

## О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАВАЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

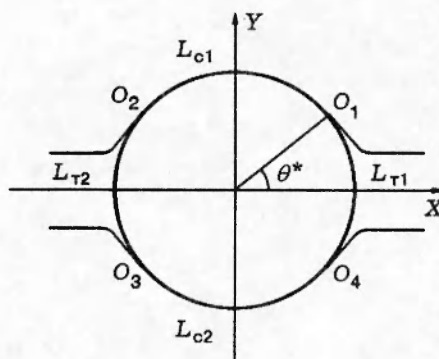
Предложен новый подход к изучению термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области.

Изучение термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области (жидком мостике) — одна из важных современных проблем гидромеханики. Она имеет непосредственное отношение к технологии получения высококачественных материалов. Исследования в данной области гидромеханики весьма многочисленны (см., например, [1–3] и представленную там библиографию). Однако до настоящего времени отсутствуют аналитические результаты, дающие описание течения жидкости в плавающей области. Это обстоятельство связано с тем, что проблема чрезвычайно сложна, в частности, вследствие того, что часть границы области, занимаемой жидкостью, является твердой, а часть — свободной.

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий осуществлять эффективное аналитическое изучение термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области. Данный подход основывается на использовании явления зацепления [1], состоящего в том, что на остром крае твердого тела краевой угол (угол между свободной границей жидкости и смоченной поверхностью твердого тела) не имеет единственного возможного значения, а допустимы его различные значения в определенных пределах.

Рассмотрим задачу о плоской термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области.

Имеется жидкость, граничащая с газовой средой и твердыми телами (см. рисунок). Область  $\Omega$ , занимаемая жидкостью, представляет собой бесконечно длинный цилиндр. Образующие цилиндрической поверхности параллельны оси  $Z$  прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$ . Твердые тела имеют острые края, которые пересекаются с плоскостью  $Z = 0$  в точках  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Каждый из этих краев совпадает с линией соприкосновения жидкости, газовой среды и твердого тела. Свободная граница области  $\Omega$  состоит из двух частей:  $\Gamma_{c1}$  и  $\Gamma_{c2}$ . Твердая граница области  $\Omega$  состоит из двух частей:  $\Gamma_{T1}$  и  $\Gamma_{T2}$ . Линии  $L_{T1}, L_{T2}$  пересечения  $\Gamma_{T1}, \Gamma_{T2}$  с плоскостью  $Z = 0$  являются дугами длины  $2A\theta^*$  ( $0 < \theta^* < \pi/2$ ) окружности радиуса  $A$  с центром в начале координат  $X, Y, Z$ . Температура  $T$  жидкости равна  $T_c$  на  $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}$  и  $T_T$  на  $\Gamma_{T1}, \Gamma_{T2}$  ( $T_c$  может иметь различные значения в разных точках  $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}$ ;  $T_T$  — постоянная). Коэффициент  $\sigma$  поверхностного натяжения жидкости на границе с газовой средой зависит от  $T_c$ .



В невозмущенном состоянии жидкости, т. е. при  $T_c = T_T$ , область  $\Omega$  представляет собой бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $A$ , жидкость покоится, давление в

жидкости постоянно,  $T = T_T$ .

То, что в невозмущенном состоянии жидкости область  $\Omega$  является круговым цилиндром, принципиально важно и осуществляется благодаря явлению зацепления.

На остром краю твердого тела возможна реализация любого значения краевого угла  $\alpha$ , удовлетворяющего условию  $\beta \leq \alpha \leq \beta + \pi - \gamma$ , где  $\beta$  — краевой угол на гладкой поверхности тела;  $\gamma$  — угол между исходящими из острого края тела плоскостями, касательными к поверхности тела. Рассматриваемая область, занимаемая жидкостью в невозмущенном состоянии (круговой цилиндр), может быть получена из какой-либо другой допустимой (цилиндрической) области, занимаемой жидкостью в невозмущенном состоянии, посредством изменения (добавления, убавления) количества жидкости (в каждой части конечной длины цилиндрической области).

При  $T_c \neq T_T$  жидкость совершает стационарное движение относительно системы координат  $X, Y, Z$ . Течение жидкости является плоским (плоскости течения перпендикулярны к оси  $Z$ ). Сечение области  $\Omega$  плоскостью  $Z = 0$ , температура, скорость жидкости и давление в жидкости в этом сечении симметричны относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Пусть  $x_1 = X/A$ ;  $x_2 = Y/A$ ;  $x_3 = Z/A$ ;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ;  $L$  — линия пересечения  $\Gamma$  с плоскостью  $x_3 = 0$ ;  $H$  — кривизна  $L$ ;  $\eta = AH$ ;  $\mathbf{e}_n$  — единичный вектор, нормальный к  $\Gamma$  (направленный от  $\Omega$ );  $\mathbf{e}_t$  — единичный вектор, касательный к  $L$  (направленный в положительном направлении обхода  $L$ );  $S$  — длина исходящей из точки  $(1, 0, 0)$  дуги  $L$  (направление возрастания  $S$  совпадает с направлением  $\mathbf{e}_t$ );  $s = S/A$ ;  $\sigma_0$  — значение  $\sigma$  при  $T_c = T_T$ ;  $\hat{\sigma}$  — наибольшее значение  $|\sigma - \sigma_0|$ ;  $\sigma = \sigma_0 + \hat{\sigma}f$  ( $f = f(s)$ );  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости;  $Ma = A\hat{\sigma}/(\rho\nu^2)$  — число Марангони;  $\lambda = A\sigma_0/(\rho\nu^2)$ ;  $\mathbf{V}$  — скорость жидкости;  $\mathbf{v} = A\mathbf{V}/\nu$ ;  $\rho$  — плотность жидкости;  $P_T$  — давление в газе;  $P$  — давление в жидкости;  $p = A^2(P - P_T - \sigma_0/A)/(\rho\nu^2)$ ;  $\mathbf{P}$  — тензор напряжений в жидкости;  $\mathbf{I} = (I_{ij})$  — единичный тензор;  $\mathbf{p} = (p_{ij}) = A^2[\mathbf{P} + (P_T + \sigma_0/A)\mathbf{I}]/(\rho\nu^2)$  ( $p_{ij} = -pI_{ij} + \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$ );  $\tau = T - T_T$ ;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности жидкости.

Уравнения линий  $L_{c1}, L_{c2}$  пересечения  $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}$  с плоскостью  $x_3 = 0$ , уравнения конвекции жидкости (уравнения Навье — Стокса, неразрывности, переноса тепла [4]) и условия, которые должны выполняться на  $L_{T1}, L_{T2}, L_{c1}, L_{c2}$ , имеют следующий вид:

$$r = \xi_1; \quad (1)$$

$$r = \xi_2; \quad (2)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \tau = \frac{\chi}{\nu} \Delta \tau; \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{на} \quad L_{T1}, \quad L_{T2}; \quad (6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_n = [\lambda(1 - \eta) - Ma \eta f] \mathbf{e}_n + Ma \frac{df}{ds} \mathbf{e}_t, \quad (7)$$

$$\tau = T_c - T_T \quad \text{на} \quad L_{c1}, \quad L_{c2}.$$

Требуется определить  $\xi_1, \xi_2, \mathbf{v}, p, \tau$ .

Будем рассматривать задачу (1)–(7) при малых по сравнению с единицей значениях  $Ma$ .

Предположим, что при  $Ma \rightarrow 0$

$$\xi_1 \sim \xi_1^{(0)} + Ma \xi_1^{(1)}, \quad \xi_2 \sim \xi_2^{(0)} + Ma \xi_2^{(1)}, \quad \mathbf{v} \sim \mathbf{v}^{(0)} + Ma \mathbf{v}^{(1)},$$

$$p \sim p^{(0)} + \text{Ma} p^{(1)}, \quad \tau \sim \tau^{(0)} + \text{Ma} \tau^{(1)}. \quad (8)$$

В нулевом приближении, соответствующем невозмущенному состоянию жидкости, имеем

$$r = \xi_1^{(0)} \quad (\theta^* < \theta < \pi - \theta^*)$$

— уравнение линии  $L_{c1}^{(0)}$ ,

$$\xi_1^{(0)} = 1$$

( $\theta$  — угол между векторами  $(1, 0, 0)$  и  $(x_1, x_2, 0)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )),

$$r = \xi_2^{(0)} \quad (\pi + \theta^* < \theta < 2\pi - \theta^*)$$

— уравнение линии  $L_{c2}^{(0)}$ ,

$$\xi_2^{(0)} = 1$$

( $L_{c1}^{(0)}, L_{c2}^{(0)}$  — линии пересечения свободной границы области, занимаемой жидкостью в нулевом приближении, с плоскостью  $x_3 = 0$ ),

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = 0, \quad \tau^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Используя (1)–(9), определим задачу первого приближения:

$$r = 1 + \text{Ma} \xi_1^{(1)} \quad (\theta^* < \theta < \pi - \theta^*) \quad (10)$$

— уравнение линии  $L_{c1}^{(1)}$ ;

$$r = 1 + \text{Ma} \xi_2^{(1)} \quad (\pi + \theta^* < \theta < 2\pi - \theta^*) \quad (11)$$

— уравнение линии  $L_{c2}^{(1)}$  ( $L_{c1}^{(1)}, L_{c2}^{(1)}$  — линии пересечения свободной границы области, занимаемой жидкостью в первом приближении, с плоскостью  $x_3 = 0$ );

$$-\nabla p^{(1)} + \Delta \mathbf{v}^{(1)} = 0; \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0; \quad (13)$$

$$v_r^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad L_{Ti}, \quad L_{ci}^{(0)} \quad (i = 1, 2); \quad (14)$$

$$v_\theta^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad L_{Ti} \quad (i = 1, 2); \quad (15)$$

$$-p^{(1)} + 2 \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial r} - \lambda \left( \frac{d^2 \xi_i^{(1)}}{d\theta^2} + \xi_i^{(1)} \right) + f = 0 \quad \text{на} \quad L_{ci}^{(0)} \quad (i = 1, 2); \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_\theta^{(1)}}{\partial r} - v_\theta^{(1)} - \frac{df}{d\theta} = 0 \quad \text{на} \quad L_{ci}^{(0)} \quad (i = 1, 2); \quad (17)$$

$$\Delta \tau^{(1)} = 0; \quad (18)$$

$$\tau^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad L_{Ti} \quad (i = 1, 2); \quad (19)$$

$$\tau^{(1)} = \varphi \quad \text{на} \quad L_{ci}^{(0)} \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

где  $v_r^{(1)}, v_\theta^{(1)}$  —  $r$ -,  $\theta$ -компоненты вектора  $\mathbf{v}^{(1)}$ ;  $\varphi = \lim_{\text{Ma} \rightarrow 0} (T_c - T_T)/\text{Ma}$ . Уравнения (12), (13) в области, занимаемой жидкостью в нулевом приближении, имеют следующее решение, удовлетворяющее условию (14):

$$v_r^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta^{(1)} = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (21)$$

$$p^{(1)} = a_0 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta)r^m, \quad (22)$$

где  $\psi = (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)r^m$ ;  $a_0, a_m, b_m$  — постоянные. Используя (15), (21), получим

$$a_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots); \quad (23)$$

$$b_{2n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (24)$$

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\pi/2} u \sin 2n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (25)$$

где  $u = v_\theta^{(1)}|_{r=1, \theta^* \leq \theta \leq \pi/2}$ . Будем полагать, что  $T_c \rightarrow T_T$  при  $s \rightarrow \theta^* + 0$ . В соответствии с этим имеем

$$f = 0 \quad \text{при } \theta = \theta^*, \theta = \pi - \theta^*, \theta = \pi + \theta^*, \theta = 2\pi - \theta^*. \quad (26)$$

Из (17), (21), (23)–(26) следует

$$f = 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}(\cos 2n\theta^* - \cos 2n\theta). \quad (27)$$

Равенствами (25), (27) определяется связь между величинами  $f$  и  $u$ . Отметим, что, согласно (17), (21), (23)–(25),

$$b_{2k} = \frac{1}{2k(\pi - 2\theta^*) + \sin 4k\theta^*} \left\{ \int_{\theta^*}^{\pi/2} \frac{df}{d\theta} \sin 2k\theta d\theta + \right. \\ \left. + 2 \sum_{\substack{n \neq k \\ n=1}}^{\infty} \frac{n}{n^2 - k^2} [(n+k) \sin 2(n-k)\theta^* - (n-k) \sin 2(n+k)\theta^*] b_{2n} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Используя (16), (21)–(25) и учитывая, что линии  $L_{c1}^{(1)}, L_{c2}^{(1)}$  граничат с линиями  $L_{T1}, L_{T2}$  в точках  $O_1, O_2, O_4, O_3$ , найдем

$$\xi_1^{(1)} = \mu \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta^*} \right), \quad \xi_2^{(1)} = \mu \left( 1 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta^*} \right), \quad (28)$$

где

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \left( -a_0 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\theta^* \right).$$

Пусть  $\pi A^2 l q^{(1)}$  — отвечающий первому приближению объем жидкости, заключенной между двумя плоскостями течения, отстоящими друг от друга на расстоянии  $l$ . В пренебрежении изменением плотности жидкости, связанным с отклонением  $T$  от  $T_T$ , имеем

$$q^{(1)} = 1. \quad (29)$$

Из (10), (11), (28), (29) следует

$$a_0 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\theta^*. \quad (30)$$

Согласно (28), (30),

$$\xi_1^{(1)} = 0, \quad \xi_2^{(1)} = 0. \quad (31)$$

Соотношениями (21)–(25), (31) определяется решение задачи (10)–(16), удовлетворяющее равенству (29).

Отметим, что при достаточно гладкой зависимости  $v_\sigma^{(1)}|_{r=1}$  от  $\theta$  произведенные действия над рядами легко обосновываются (см. [5]).

Используя (18)–(20), получим

$$\tau^{(1)} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos 2n\theta r^{2n}, \quad (32)$$

где

$$c_0 = \int_{\theta^*}^{\pi/2} \varphi d\theta; \quad c_n = \frac{4}{\pi} \int_{\theta^*}^{\pi/2} \varphi \cos 2n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Соотношениями  $\xi_1 = 1 + \text{Ma} \xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2 = 1 + \text{Ma} \xi_2^{(1)}$ ,  $\mathbf{v} = \text{Ma} \mathbf{v}^{(1)}$ ,  $p = \text{Ma} p^{(1)}$ ,  $\tau = \text{Ma} \tau^{(1)}$  и (21)–(25), (27), (31), (32) определяется приближенное решение рассматриваемой задачи о термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области.

Полученные результаты демонстрируют основные закономерности и позволяют отвечать на частные вопросы, относящиеся к рассматриваемой задаче.

Аналогично тому, как это сделано выше, могут изучаться другие задачи о плоской или пространственной конвекции жидкости в плавающей области. Изложенный в настоящей работе подход может быть использован для исследования как стационарных, так и нестационарных течений жидкости как в отсутствие, так и при наличии массовых сил.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Космическое материаловедение. Введение в научные основы космической технологии** / Под ред. Б. Фойербахера, Г. Хамахера, Р. Наумана. М.: Мир, 1989.
2. **Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости** / Под ред. А. Д. Мышкиса. Киев: Наук. думка, 1992.
3. **Регель Л. Л. Космическое материаловедение // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1987.**
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.**
5. **Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, 3. М.: Наука, 1970.**

*Поступила в редакцию 30/VIII 1996 г.*