу перехода ламинарного пламени в газовой фазе в турбулентный режим.

Скорость горения ряда твердых энергетических материалов u экспоненциально зависит от температуры (закон пиролиза). В отсутствие обдува температура поверхности газификации равна T_s и $u \sim \exp(-E_c/2RT_s)$, где R — универсальная газовая постоянная, E_c — энергия активации объемной реакции пиролиза. Движение продуктов горения вдоль поверхности газификации приводит к изменению баланса тепловой энергии во всей зоне горения, и тогда температура поверхности газификации принимает значение $T_{s,w}$, скорость горения $u \sim \exp(-E_c/2RT_{s,w})$. Приняв характерное значение энергии активации химической реакции $E_c \approx 8 \cdot 10^4$ Дж/моль, температуру поверхности газификации $T_s \approx 650$ К [15, 16], получаем для наименьшего значения $\varepsilon = \varepsilon_{\min} = 0.61$ максимальное относительное изменение температуры

$$\Delta_T = \frac{T_s - T_{s,w}}{T_{s,w}} = \frac{RT_s}{E_c} = 0.068.$$

Отсюда следует необходимость определения

температуры зоны газификации $T_{s,w}$ с относительной погрешностью, не превышающей 1 %, и абсолютной погрешностью $\Delta T_{s,w} \approx 44$ К. Экспериментальное определение $T_{s,w}$ существующими средствами измерения очень затруднительно из-за малой толщины зоны газификации: $\approx 2 \div 2.5$ мкм [15, 16]. Поэтому опытная проверка справедливости различных теорий отрицательного эрозионного эффекта [7, 8, 17–25] в настоящее время возможна только на основе косвенных данных. Вместе с тем должна соблюдаться высокая точность результатов теоретических расчетов, включая корректное проведение численного решения уравнений математических моделей.

Малое значение параметра $\Delta_T \ll 1$ (или значение $\Delta T_{s,w}$ около десятка градусов) дает широкие возможности для построения моделей эффекта ВД — причин такого незначительного снижения температуры в зоне газификации можно найти достаточно много. Но существует, по меньшей мере, один ключевой экспериментальный факт [4] — это постепенное исчезновение эффекта ВД с понижением начальной температуры топлива T_0 . В теоретических исследованиях [17–20, 22–25] на этот результат часто не обращают внимания*. Любая модель отрицательного эрозионного эффекта должна, скорее всего, проходить тестовую проверку на возможность предсказания ключевого экспериментального факта [17, 21]. Ослабление эффекта ВД при высоком давлении [6] (топливо — перхлорат аммония/полиуретан) тоже можно отнести к наиболее важным экспериментальным фактам. Но возникают другие вопросы: насколько универсально исчезновение эффекта ВД при низкой начальной температуре и высоком давлении и следует ли всегда снижение скорости горения при обдуве отождествлять с эффектом ВД. Известны факты [6, 15] небольшого снижения скорости горения при возникновении акустической неустойчивости. В этом случае обдув поверхности газификации вызван в основном акустическими колебаниями газовых продуктов горения.

Возникновение эрозионного эффекта для смесевых топлив и его связь с похожими на акустические возмущения движениями газа рас-

смотрены в [22–25]: вблизи поверхности газификации безразмерный вектор скорости газа имеет продольную \bar{w} и нормальную \bar{v} компоненты с амплитудой A и длиной волны λ_w :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= Ax \sin(\Omega t) \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_w}\right), \\ \bar{v} &= 1 - \frac{\pi A}{\lambda_w} x^2 \sin(\Omega t) \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_w}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

где координата y направлена вдоль касательной, а координата x — вдоль нормали к поверхности газификации, t — время, Ω — частота. Такой выбор скоростей мотивируется различием скоростей газификации компонентов гетерогенного топлива, эти компоненты содержатся в топливе в виде микроскопических частиц со средним размером $a \approx 1$ мкм. Приближенно можно принять $\lambda_w \approx a$, поэтому пространственная неоднородность вместе с различием скоростей газификации приводит к пространственной и временной неоднородности вектора скорости оттока газовых продуктов. Уравнения (1) очень грубо представляют реальное распределение скоростей w и v , вблизи зоны газификации гетерогенного топлива должно существовать мелкомасштабное турбулентное движение газа [27], для такого движения ниже используется название «внутренняя турбулентность».

Горение смесевого топлива с более точным приближением для вектора скорости газа рассматривалось в работах [23–25], где вместо (1) используется широкий спектр скоростей с различными длинами волн и частотами. Такой подход хорошо имитирует внутреннюю турбулентность. Основным результатом исследований [22–25] стало получение зависимости $\varepsilon(A)$, и при определенных условиях, накладываемых на скорость химической реакции в твердой фазе, может оказаться $\varepsilon(A) < 1$. Причиной возникновения эффекта ВД является образование разрывов во фронте пламени в газе, в местах разрыва горение не происходит. В результате снижается поток тепла к зоне газификации и скорость горения тоже снижается. Образование разрыва можно объяснить следующим образом: для существования стационарного фронта горения (пламени) необходима строгая согласованность диффузионных, тепловых и гидродинамических процессов. Если скорость газа v больше нормальной скорости пламени в газе, то поток газа уносит зону горения. Если такой избыток скорости является локальным, то

* Исследование зависимости коэффициента эрозии ε от начальной температуры T_0 в модели [20] приведено в [26]. Оказалось, что ε или практически не зависит от T_0 или уменьшается вместе с ней, т. е. находится в противоречии с экспериментальными данными [4].

плоский фронт пламени деформируется. Механизм Маркштейна [28] может частично стабилизировать фронт пламени зависимостью скорости пламени от кривизны фронта. Но при высокой локальной скорости газа пламя разрывается и этот механизм перестает действовать.

Существует еще одна возможная причина снижения скорости горения [2]. При движении продуктов горения вдоль поверхности газификации топлива происходит потеря импульса потока газа на твердой поверхности [29]. В результате возникает избыточная скорость газа в отрицательном направлении относительно движения пламени. Если турбулентные коэффициенты переноса малы, то пламя в газовой фазе должно отодвигаться от поверхности газификации, что снижает тем самым тепловой поток к этой поверхности и скорость горения. Идею с мелкомасштабной турбулентностью авторы [22–25] распространили и на случай горения гомогенного топлива. Без сомнения, можно утверждать, что эта группа исследователей нашла новый механизм отрицательного эрозионного эффекта и этот механизм очень слабый, поскольку в их модели коэффициент эрозии $\varepsilon = 0.95 \div 1$ [22–25]. Но их утверждение о соответствии полученных теоретических результатов экспериментальным данным Вилюнова — Дворяшина [3, 4] нуждается в обосновании. Наблюдаемые явления объясняются влиянием больших градиентов скорости газа $\frac{\partial w}{\partial x}$ на горение. Этот эффект математически строго исследован в [30], его результаты широко применяются в теории турбулентного горения газовых смесей [31]. Грубая оценка градиента скорости газа, когда будет возможно появление эффекта ВД, приведена в [7], и она приблизительно равна 10^4 с^{-1} . Это значение хорошо согласуется с результатами [22–25].

Еще одно объяснение эффекта ВД на основе внутренней турбулентности вблизи зоны газификации дано в [21], где предполагается возникновение хаотического движения в результате тепловой неустойчивости. Причиной возникновения неустойчивости является избыточное выделение тепла в подповерхностной зоне газификации [16, 21]. Модели Джексона и его группы и Гусаченко — Зарко опираются на гипотезу существования мелкомасштабной турбулентности вблизи зоны газификации, но принципиально различаются объяснениями ее влияния на скорость горения. В модели Гусачен-

ко — Зарко обдув должен подавлять внутреннюю турбулентность, уменьшать эффективный коэффициент теплопроводности в газовой фазе и поток тепла к поверхности газификации. Это прямо противоположно представленной физической картине Джексона и др., где обдув должен усиливать внутреннюю турбулентность. Такое различие возникло из-за различной природы турбулентности в этих двух моделях.

Мелкомасштабная турбулентность вблизи зоны газификации может появиться в результате гидродинамической неустойчивости [32], очень похожей на неустойчивость Ландау — Дарье [28, 33]. Предсказанная гидродинамическая неустойчивость [32] настолько сильна, что ее не могут полностью подавить вязкие силы и инерционные эффекты [34]. Здесь возмущения с произвольной длиной волны локализованы в относительно малой окрестности зоны газификации.

В модели горения [35, 36] турбулентность в зоне газификации создается разрушающимися микроскопическими пузырьками газовых продуктов разложения твердой фазы. На создание механического турбулентного движения затрачивается внутренняя энергия двухфазной среды, и это может приводить к снижению температуры в зоне газификации, или к возникновению эффекта ВД. Турбулентное движение уносится потоком газа в зону пламени, это означает возврат зоной газификации части тепловой энергии в газовую фазу в механической форме. Ниже исследование проводится на основе модели [35, 36].

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭРОЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Здесь рассматривается внутренняя турбулентность, возникающая в результате разрушения пузырьков газа в двухфазной зоне газификации [36]. Такая мелкомасштабная турбулентность интересна высокой интенсивностью и превращением значительной части внутренней энергии среды в энергию механического движения газа. Схема двухфазной зоны газификации приведена на рис. 1. Поскольку движение газа турбулентное, то в отличие от уравнения (1) здесь и ниже w и v — средние скорости движения газа.

Если в зоне газификации может идти экзотермическая химическая реакция с тепловым

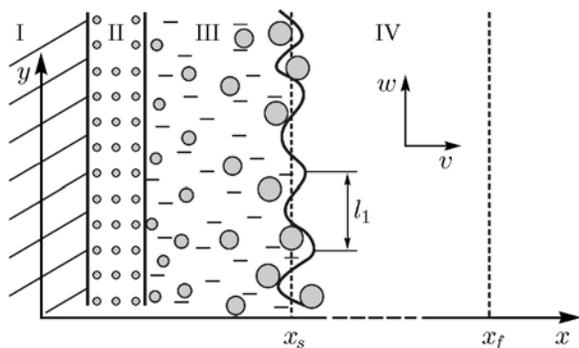


Рис. 1. Схема зоны газификации:

I — твердая фаза, II — зона образования газовых зародышей в твердой фазе, III — жидкая фаза с пузырьками газа, IV — газовая фаза; x_s и x_f — координаты поверхности газификации и зоны химической реакции

эффектом Q_s , то реальное выделяемое тепло Q'_s будет меньше Q_s [36]:

$$Q'_s = Q_s - e_{k,s} = Q_s - e_{k,s}, \quad (2)$$

где $e_{k,s}$ — удельная кинетическая энергия турбулентного движения, она равна работе, производимой зоной газификации для создания такого движения. Хаотическое разрушение пузырьков диаметром d_b и плотностью газа ρ_s в зоне газификации создает турбулентное движение с характерной пульсацией скорости газа v' и масштабом l_t [36]:

$$v' \approx \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho_s d_b}}, \quad l_t \approx d_b,$$

где σ_s — коэффициент поверхностного натяжения. Эта формула применима для пузырьков диаметров до $d_b \approx 10^{-8}$ м, при меньших диаметрах для оценки v' необходимо учитывать влияние вязких сил [36]. Движение газовых продуктов горения вдоль поверхности газификации с характерной скоростью w_∞ должно приводить к усилению турбулентности. С одной стороны, это увеличивает коэффициенты переноса и потока тепла от пламени в газе к поверхности топлива, но с другой — растет и превращение тепла в кинетическую энергию турбулентного движения. Эта энергия уносится со скоростью v обратно в зону пламени, и тем самым создается специфическая тепловая изоляция поверхности газификации [35]. Зависимость турбулентных пульсаций скорости газа v' можно оценить с помощью приближенной формулы [35]

$$v'^2 = \frac{2\Delta p_*}{\rho_s} + b_1 w_\infty^2,$$

где Δp_* — характерная разность давления снаружи и внутри пузырька, b_1 — константа. Поскольку v'^2 и $e_{k,s}$ отличаются на множитель порядка единицы и при $w_\infty^2 = 0$ должно быть

$$v' \approx \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho_s d_b}},$$

можно принять следующее уравнение:

$$e_{k,s} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_s}{\rho_s d_b} + b_1 w_\infty^2. \quad (3)$$

Рассмотрим турбулентность в газовой фазе. Здесь определение турбулентных коэффициентов переноса представляет собой очень сложную и нерешенную проблему. Ниже для этих коэффициентов используется общее обозначение D_t и простейшие представления в виде

$$D_t = \frac{1}{3} l_t v' + s^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4)$$

где l_t — масштаб длины турбулентности, s — путь смешения Прандтля, числовой множитель $1/3$ внесен по аналогии с молекулярной диффузией. Первое слагаемое в (4) описывает перенос внутренней турбулентностью, второе — внешней турбулентностью, возникающей при движении газовых продуктов горения вдоль поверхности топлива. Наибольшая интенсивность внутренней турбулентности реализуется вблизи поверхности газификации $x_s(t)$, по мере удаления от нее интенсивность турбулентности снижается под влиянием сил трения.

В занятой турбулентным движением области вне зоны газификации происходит диссипация энергии. При моделировании эволюции такого движения выбирают небольшое число переменных в качестве основных — это удельная кинетическая энергия e_k , скорость диссипации ε , характерное значение турбулентных пульсаций скорости v' и линейный масштаб l_t . Теория локально изотропной турбулентности Колмогорова дает связь между e_k , ε и l_t [37]:

$$\varepsilon = a_1 \frac{e_k^{3/2}}{l_t},$$

где a_1 — числовой множитель. Если в газовой фазе нет источников турбулентности и диффузионный перенос энергии слабый, то изменение

кинетической энергии можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} + v \frac{\partial e_k}{\partial x} = -a_1 \frac{e_k^{3/2}}{l_t}, \quad (5)$$

где v — средняя скорость газа по направлению координаты x . Для определения всех параметров турбулентности необходимо еще одно уравнение, оно получается из условия сохранения квадрата полного момента импульса и предположения ограниченности интеграла Лойцянского [37, 38]:

$$l_t^5 e_k = a_2 = \text{const}, \quad (6)$$

где параметр a_2 может быть найден из условий генерации турбулентности в зоне газификации: $a_2 = e_{k,s} d_b^5$. Для нахождения характерной скорости турбулентных пульсаций скорости газа v' используется равенство [37, 39]

$$e_k = \frac{3}{2} v'^2, \quad (7)$$

где множитель $3/2$ внесен по аналогии с молекулярным хаосом в статистической физике.

Многие твердые топлива в зоне газификации содержат испаряющуюся жидкую фазу, одновременно в этой зоне идет химическая реакция пиролиза (модель Беляева — Зельдовича [16]). Зона газификации очень узкая, детальное рассмотрение в ней всех процессов приводит к сложным математическим уравнениям. Поэтому ниже зона газификации полагается поверхностью разрыва производных температуры и относительной концентрации реагирующего вещества в брутто-реакции $A \rightarrow B$ (см. рис. 1) с эффективной энергией активации E_c . Эта поверхность имеет координату $x_s(t)$ и движется справа налево. В области $x < x_s(t)$ находится твердая фаза (вещество А) с температурой T_c , плотностью ρ_c , удельной теплоемкостью c_c и теплопроводностью λ_c . Область $x > x_s(t)$ занята газом с температурой T , молярной массой M_m , плотностью ρ , давлением p , теплоемкостью при постоянном давлении c_p , молекулярной теплопроводностью λ . В области $x > x_s(t)$ продукты газификации (вещество В) характеризуются относительной концентрацией Y ($Y < 1$), коэффициентом молекулярной диффузии D . Здесь идет одна химическая реакция $B \rightarrow C$ (C — продукты горения) с энергией активации E .

В используемой ниже модели горения твердого высокоэнергетического материала зона газификации (зона III на рис. 1) представляется поверхностью. Генерация внутренней турбулентности происходит только на этой поверхности, отсутствует взаимодействие с внешней турбулентностью, возникающей при движении газовых продуктов горения со скоростью w . Такие упрощающие приближения позволяют использовать уравнения (2)–(7). Кроме этого, пренебрегается малым различием теплоемкостей твердой и газовой фаз: $c_c = c_p$. Изменение молекулярной массы продуктов реакции и теплоемкости c_p не учитывается: $R_g = \text{const}$, $c_p = \text{const}$. Нижний индекс w у температуры опускается для упрощения записи. Математическая форма модели представлена следующими уравнениями:

$$-\infty < x < x_s(t):$$

$$\rho c_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} \right); \quad (8)$$

$$x_s(t) < x < +\infty:$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \rho Q W + W_{g,s}, \end{aligned}$$

$$W_{g,s} = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial t} + v \frac{\partial w^2}{\partial x} \right) + \rho a_1 \frac{e_k^{3/2}}{l_t},$$

$$W = Y k_0 \exp \left(-\frac{E}{RT} \right), \quad l_t = d_b \left(\frac{e_{k,s}}{e_k} \right)^{1/5},$$

$$\rho \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + v \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(D + D_t) \rho \frac{\partial Y}{\partial x} \right] - \rho W,$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} + v \frac{\partial e_k}{\partial x} = -a_1 \frac{e_k^{3/2}}{l_t},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0, \quad p = \rho R_g T.$$

Граничные условия:

$$x \rightarrow -\infty: T_c = T_0:$$

$$x = x_s(t): \quad -\rho c \frac{dx_s}{dt} = -\rho \frac{dx_s}{dt} + \rho v, \quad e_k = e_{k,s},$$

$$\begin{aligned}
 -\rho_c \frac{dx_s}{dt} &= \\
 &= -\rho \frac{dx_s}{dt} + \rho v Y - (D + D_t) \rho \frac{\partial Y}{\partial x}, \\
 -\rho_c \frac{dx_s}{dt} &= m(T_s, p),
 \end{aligned}$$

$$T_s = T_c(t, x_s(t)),$$

$$\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial x} - Q'_{s\rho_c} \frac{dx_s}{dt},$$

$$T = T_c;$$

$$x \rightarrow +\infty: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Здесь k_0 — множитель перед экспонентой в законе Аррениуса; R_g — газовая постоянная, $R_g = R/M_m$; λ_t — коэффициент турбулентной теплопроводности газа; $m(T_s)$ — массовая скорость горения; T_s — температура на поверхности газификации. Кинетическая энергия турбулентности в зоне газификации $e_{k,s}$ определена уравнением (3). Начальными условиями к системе уравнений (8) приняты их стационарные решения в пределе бесконечно тонкой зоны химических реакций в газовой фазе ($E \rightarrow \infty$). Эти решения в безразмерной форме приведены в [10].

Для скорости газификации топлива u можно принять простое уравнение [6, 15, 40, 41]

$$u = -\frac{dx_s}{dt} = u_* \exp\left(-\frac{E_c}{2RT_s}\right), \quad u_* = \text{const.}$$

Оно позволяет определить массовую скорость газификации $m(T_s) = \rho_c u$. Зависимости коэффициентов молекулярной диффузии D , теплопроводности λ и вязкости ν газа от давления p и температуры T приняты в виде [10]

$$D = D_0 \frac{p_0}{p} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2, \quad \lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0},$$

$$\nu = \nu_0 \frac{p_0}{p} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2,$$

где D_0 , λ_0 , ν_0 — значения D , λ и ν при $T_0 = 293$ К и $p_0 = 10^5$ Па. Содержащийся в определении безразмерной скорости ω масштаб v_*

можно рассчитать по формуле $v_* \approx 0.045w_\infty$ [10, 29].

Целью настоящего исследования является поиск стационарных решений уравнений (8) методом установления, поэтому для упрощения приняты равенства

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$$

Для нахождения пути смешения s и компоненты y вектора скорости газа w используются уравнения [42]:

$$s \frac{d^2 s}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - \frac{\gamma}{\nu} s^2 \frac{dw}{dx} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{ds}{dx}\right) = 0, \quad (9)$$

$$\nu \frac{dw}{dx} + s^2 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = v_*^2, \quad \gamma = 0.15, \quad \mu = 0.395.$$

Уравнения турбулентного пограничного слоя необходимо решать при условиях [42]:

$$x = x_s(t):$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = q \frac{v_*}{\nu}, \quad q = 4.23 \cdot 10^{-3}; \quad s = 0; \quad w = 0.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Руководящая физическая идея настоящего исследования следующая: при горении твердых высокоэнергетических материалов всегда существует внутренняя турбулентность и ее источником является зона газификации. Если имеется движение газовых продуктов горения вдоль поверхности газификации, то возникает еще внешняя турбулентность. Движение газа происходит в полужамкнутом пространстве, поэтому существует преобразование части его внутренней энергии в кинетическую энергию. Все указанные факторы оказывают активное влияние на процесс горения: внутренняя турбулентность и преобразование энергии всегда приводят к снижению скорости горения, внешняя турбулентность — к повышению скорости горения. На основе модели следует провести анализ совместного влияния двух указанных видов турбулентности на скорость горения.

Для численного решения уравнений в системе (8) применялась неявная консервативная схема [43]. Ошибки аппроксимации для уравнений (8) и (9) имеют порядок $(\Delta x)^2$ по пространственному шагу $\Delta x = 10^{-6}$ м, точность по времени первого порядка по шагу $\Delta t = 10^{-6}$ с

(безразмерное число Куранта $\kappa_c \Delta t (\Delta x)^{-2} \approx 0.43$). Выход на стационарный режим горения достигается в периоды времени порядка нескольких значений времени тепловой релаксации твердой фазы $t_r = \kappa_c (u')^{-2} \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$ с, поэтому расчетное время составляло $(8 \div 10)t_r$. Решение уравнений модели находилось в области от -1 до 2.3 мм. Ширина зоны горения δ_b определялась по положению максимума скорости химической реакции W .

3.1. Горение в отсутствие обдува при наличии внутренней турбулентности

Законы Колмогорова для локально изотропной турбулентности накладывают ограничения на характер и пределы изменения кинетической энергии e_k и масштаба l_t . Чем быстрее рассеивается энергия e_k , тем больше становится l_t , но коэффициент турбулентной диффузии D_t снижается. Большие значения коэффициента a_1 ускоряют превращение кинетической энергии турбулентности в тепловую энергию и область газа с турбулентным движением концентрируется вблизи поверхности газификации. На рис. 2 показаны пространственные распределения безразмерного масштаба l_t/d_b и коэффициента переноса D_t/κ_0 при $a_1 = 10^{-8}$ и 10^{-7} . На этом рисунке и рис. 3 за начало отсчета координаты x принята поверхность газификации.

Данные из рис. 2 позволяют оценить влияние коэффициента a_1 на характер затухания внутренней турбулентности, играющего важную роль при горении твердых топлив. Ниже моделировалось горение стандартного пороха Н. Считается, что в зоне горения существует внутренняя турбулентность с параметрами $a_1 = 10^{-10}$, $b_1 = 10$, но движения газовых продуктов горения вдоль поверхности газификации нет ($u_\infty = 0$). Уравнения (9) не рассматриваются. Малое значение коэффициента a_1 взято для моделирования слабого затухания турбулентности в пределах ширины зоны горения. Для расчета скорости горения пороха Н выбраны следующие константы [44]: $u_* = 8.46$ м/с, $E_c = 7.98 \cdot 10^4$ Дж/моль, температура на поверхности газификации в стационарном режиме горения $T_s = T_{s0} = 658$ К, скорость горения $u_0 = 5.732$ мм/с при $p = 50$ атм.

Дополнительно рекомендуются [10, 44] следующие параметры для пороха Н: $\rho_c = 1600$ кг/м³, $c_c = c_p = 1465$ Дж/(кг·К),

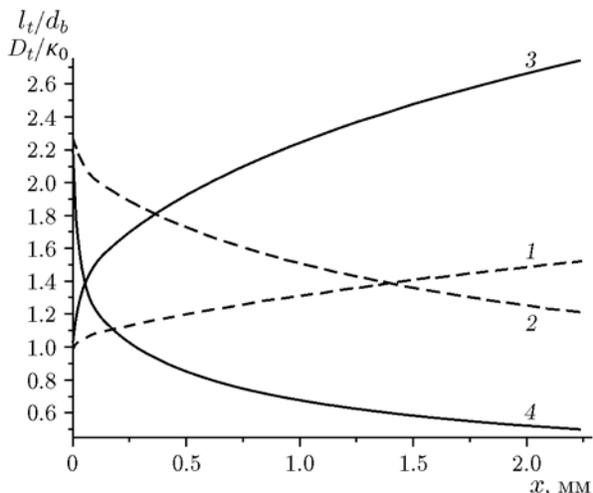


Рис. 2. Зависимость масштаба l_t/d_b (кривые 1, 3) и безразмерного коэффициента турбулентной диффузии D_t/κ_0 (кривые 2, 4) от координаты x :

1, 2 — $a_1 = 10^{-8}$, 3, 4 — $a_1 = 10^{-7}$

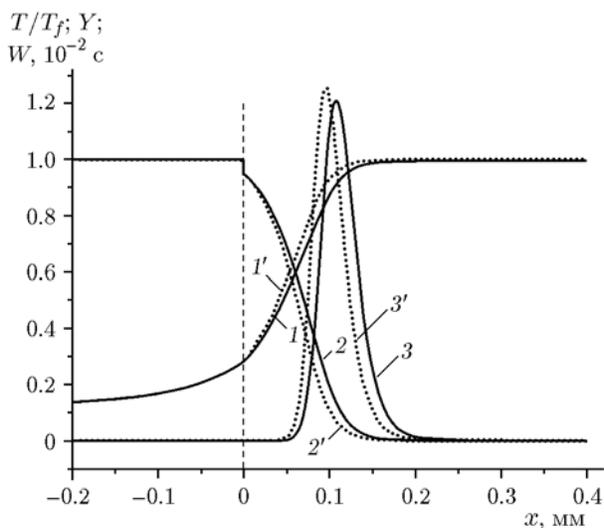


Рис. 3. Распределения отношения температур T/T_f (кривые 1, 1'), относительной концентрации Y (кривые 2, 2') и скорости химической реакции W (кривые 3, 3'):

1–3 — с учетом внутренней турбулентности, 1'–3' — без внутренней турбулентности; в области $x < 0$ принято $Y = 1$, T_f — температура пламени

$\lambda_c = 1.0$ Дж/(м·К·с), тепловой эффект реакции в твердой фазе $Q_s = 2,53 \cdot 10^5$ Дж/кг и в газовой фазе $Q = 2.73 \cdot 10^6$ Дж/кг, $R_g = 489$ Дж/(кг·К), $\langle d_b \rangle = 0.87 \cdot 10^{-7}$ м, $\sigma_s = 10^{-2}$ Н/м, $D_0 = 1.1 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\lambda_0 = 0.15$ Дж/(м·К·с), $\nu_0 = 1.1 \cdot 10^{-4}$ м²/с. Приве-

денные значения параметров газа дают значение числа Льюиса $Le = 0.75$. Параметры скорости химической реакции в газовой фазе: $k_0 = 1.018 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $E = 1.86 \cdot 10^5 \text{ Дж/моль}$.

Основной целью настоящей работы является моделирование горения пороха Н в экспериментах [3], где результаты для коэффициента эрозии представлены в виде зависимости от числа Виллюнова Vi и интервал $Vi = 1 \div 10$ при $p = 50 \text{ атм}$ соответствует изменению скорости в диапазоне $w_\infty = 12 \div 140 \text{ м/с}$. Это обстоятельство накладывает ограничения на возможные значения молярной массы газа M_m и коэффициентов D_0 и ν_0 при выбранных значениях других параметров пороха Н.

На рис. 3 приведены распределения температуры, концентрации и скорости химической реакции при отсутствии и наличии внутренней турбулентности, они соответствуют скорости горения $u_0 = 5.733 \text{ мм/с}$. С учетом внутренней турбулентности температура пламени $T_f = 2327 \text{ К}$ при $T_0 = 298 \text{ К}$, без ее учета — $T_f = 2334 \text{ К}$. Необходимо уточнить, что температурой пламени здесь называется температура продуктов горения вблизи зоны химических реакций. Слабое затухание турбулентности и ограниченные возможности вычислительной техники не позволяют вести расчет с большими пространственными масштабами. Поэтому снижение $T_f = 2327 \text{ К}$ — это кажущийся эффект.

Толщина зоны химических реакций в отсутствие внутренней турбулентности равна $\delta_b \approx 0.1 \text{ мм}$, но «включение» турбулентности привело к росту зоны горения до $\delta_b \approx 0.12 \text{ мм}$. Таким образом, внутренняя турбулентность отодвигает пламя в газовой фазе от поверхности газификации.

3.2. Горение при $w_\infty \neq 0$

Моделирование при наличии обдува выполнялось для давлений $p = 50$ и 80 атм , таких же как в экспериментах [3] с порохом Н по изучению эрозионных эффектов. Коэффициент гидродинамического сопротивления $\zeta = 0.03$, число Прандтля $Pr = 0.75$. На рис. 4 представлены результаты расчета эрозионного коэффициента $\varepsilon(Vi)$, где число Виллюнова Vi меняется от 0 до 10.75. Соответственно интервал изменения скорости обдува w_∞ находится в пределах $0 \div 130 \text{ м/с}$. В [3] указано на существование двух пороговых чисел Vi_1 и Vi_2 : число Vi_1 характеризует возникновение отрицательного

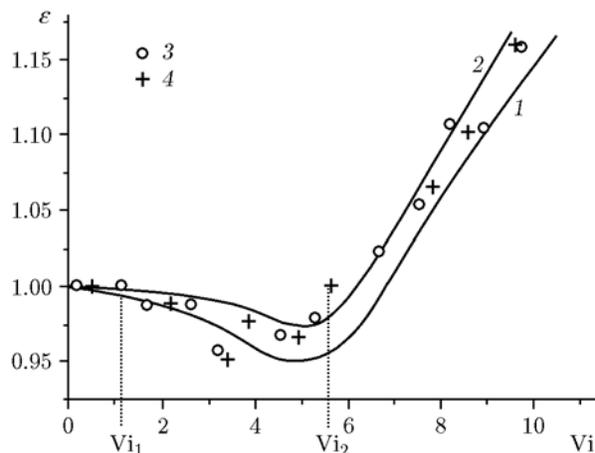


Рис. 4. Теоретическая (кривые 1, 2) и экспериментальные (точки 3, 4) [3] зависимости эрозионного коэффициента от числа Виллюнова:

1, 3 — $p = 50 \text{ атм}$, 2, 4 — $p = 80 \text{ атм}$

эрозионного эффекта, число Vi_2 связано с восстановлением коэффициента эрозии до значения $\varepsilon = 1$. В моделировании число Vi_1 не обнаруживается, скорость горения плавно снижается с ростом параметра Vi .

Рассмотрим результаты для давления $p = 50 \text{ атм}$. По экспериментальным данным [3] в точке $Vi = Vi_* \approx 3.7$ эрозионный коэффициент принимает минимальное значение $\varepsilon = \varepsilon_{\min} \approx 0.95$. Теоретически получено $Vi_* \approx 4.9$ (см. рис. 4). На участке $Vi < Vi_*$ генерация турбулентной механической энергии и ее возврат из зоны газификации в зону пламени играют значительную роль, при этом поток тепла из зоны пламени к поверхности газификации не меняется. Возникающий за счет турбулентности отрицательный баланс энергии приводит к снижению коэффициента эрозии. Зона горения целиком находится внутри вязкого подслоя внешнего турбулентного пограничного слоя. Пороговому числу $Vi_* \approx 4.9$ соответствует скорость $w_\infty \approx 60 \text{ м/с}$. Толщина вязкого подслоя при $Vi = Vi_*$ равна $\delta_g = 0.257 \text{ мм}$, толщина зоны горения — $\delta_b = 0.115 \text{ мм}$, т. е. пороговое число Булгакова — Липанова $\Theta_* \approx 0.45$. Параметр δ_g определялся по месту, где турбулентная вязкость становится равной молекулярной вязкости газа. Толщиной зоны горения δ_b считается расстояние от поверхности газификации до точки, где скорость химической реакции максимальна. Рост давления приводит к уменьшению пороговых значений Vi_* и Θ_* , вместе с ними отрицательный эрозионный эффект ослабе-

вает. Это согласуется с экспериментальными наблюдениями [6], если считать механизм возникновения отрицательного эффекта одинаковым для всех видов топлив. На участке $Vi > Vi_*$ (или $\Theta > \Theta_*$) пламя в газовой фазе становится турбулентным, это приводит к сильному росту потока тепла из зоны пламени к поверхности газификации. Величина этого потока тепла превосходит механическую энергию турбулентного движения, возвращаемую в зону пламени. Поэтому коэффициент эрозии на этом участке повышается.

Температура газа за зоной химической реакции монотонно снижается от 2327 до 2236 К с ростом скорости обдува w_∞ от 0 до 130 м/с. Но это не означает снижения температуры пламени, небольшая по пространству область моделирования не позволяет учитывать в полной мере диссипацию энергии турбулентного движения газа.

В экспериментах [3] обнаружена универсальная зависимость $\varepsilon(Vi)$: эрозионный коэффициент оказался одинаковым при $p = 50$ и 80 атм. Из сравнения теоретических результатов (см. рис. 4), полученных при $p = 50$ и 80 атм, такой полной универсальности не наблюдается. Но из сопоставления зависимостей $\varepsilon(w_\infty)$ на рис. 5 и зависимостей $\varepsilon(Vi)$ на рис. 4 для указанных давлений видно, что на рис. 4 соответствующие кривые сближаются, т. е. параметр Vi достаточно универсален.

Для пороха Н при $T_0 = 238$ К отрицательный эрозионный эффект исчезает, при $T_0 = 325$ К минимальное значение $\varepsilon_{\min} = 0.8$ [4]. Моделирование показывает снижение ε_{\min} с уменьшением T_0 (рис. 6), т. е. наблюдается только качественное согласие теоретических результатов с экспериментальными данными [4], где зависимость $\varepsilon_{\min}(T_0)$ более сильная, чем на рис. 6. Минимальные значения ε на этом рисунке следующие: $\varepsilon_{\min}(238 \text{ К}) = 0.966$, $\varepsilon_{\min}(298 \text{ К}) = 0.953$, $\varepsilon_{\min}(325 \text{ К}) = 0.95$.

Обнаруженное различие между теоретическими и экспериментальными данными можно объяснить упрощенным характером модели горения, в особенности грубым представлением химических реакций в конденсированной фазе топлива, поскольку наблюдается сильная зависимость $\varepsilon_{\min}(T_0)$ от энергии активации E_c .

В ранних исследованиях [7–10] возникновение эффекта ВД объяснялось переходом части внутренней энергии газовых продуктов горения в их кинетическую энергию движения

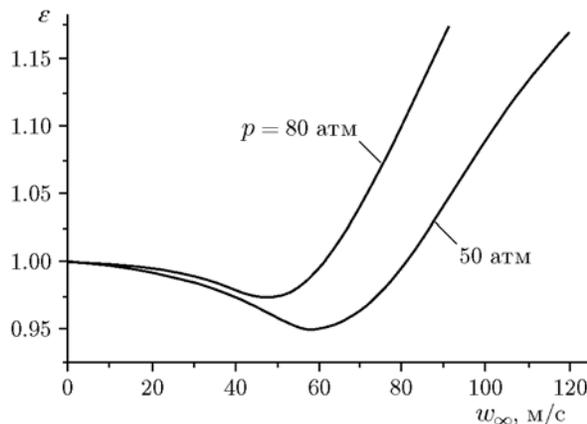


Рис. 5. Зависимость эрозионного коэффициента от скорости обдува при $T_0 = 298$ К и различных давлениях

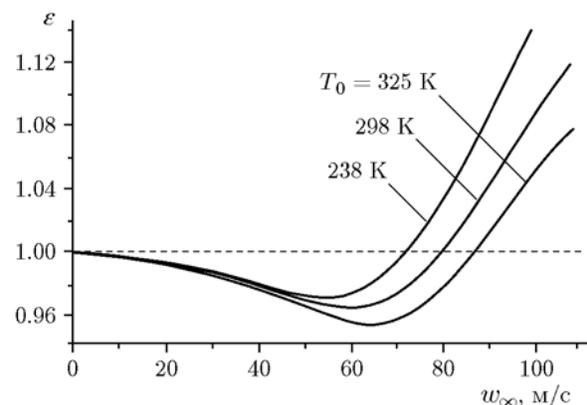


Рис. 6. Зависимость эрозионного коэффициента от скорости обдува при $p = 50$ атм и различных начальных температурах

со скоростью w . Такая трансформация энергии учитывается комплексом в функции источника

$$\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial t} + v \frac{\partial w^2}{\partial x} \right)$$

в формуле для $W_{g,s}$. В опытах [3, 4] этот комплекс существенной роли не играет, но его влияние оказывается значительным в других экспериментах [5, 6], где эффект ВД проявляется при $w_\infty \geq 150$ м/с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты анализа представленной модели горения и полученные ранее в работах [6, 17–19, 21, 34, 36] сводятся к следующему.

1. Вблизи зоны газификации практически у всех твердых энергетических материалов с большой вероятностью происходит генерация мелкомасштабной турбулентности, для разных топлив такая турбулентность может отличаться интенсивностью.

2. Эффект Вилюнова — Дворяшина возникает в результате перехода части внутренней энергии газа или парожидкой фазы в механическую энергию движения. Если такой переход происходит в зоне газификации, то часть теплового потока возвращается в газовую фазу в виде механической энергии, этот «эффект зеркала» проявляет себя как тепловая изоляция.

3. Возникновение эффекта Вилюнова — Дворяшина маловероятно при высоких давлениях и начальных температурах.

4. Вероятность возникновения эффекта Вилюнова — Дворяшина высока для топлив с низкими скоростями горения и с заметным слоем жидкой или парожидкой фазы в зоне газификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейпунский О. И. К вопросу о физических основах внутренней баллистики реактивных снарядов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИХФ АН СССР. — М., 1945; см. также: Теория горения порохов и взрывчатых веществ. — М.: Наука, 1982. — С. 226–277.
2. Сабденев К. О. К вопросу о пороговом характере эрозионного горения // Физика горения и взрыва. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 61–71.
3. Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А. О закономерностях горения пороха Н в потоке газа // Физика горения и взрыва. — 1971. — Т. 7, № 1. — С. 45–51.
4. Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А. О влиянии начальной температуры конденсированного вещества на величину отрицательной эрозии // Физика горения и взрыва. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 602.
5. Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site. — <http://www.nakka-rocketry.net/burnrate.html>.
6. Kubota N. Propellants and Explosives: Thermochemical Aspects of Combustion. — 3rd Ed. — Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007.
7. Сабденев К. О., Ерзада М. Механизм возникновения отрицательного эрозионного эффекта // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 22–33.
8. Сабденев К. О., Ерзада М. Аналитический расчет скорости горения при отрицательном эрозионном эффекте // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 76–86.
9. Сабденев К. О., Ерзада М. Отрицательный эрозионный эффект и возникновение неустойчивого горения. 1. Анализ моделей // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 76–83.
10. Сабденев К. О., Ерзада М. Отрицательный эрозионный эффект и возникновение неустойчивого горения. 2. Численное моделирование // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 76–87.
11. Архипов В. А., Зимин Д. А., Козлов Е. А., Третьяков Н. С. Экспериментальное исследование эрозионного горения твердых топлив // Хим. физика. — 1997. — Т. 16, № 9. — С. 101–106.
12. Архипов В. А., Зимин Д. А. Эрозионное горение твердого топлива в сверхзвуковом потоке // Физика горения и взрыва. — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 61–64.
13. Krishnan S., Rajesh K. K. Erosive burning rate studies of composite propellants under high cross flow velocities // AIAA-98-3384. — <http://arc.aiaa.org>. — DOI:10.2514/6.1998-3384.
14. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
15. Timnat Y. M. Advanced Chemical Rocket Propulsion. — London etc.: Academic Press, 1987.
16. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Анализ моделей горения энергетических веществ с полостью газообразными продуктами реакции // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 24–40.
17. Булгаков В. К., Липанов А. М. К теории горения конденсированного вещества при обдуве // Физика горения и взрыва. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 32–41.
18. Булгаков В. К., Липанов А. М. Модель горения твердых топлив при обдуве, учитывающая взаимодействие турбулентности с химической реакцией // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 5. — С. 68–74.
19. Булгаков В. К., Липанов А. М., Камелатдинов А. Ш. Численные исследования эрозионного горения конденсированных веществ // Физика горения и взрыва. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 83–88.
20. Greatrix D. R. Model for prediction of negative and positive erosive burning // Canadian Aeronaut. Space J. — 2007. — V. 53, N 1. — P. 13–21.
21. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
22. Isfahani A. H. G., Zhang Ju, Jackson T. L. Erosive burning of homogeneous and heterogeneous solid propellants // 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2–5 August 2009, Denver, Colorado. — AIAA 2009–5498.

23. **Zhang Ju, Jackson T. L.** A model for erosive burning of homogeneous propellants // *Combust Flame*. — 2010. — V. 157. — P. 397–407.
24. **Jackson T. L.** Issues related to heterogeneous solid-propellant combustion // *Prog. Propul. Phys.* — 2011. — N 2. — P. 3–20.
25. **Topalian V. D., Zhang J., Jackson T. L., Isfahani A. H. G.** Numerical study of erosive burning in multidimensional solid propellant modeling // *J. Propul. Power*. — 2011. — V. 27, N 4. — P. 811–821.
26. **Greatrix D. R.** Influence of initial propellant temperature on solid rocket internal ballistics // *J. Propul. Power*. — 2014. — V. 30, N 4. — P. 869–875.
27. **Зырянов В. Я., Болваненко В. М., Глотов О. Г., Гуренко Ю. М.** Турбулентная модель горения СРТ // *Физика горения и взрыва*. — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 17–26.
28. **Нестационарное распространение пламени** / под ред. Дж. Г. Маркштейна. — М.: Мир, 1968.
29. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
30. **Климов А. М.** Распространение пламени при сильной турбулентности // *Докл. АН СССР*. — 1975. — Т. 221, № 1. — С. 56–59.
31. **Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.** Турбулентность и горение. — М.: Наука, 1986.
32. **Сабденов К. О.** Генерация гидродинамической неустойчивости в зоне газификации твердого ракетного топлива // *Физика горения и взрыва*. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 70–82.
33. **Ландау Л. Д.** К теории медленного горения // *ЖЭТФ*. — 1944. — Т. 14, № 6. — С. 240–244.
34. **Сабденов К. О., Ерзада М.** К определению коэффициентов переноса «собственной» турбулентности, возникающей вблизи зоны газификации твердого топлива. II. Гидродинамическая неустойчивость при обдуве // *Физика горения и взрыва*. — 2017. — Т. 53, № 6. — С. 26–37.
35. **Сабденов К. О., Ерзада М.** Аномальное влияние турбулентности на скорость горения твердых высокоэнергетических материалов // *Хим. физика*. — 2018. — Т. 37, № 10. — С. 22–30.
36. **Сабденов К. О., Ерзада М.** К определению коэффициентов переноса «собственной» турбулентности, возникающей вблизи зоны газификации твердого топлива. 1. Двухфазная модель зоны газификации // *Физика горения и взрыва*. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 70–82.
37. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: Наука, 1967.
38. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. — М.: Наука, 2000.
39. **Handbook of Turbulence: Fundamentals and Applications** / W. Frost, T. H. Moulden (Eds). — New York; London: Plenum Press, 1977.
40. **Williams F. A.** *Combustion Theory*. — Massachusetts; Palo Alto; London: Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1964.
41. **Denison M. R., Baum E. A.** A simplified model of unstable burning in solid propellants // *ARS Journal*. — 1961. — V. 31. — P. 1112–1122.
42. **Sabdenov K. O., Erzada Maira.** The equation for prandtl's mixing length // *Frontiers in Aerosp. Eng.* — 2014. — V. 3, iss. 2. — P. 50–55.
43. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. — М.: Наука, 1978.
44. **Булгаков В. К., Липанов А. М.** К теории горения конденсированного вещества при обдуве // *Физика горения и взрыва*. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 32–41.

*Поступила в редакцию 30.01.2018.
Принята к публикации 23.05.2018.*