УДК 536.3+536.42

РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ СРЕД

С. Д. Слепцов, Н. А. Рубцов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Проведено численное моделирование классической задачи Стефана в модифицированной постановке для полупрозрачной серой среды. Получены поля температур, поле результирующего радиационного потока излучения, исследованы динамика смещения плоскости раздела фаз и эволюция роста температуры на черной левой границе образца при различных значениях степени черноты правой облучаемой границы.

Ключевые слова: фазовый переход, однофазная задача Стефана, радиационно-кондуктивный теплообмен, серая среда, коэффициент отражения, степень черноты.

Введение. Однофазная задача Стефана является частным случаем двухфазной задачи Стефана, в которой температура одной из фаз тождественно равна постоянной температуре фазового перехода [1]. Очевидно, что в рамках классической задачи в условии Стефана на границе фаз отсутствует тепловой поток со стороны фазы с постоянной температурой. В действительности по обе стороны от границы фаз существует перенос тепловой энергии, поэтому физические модели однофазной задачи Стефана не удовлетворяют указанным условиям. Задачи в такой постановке рассмотрены в работах [2, 3], в которых численно моделируются процессы нагрева и плавления однородных полупрозрачных пластин за счет одностороннего внешнего радиационно-конвективного (кондуктивного) подвода тепловой энергии.

В работе [2] границы пластины предполагаются абсолютно черными, а условие Стефана в явном виде не учитывает перепад тепловых потоков на границе фаз. При этом согласно условиям задачи результирующий (радиационно-кондуктивный) тепловой поток на внешней границе со стороны расплава является заданным.

В работе [3] границы пластины на стадии нагрева предполагаются непоглощающими, частично отражающими, пропускающими. Условие Стефана в явном виде учитывает перепад результирующих тепловых потоков на границе фаз. При этом граница фазового перехода становится полупрозрачной, вследствие чего значение коэффициента поглощения (излучения) является переменным, значение отражательной способности — постоянным. Если при численной реализации задачи в работе [2] затруднений не возникало, то в работе [3] при решении задачи выявлены ограничения, зависящие от значений поглощательной (излучательной) способности границы фазового перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00154-а).

В [4] использовалось классическое приближение задачи Стефана [1]. На основе теории классической задачи Стефана на границе раздела фаз в [4] предполагалось, что тепловая энергия, выделяющаяся на фронте фазового превращения за счет излучения, компенсируется тепловой энергией испаряющегося вещества. При решении задачи ограничение для различных степеней черноты поверхностей, а также перегрев в твердой конденсированной фазе отсутствуют.

В данной работе продолжено исследование классического подхода к решению однофазной задачи Стефана.

Постановка задачи. Рассматриваются нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца из полупрозрачной серой среды с коэффициентом объемного поглощения излучения α и теплопроводностью λ. Левая граница плоского образца является черной ($A_1 = 1$), правая — прозрачной ($A_2 = 0$), частично отражающей ($R_2 = \mathrm{const}$) и пропускающей ($D_2 = 1 - R_2$) полусферическое излучение в процессе нагрева образца. При нагреве до температуры фазового перехода граница $i = 2$ становится полупрозрачной и удовлетворяет оптическому условию $A_i + R_i + D_i = 1$, $i = 2$ при переменных значениях A_2. При этом предполагается справедливость закона Кирхгофа $A_2 = \varepsilon_2$, где ε_2 — степень черноты границы $i = 2$.

На первом этапе решение задачи сводится к исследованию нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева плоского образца излучением и конвекцией со стороны границы $i = 2$.

На втором этапе при нагреве границы образца до температуры плавления T_f рассматривается задача Стефана.

В общем случае уравнение сохранения энергии имеет вид

$$c_{ps}\rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = c_{ps}\rho_s \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} - E\Big), \tag{1}$$

где c_{ps}, ρ_s, λ_s — теплоемкость, плотность и теплопроводность конденсированной среды; $E = E(x,t)$ — плотность потока результирующего излучения в сечении x в момент времени t, определяемая из решения радиационной задачи методом средних потоков.

При $\partial x/\partial t = 0$ уравнение (1) используется на первом этапе решения задачи. При этом граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\delta} + h_1(T - T_1)\big|_{x-\delta} + |E_1| = 0, \qquad x = 0; \tag{2}$$

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x-\delta} - h_2(T_2 - T)\big|_{x+\delta} = 0, \qquad x = L_0, \tag{3}$$

где h_i — коэффициент конвективного теплообмена границ $i = 1, 2$ с внешней средой при температуре T_i,

$$|E_1| = A_1[E^-(x+\delta) + \sigma_0 T_1^4] - \varepsilon_1(1+n^2)\sigma_0 T^4(x),$$

$E^-(x+\delta)$ — плотность потока излучения, падающего на границу $x = 0$ со стороны пластины с показателем преломления излучения n.

На втором этапе решения задачи граничное условие (2) остается неизменным, а граничное условие (3) преобразуется в условие Стефана, при этом согласно условию задачи температура на правой границе фиксируется:

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x-\delta} - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\delta} - h_2(T_l - T_2) - |E_2| = \rho_{sf}\gamma_f \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad T(x,t) = T_f, \quad x = L(t). \tag{4}$$

Здесь λ_l — теплопроводность расплава, образующегося на внешней поверхности фронта фазового перехода; h_2 — значение коэффициента конвективной теплоотдачи от пленки расплава при температуре $T_l = T_f$ в окружающую среду за счет испарения (абляции); γ_f — скрытая теплота фазового перехода.

В уравнении (4) использовано равенство

$$|E_2| = A_2[E^+(x-\delta) + E^*(x+\delta)] - \varepsilon_2(1+n^2)E_b(T_f), \qquad x = L(t), \tag{5}$$

где $E^+(x-\delta)$, $E^*(x+\delta)$ — плотность потоков излучения, падающих на плоскость сечения x со стороны пластины и внешнего источника соответственно; $E_b(T_f)$ — плотность потока равновесного излучения при температуре T_f (температура фазового перехода первого рода).

В соответствии с классическим подходом к решению однофазной задачи Стефана [1] полагаем, что суммарное значение результирующего потока на внешней поверхности тождественно равно нулю:

$$q^{\Sigma}(x+\delta) = 0, \qquad x = L(t). \tag{6}$$

При этом

$$q^{\Sigma}(x+\delta) = \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\delta} - E_{res,2}(x+\delta) - h_2(T_l - T_2)\big|_{x+\delta}, \tag{7}$$

где $E_{res,2}(x+\delta)$ — плотность потока результирующего излучения на внешней поверхности, которая с учетом проницаемости границы x определяется выражением

$$-E_{res,2}(x+\delta) = (A_2 + D_2)E^*(x+\delta) - \varepsilon_2\sigma_0 T_f^4 - D_2E^+(x-\delta). \tag{8}$$

Учитывая выражение для объемной плотности потока результирующего излучения [5]

$$|E_2| = E_{res,2}(x-\delta) - E_{res,2}(x+\delta), \tag{9}$$

а также формулы (5), (7), (8), условие Стефана на правой границе пластины можно записать в виде

$$\begin{gathered} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x-\delta} - (A_2+D_2)E^+(x-\delta) + D_2E^*(x+\delta) + \varepsilon_2 n^2\sigma_0 T_f^4 = \rho_{sf}\gamma_f \frac{\partial L}{\partial t}, \\ T(x-\delta) = T_f, \qquad T(x+\delta) = T_l, \qquad T_l = T_f. \end{gathered} \tag{10}$$

Система уравнений (1)–(3) на первом этапе дополняется начальным условием

$$T(x,t) = T_1 = \mathrm{const}, \qquad t = 0, \tag{11}$$

а система уравнений (1), (2), (5) на втором этапе — начальным условием

$$T(x,t) = f(x), \qquad L(t) = L_0, \qquad t = 0. \tag{12}$$

Метод решения. С использованием переменной $\xi = x/L(t)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, позволяющей фиксировать координату фронта фазового перехода [6], краевую задачу (1), (2), (10), (12) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \xi\,\frac{\dot s}{s}\,\frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi} + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} - \frac{1}{sN}\,\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1; \tag{13}$$

$$-\frac{\partial\theta(0,\eta)}{\partial\xi} + s\,\mathrm{Bi}_1(\theta(0,\eta) - \theta_1) - \frac{A_1 s}{N}\Big(\Phi^- + \frac{\theta_1^4}{4} - \frac{1+n^2}{4}\,\theta^4(0,\eta)\Big) = 0, \quad \theta(1,\eta) = 1; \tag{14}$$

$$\frac{\partial\theta(1,\eta)}{\partial\xi} - \frac{s}{N}\Big((A_2+D_2)\Phi^+(1,\eta) - D_2\Phi^* + \varepsilon_2 n^2\,\frac{\theta^4(1,\eta)}{4}\Big) = \frac{s\dot s}{\mathrm{St}}; \tag{15}$$

$$\theta(\xi,0) = f(\xi), \qquad s(0) = 1, \tag{16}$$

где $\theta = T/T_r$; $\xi = x/L(t)$; $s(\eta) = L(t)/L_0$; $\eta = \lambda_s t/(\rho_s c_{ps} L_0^2)$; $N = \lambda_s/(4\sigma_0 T_r^3 L_0)$ — радиационно-кондуктивный параметр; $\Phi^{\pm}(\xi,\eta) = E^{\pm}(x,t)/(4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока излучения; $\Phi^* = E^*/(4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока излучения, падающего на пластину справа; $\mathrm{Bi}_1 = h_1 L_0/\lambda_s$ — число Био; $\dot{s} = ds/d\eta$ — скорость распространения фронта плавления; $\mathrm{St} = T_r c_{ps}/\gamma_f$ — число Стефана; $T_r = T_f$ — определяющая температура, равная температуре фазового перехода; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана.

Уравнение энергии и краевая задача, описывающая этап нагрева пластины, в новых переменных ($\xi = x/L_0$, $\dot{s} = 0$, $s(t) = \mathrm{const} = 1$) имеют вид

$$\frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} - \frac{1}{N}\,\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

$$-\frac{\partial\theta(0,\eta)}{\partial\xi} + \mathrm{Bi}_1\,(\theta(0,\eta) - \theta_1) - \frac{A_1}{N}\Big(\Phi^- + \frac{\theta_1^4}{4} - \frac{1+n^2}{4}\,\theta^4(0,\eta)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial\theta(1,\eta)}{\partial\xi} - \mathrm{Bi}_2\,(\theta_2 - \theta(1,\eta)) = 0, \qquad \theta(\xi,0) = \theta_1.$$

Входящие в уравнение (13) безразмерная плотность потока результирующего излучения $\Phi \equiv \Phi^+ - \Phi^-$ и значения $\Phi^{\pm}$ определяются из решения уравнения переноса излучения в плоском слое излучающей и поглощающей среды при известном распределении температуры в слое. При этом с использованием модифицированного метода средних потоков [7] уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений излучения для плоского слоя среды.

Дифференциальный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков $\Phi^{\pm}$ записывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\,(\Phi^+(\tau,\eta) - \Phi^-(\tau,\eta)) + m^+(\tau)\Phi^+(\tau,\eta) - m^-(\tau)\Phi^-(\tau,\eta) = n^2\Phi_0,\\ \frac{d}{d\tau}\,(m^+(\tau)l^+(\tau)\Phi^+(\tau,\eta) - m^-(\tau)l^-(\tau)\Phi^-(\tau,\eta)) + \Phi^+(\tau,\eta) - \Phi^-(\tau,\eta) = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

где Φ_0 — безразмерное значение плотности потока равновесного излучения; $m^{\pm}$, $l^{\pm}$ — кинетические коэффициенты, определяемые из рекуррентного соотношения, полученного в результате формального решения уравнения переноса излучения [7].

Граничные условия на диффузно отражающих, пропускающих и частично поглощающих (излучающих) поверхностях определяются следующим образом [3]:

$$\begin{gathered}\Phi^+(0,\eta) = A_1 n^2\,\frac{\theta^4(0,\eta)}{4} + D_1\,\frac{\theta_1^4}{4} + \Big(1 - \frac{1-R_1}{n^2}\Big)\Phi^-(0,\eta),\\ \Phi^-(1,\eta) = \varepsilon_2 n^2\,\frac{\theta^4(1,\eta)}{4} + D_2\Phi^* + \Big(1 - \frac{1-R_2}{n^2} - A_2\,\frac{1+n^2}{n^2}\Big)\Phi^+(1,\eta).\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $A_2 = \varepsilon_2 = 0$, если рассматривается этап нагрева образца. В уравнениях (17), (18) используются определения

$$\Phi^{\pm}(\tau,\eta) = \frac{2\pi}{4\sigma_0 T_r^4}\int\limits_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau,\mu)\mu\,d\mu,$$

где I — интенсивность излучения; μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью x; $\tau = \alpha L(t)$ — оптическая толщина слоя в момент времени t.

Решение краевой задачи сводится к определению температуры $\theta(\xi,\eta)$ и плотностей потоков результирующего излучения $\Phi(\xi,\eta)$ в области $G\{0 \leqslant \xi \leqslant 1;\ 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1\}$, представляющей собой слой конденсированной фазы. Координата фронта фазового перехода $s(\eta)$ меняется в диапазоне от 1 до 0. Краевая задача решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (17), (18) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость данного метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

Анализ результатов решения. При численном моделировании определены поля температур и плотностей потоков излучения, а также исследована динамика толщины слоя серой полупрозрачной среды в зависимости от поглощательной способности фронта плавления. Теплофизические свойства материала образца близки к свойствам стекла: плотность $\rho_s = 2000$ кг/м^3, теплопроводность $\lambda_s = 1$ Вт/(м $\cdot$ К), температуропроводность $a_s = 10^{-6}$ м^2/с, температура плавления $T_f = 1000$ К, скрытая теплота фазового перехода $\gamma_f = 500$ кДж/кг, показатель преломления $n = 1{,}5$, коэффициент объемного поглощения излучения в материале образца $\alpha = 10$ м$^{-1}$. Начальная толщина образца $L_0 = 0{,}1$ м и начальная оптическая толщина $\tau_0 = \alpha L_0 = 1$ соответствуют оптимальному объемному взаимодействию излучения с материалом образца. Плотность потока излучения $E^* = 200$ кВт/м^2, температура среды вблизи левой границы $T_1 = 300$ К, температура газа вблизи правой границы образца (со стороны источника излучения) $T_2 = 900$ К (меньше T_f). Поскольку левая граница является черной ($\varepsilon_1 = A_1 = 1$), для стабилизации процесса теплообмена в пластине коэффициент теплоотдачи на этой границе полагаем равным $h_1 = 200$ Вт/(м$^2 \cdot$ К). На правой границе поддерживается температура плавления и отсутствует внешний результирующий радиационно-кондуктивный поток тепловой энергии (условие классической однофазной задачи Стефана). Коэффициент отражения на правой границе $R_2 = 0{,}1$. При моделировании процессов радиационно-кондуктивного теплообмена на стадии нагрева образца излучательную (поглощательную) способность правой границы полагаем равной $\varepsilon_2 = A_2 = 0$. При решении задачи Стефана излучательная (поглощательная) способность облучаемой правой границы, на которой происходит фазовый переход, меняется в диапазоне $\varepsilon_2 = A_2 = 0{,}1 \div 0{,}5$. Это позволяет моделировать ситуацию, при которой меняются оптические свойства поверхностных слоев материала, претерпевающего фазовые переходы первого рода.

На рис. 1 представлены поля температуры и плотности радиационных потоков в полупрозрачном слое в процессе фазового перехода при $\varepsilon_2 = 0{,}1$. Отмечается существенная неравномерность распределения температуры в слое конденсированной фазы, обусловленная большим значением потока излучения, проникающего в слой, существенной пропускающей способностью правой границы ($D_2 = 1 - \varepsilon_2 - R_2 = 0{,}8$) и интенсивным конвективным теплоотводом на левой границе слоя. Наблюдается перегрев примыкающей к фронту фазового перехода конденсированной среды, максимальное значение которого имеет место при $s = 0{,}5$.

Результирующие потоки излучения (см. рис. 1,*б*) изменяются от отрицательных значений, характеризующих объемное излучение, до положительных значений, характеризующих объемное поглощение в процессе фазового перехода.

На рис. 2,*а* приведены результаты расчетов температуры при нагреве пластины с черной левой границей и прозрачной правой, а также в процессе фазового перехода при $\varepsilon_2 = 0{,}3$. Видно, что нагрев пластины осуществляется в течение более длительного времени, а фазовый переход происходит при меньшем перегреве среды вследствие перераспределения радиационных и кондуктивных потоков (рис. 2,*б*) при увеличении степени черноты фазового перехода.

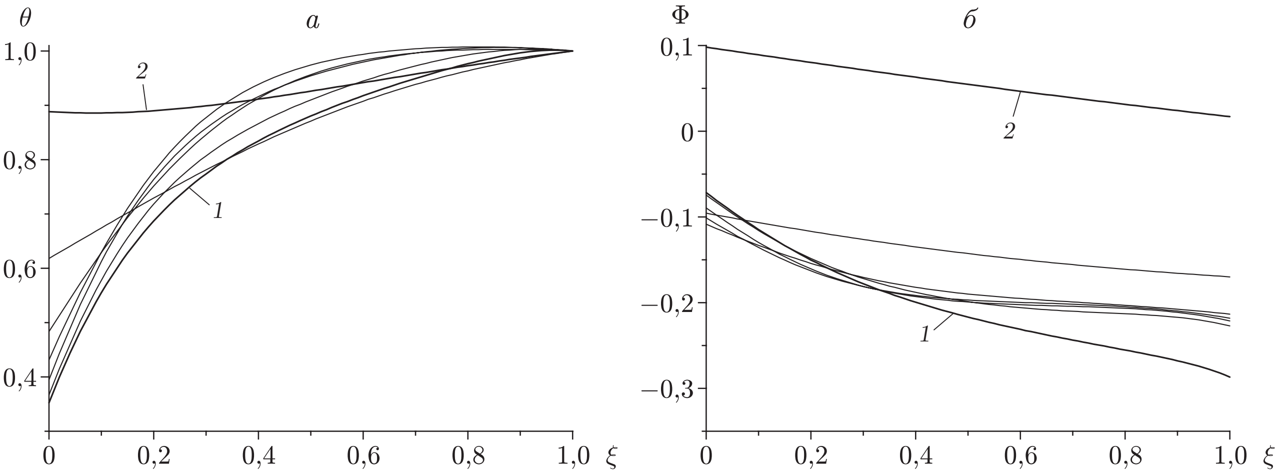

Рис. 1. Распределения температуры (*а*) и плотности результирующего радиационного потока (*б*) в процессе фазового перехода при $\varepsilon_2 = 0{,}1$:
1 — начало процесса, *2* — окончание процесса

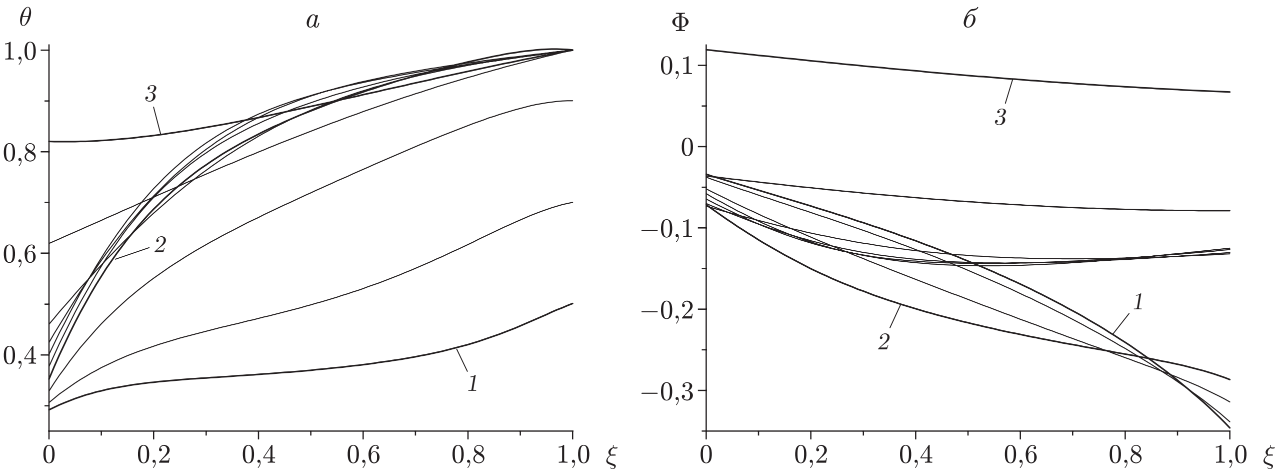

Рис. 2. Распределения температуры (*а*) и плотности результирующего радиационного потока (*б*) на этапе нагрева с последующим фазовым переходом при $\varepsilon_2 = 0{,}3$:
1 — начало процесса нагрева, *2* — начало процесса фазового перехода, *3* — окончание процесса фазового перехода

При увеличении степени черноты фронта фазового перехода до значения $\varepsilon_2 = 0{,}5$ в процессе фазового перехода преобладает влияние теплового излучения границ слоя как на температуру (рис. 3,*а*), так и на радиационный поток (рис. 3,*б*). Однако на заключительном этапе плавления пластины, когда оптическая толщина слоя стремится к нулю, основное влияние на распределение температуры оказывает теплопроводность (кривая *2* на рис. 3,*а*).

Основными характеристиками процесса нагрева и фазового перехода являются изменение температуры на левой неподвижной абсолютно черной конвективно охлаждаемой внешней средой границе и перемещение фронта фазового перехода (рис. 4). Процесс нагрева пластины характеризуется линейным во времени увеличением температуры на левой границе. Однако с момента начала фазового перехода даже незначительное увеличение

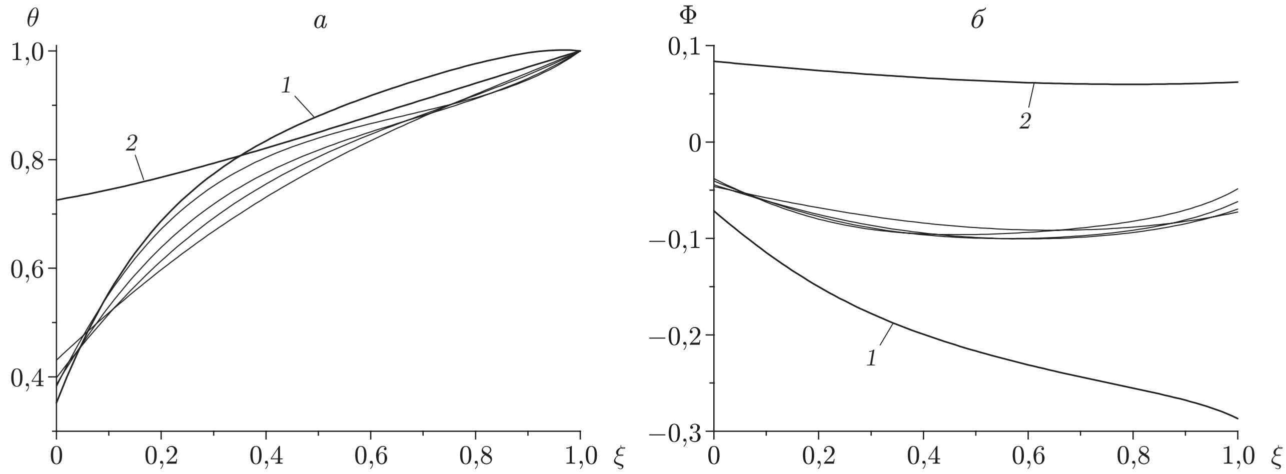

Рис. 3. Распределения температуры (*а*) и плотности результирующего радиационного потока (*б*) в процессе фазового перехода при $\varepsilon_2 = 0{,}5$:
1 — начало процесса, *2* — окончание процесса

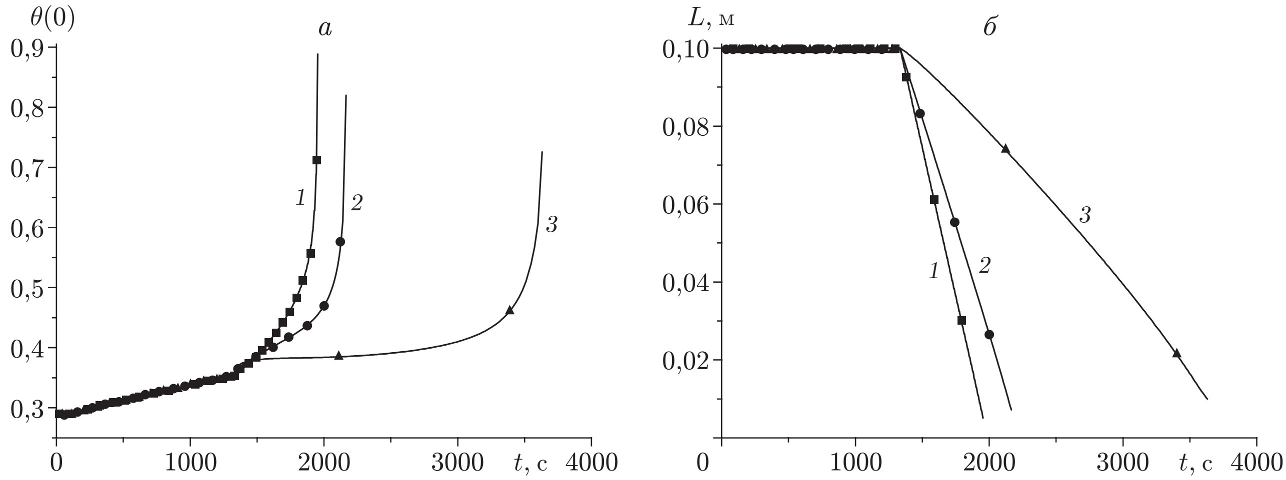

Рис. 4. Зависимости температуры на левой черной границе (*а*) и координаты фронта фазового перехода (*б*) от времени при различных значениях ε_2:
1 — $\varepsilon_2 = 0{,}1$, *2* — $\varepsilon_2 = 0{,}3$, *3* — $\varepsilon_2 = 0{,}5$

степени черноты фронта ($\varepsilon_2 = 0{,}1$) приводит к резкому, нелинейному во времени росту температуры на левой границе (см. рис. 4,*а*).

Анализ изменения (уменьшения) размера пластины в процессе фазового перехода (см. рис. 4,*б*) показывает, что процесс нагрева (горизонтальные участки кривых *1*–*3* на рис. 4,*б*) происходит в течение более длительного времени по сравнению с процессом полного плавления пластины при $\varepsilon_2 \leqslant 0{,}5$. При этом с увеличением значений ε_2 отмечается замедление процессов фазового перехода.

Представленные результаты расчетов общего времени фазового перехода качественно согласуются с результатами, полученными в [2] в случае абсолютно черных границ полупрозрачного слоя. При этом время процесса на порядок меньше значений, полученных в работе [3], в которой рассматривались неравновесные условия теплообмена на внешней поверхности фронта фазового перехода.

Выводы. Показана применимость решения классической однофазной задачи Стефана для слоя полупрозрачной среды с абсолютно черной неподвижной левой границей и поглощающей (пропускающей) подвижной правой границей, на которой происходит равновесный фазовый переход первого рода.

Установлено, что время нагрева существенно больше времени полного фазового превращения. Показано, что результаты расчетов общего времени нагрева и полного плавления полупрозрачного слоя, границы которого имеют произвольные оптические свойства, согласуются с результатами расчетов [2] в случае, когда полупрозрачный слой находится между абсолютно черными границами. Таким образом, допущение о равновесном характере фазового перехода является определяющим условием классической задачи Стефана и в квазиравновесных условиях позволяет определить наименьшее время фазового перехода в полупрозрачном материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
2. **Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R., et al.** Problem de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. France. Ser. 3. 1996. V. 6. P. 373–390.
3. **Рубцов Н. А., Слепцов С. Д.** Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглощательной способности // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2. С. 237–245.
4. **Рубцов Н. А., Слепцов С. Д.** Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена в слое полупрозрачной среды в приближении классического решения однофазной задачи Стефана // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 3. С. 475–483.
5. **Рубцов Н. А.** К решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 471–482.
6. **Landau H. G.** Heat conduction in a melting solid // Quart. Appl. Math. 1950. V. 8. P. 81–94.
7. **Рубцов Н. А.** Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах / Н. А. Рубцов, А. М. Тимофеев, Н. А. Саввинова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003.

Поступила в редакцию 17/I 2012 г.