

УДК 539.374

## ВЫГЛАЖИВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛИНООБРАЗНЫМ ШТАМПОМ ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ КУЛОНА — МОРА

А. Н. Анисимов, А. И. Хромов\*

Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,  
681000 Комсомольск-на-Амуре

\* Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королева,  
443086 Самара

E-mail: anisimov\_an@mail.ru

В рамках модели идеального жесткопластического тела рассматривается задача о выглаживании поверхности клинообразным штампом. С учетом необратимой сжимаемости исследуются поля деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений (на линиях разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик).

**Ключевые слова:** жесткопластическая модель тела, плоское деформированное состояние, тензор конечных деформаций, сжимаемость.

Технологические задачи теории пластичности рассматривались в работах [1, 2], однако в этих работах поле деформаций не исследовалось либо исследовалось при условиях текучести Треска или Мизеса, которые в рамках модели жесткопластического тела приводят к пластической несжимаемости материала. Из экспериментальных исследований известно, что перед разрушением материала происходит его разрыхление. В рамках рассматриваемого процесса выглаживания поверхности разрушение материала представляется в виде “шелушения” поверхности, которому может предшествовать разрыхление материала. Объяснить эти эффекты можно, используя условие текучести Кулона — Мора, ранее применявшееся в основном для грунтов.

В работах [3–5] показано, что в пластической области деформации распределяются крайне неравномерно, могут достигать больших значений и наблюдаются в основном в окрестности особенностей поля скоростей перемещений.

В данной работе выполнена оценка поля конечных деформаций в задаче о выглаживании жесткопластической поверхности клинообразным штампом (рис. 1).

В качестве меры деформаций принимается тензор конечных деформаций Альманси

$$E_{ij} = (\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0)/2, \quad (1)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $x_i^0$  — лагранжевы координаты частицы;  $x_i$  — эйлеровы координаты частицы;  $x_{j,i}^0 = a_{ij}$  — компоненты тензора дисторсии.

В качестве условия текучести для сжимаемого материала принимается условие Кулона — Мора, в условиях плоской деформации имеющее вид [6]

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/4 + \sigma_{12}^2 = (k + \cos 2\varphi (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2)^2,$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию в рамках проекта “Теоретические и экспериментальные исследования влияния диссипативных процессов на механические характеристики и разрушения материалов” (код проекта РНП 2.1.1/889).

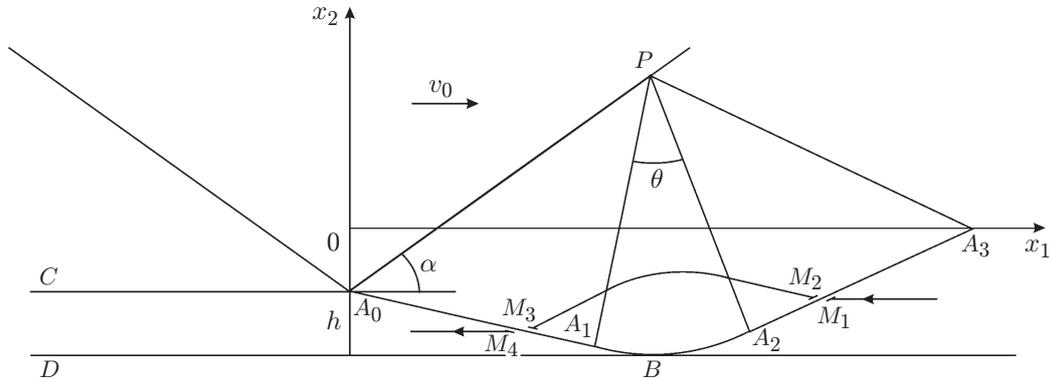


Рис. 1. Схема выглаживания поверхности клинообразным штампом

где  $k, \varphi$  — постоянные, характеризующие исследуемую среду.

Будем полагать, что клинообразный штамп движется со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x_1$ . Анализ поля напряжений и скоростей проводится так же, как в задаче о внедрении клина в жесткопластическое полупространство [7].

Пластическая область рассматриваемой задачи (см. рис. 1) состоит из двух треугольных областей  $A_0PA_1, A_2PA_3$  с равномерными напряженными состояниями, соединенных центрированным веером  $A_1PA_2$ , состоящим из прямых характеристик  $\eta$  и семейства логарифмических спиралей характеристик  $\xi$ , параметрическое уравнение которых имеет вид

$$x_1 = a - D e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)} \cos(\psi + \varphi) + v_0 t, \quad x_2 = b - D e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)} \sin(\psi + \varphi).$$

Здесь  $a, b$  — координаты точки  $P$ ;  $\psi$  — угол наклона наибольшей главной компоненты напряжения к оси  $x_1$ . Для характеристики  $A_1A_2$  используется константа  $D = c/(2 \cos \varphi)$ , где  $c$  — длина контактного участка  $A_0P$ .

Область  $CA_0A_1BD$  представляет собой область остаточных деформаций глубиной  $h$  при выглаживании клинообразным штампом жесткопластической поверхности. Длину контактного участка  $c$  можно выразить через глубину выглаживания  $h$ :

$$h = c(\sin \varphi e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\varphi-\alpha)} - \sin \alpha),$$

откуда следует, что при  $\alpha < \varphi$  глубина выглаживания  $h > 0$ .

Сила давления штампа, необходимая для деформирования материала, определяется соотношением

$$P = \frac{kc}{\cos 2\varphi} \left( 1 - \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} e^{-2\theta \text{ctg} 2\varphi} \right) \sin \alpha.$$

Проекция вектора скорости в пластической области имеют вид

$$u = \frac{v_0 \sin \alpha}{\cos \varphi} e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)}, \quad v = 0,$$

а компоненты скорости перемещения —

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\cos \varphi} e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)} \sin(\psi + \varphi) - v_0, \\ v_2 &= -\frac{v_0 \sin \alpha}{\cos \varphi} e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)} \cos(\psi + \varphi). \end{aligned} \tag{2}$$

На линии разрыва  $A_0A_1A_2A_3$  касательная и нормальная компоненты скорости равны

$$v_t = \frac{v_0 \sin \alpha \sin 2\varphi}{\cos \varphi} e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)}, \quad v_n = -\frac{v_0 \sin \alpha \cos 2\varphi}{\cos \varphi} e^{-\text{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)}.$$

Нормальная скорость перемещения  $G$  поверхности разрыва  $A_0A_1A_2A_3$  определяется по формуле

$$G = \frac{1}{\sqrt{f_{,i}f_{,i}}} \frac{\partial f}{\partial t}$$

( $f(x_1, x_2, t) = 0$  — уравнение жесткопластической границы) и имеет вид

$$G = v_0 \sin(\psi - \varphi), \quad \alpha \leq \psi \leq \alpha + \theta.$$

Скорость изменения объема среды, проходящей через пластическую область, складывается из скорости изменения объема при переходе через поверхность разрыва  $\int_S (v_n + G) dS$  и скорости изменения объема внутри пластической области  $\int_V v_{i,i} dV$ . Поскольку рассматривается процесс установившегося течения, имеет место равенство

$$\int_S (v_n + G) dS + \int_V v_{i,i} dV = 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) позволяет найти уравнение для определения угла раствора верха  $A_1PA_2$ :

$$\cos(\alpha + \theta) = \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi e^{-\operatorname{ctg}(2\varphi)\theta}.$$

Оценим поля деформаций в рассматриваемой задаче. Линия  $M_1M_2M_3M_4$  на рис. 1 представляет собой траекторию движения частицы в пластической области.

Движение среды будем описывать в переменных Эйлера. Поскольку принимается гипотеза сплошности среды, функции  $x_i^0$  предполагаются непрерывными. На поверхности разрыва скорости перемещений производные этих функций должны удовлетворять геометрическим и кинематическим условиям совместности Адамара — Томаса [8]

$$[x_{i,j}^0] = \lambda_i n_j, \quad \left[ \frac{\partial x_i^0}{\partial t} \right] = \lambda_i G, \quad (4)$$

где  $[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}$ ;  $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности разрыва;  $\lambda_i$  — некоторые функции, определенные на поверхности разрыва; индексы “+”, “−” обозначают стороны поверхности разрыва.

Ниже линии разрыва скоростей перемещений  $BA_2A_3$  материал будем считать недеформированным:

$$a_{ji}|_{M_1} = x_{i,j}^{0-} = \delta_{ij}. \quad (5)$$

Поскольку вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты являются постоянными, имеем

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + v_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0,$$

откуда следует

$$\left[ \frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[ v_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right].$$

С учетом первого соотношения в (4) и соотношения (5) получаем

$$\left[ \frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = -[v_j] - \lambda_j v_{n+} \quad (6)$$

( $v_{n+}$  — нормальная скорость движения частиц на линии разрыва). Вектор разрыва скорости перемещений представим в виде

$$[v_j] = [v_t]t_j + [v_n]n_j,$$

где  $[v_t]$  — величина разрыва касательной компоненты скорости;  $[v_n]$  — величина разрыва нормальной компоненты скорости;  $t_j$  — компоненты единичного вектора касательной к поверхности разрыва.

Из результатов сравнения правых частей (4), (6) следует [9]

$$\begin{aligned} [x_{i,j}^0] &= -(W_1 t_i + W_2 n_i) n_j, & a_{ji}|_{M_2} &= x_{i,j}^{0+} = \delta_{ij} - (W_1 t_i + W_2 n_i) n_j, \\ W_1 &= [v_t]/(G + v_{n+}), & W_2 &= [v_n]/(G + v_{n+}), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $W_1, W_2$  — соответственно объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций, отнесенных к пределу текучести  $k$ . Соотношения (7) позволяют получить приращения компонент тензора дисторсии на линиях разрыва  $BA_2A_3$  и  $A_0A_1B$ .

Для того чтобы получить компоненты тензора дисторсии в области непрерывного пластического деформирования (вдоль траектории  $M_2M_3$ ), используем систему уравнений [10]

$$\frac{da_{ij}}{dt} + a_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (8)$$

( $d/dt = \partial/\partial t + v_k \partial/\partial x_k$  — материальная производная по времени). Для процесса установившегося пластического деформирования и стационарного поля скоростей имеем

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = 0, \quad \frac{da_{ij}}{dt} = v_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}.$$

Переходя от координат  $x_1, x_2$  к криволинейным координатам  $\xi, \eta$  и используя соотношения для радиусов кривизны характеристик  $R_\xi, R_\eta$

$$\frac{1}{R_\xi} = \frac{\partial \psi}{\partial S_\xi}, \quad \frac{1}{R_\eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial S_\eta},$$

а также выражения для производных по направлению, совпадающему с направлением касательной к характеристике, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{2}{\sin 2\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sin(\psi + \varphi)}{R_\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sin(\psi - \varphi)}{R_\eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= -\frac{2}{\sin 2\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\cos(\psi + \varphi)}{R_\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\cos(\psi - \varphi)}{R_\eta} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\psi = (\xi + \eta)/2$ .

Поскольку в рассматриваемой задаче выражение для поля скоростей имеет вид (2), а характеристики семейства  $\eta$  представляют собой прямые, при переходе в (9) к пределу  $R_\eta \rightarrow \infty$  систему уравнений (8) с помощью (9) можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_{11}}{d\psi} B + (-a_{11} \sin(\psi - \varphi) + a_{21} \cos(\psi - \varphi)) \sin(\psi + \varphi) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{da_{12}}{d\psi} B + (-a_{12} \sin(\psi - \varphi) + a_{22} \cos(\psi - \varphi)) \sin(\psi + \varphi) &= 0, \\ \frac{da_{21}}{d\psi} B + (a_{11} \sin(\psi - \varphi) - a_{21} \cos(\psi - \varphi)) \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ \frac{da_{22}}{d\psi} B + (a_{12} \sin(\psi - \varphi) - a_{22} \cos(\psi - \varphi)) \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ B &= \frac{\sin 2\varphi (\sin \alpha e^{-\operatorname{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)} - \cos \varphi \sin(\psi + \varphi))}{\sin \alpha e^{-\operatorname{ctg}(2\varphi)(\psi-\alpha)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнений (10) описывает зависимость компонент тензора дисторсии от параметра  $\psi$ , распределенного вдоль траектории каждой частицы (переменная  $\psi$  выполняет роль времени,  $da_{ij}/d\psi$  — конвективная составляющая материальной производной). Численное интегрирование системы (10) позволяет получить компоненты  $a_{ij}$  в точке  $M_3$ . Начальными условиями для системы дифференциальных уравнений (10) являются компоненты тензора дисторсии (7), вычисленные в точке  $M_2$ . Значения тензора деформаций Альманси вычисляются по тензору дисторсии с использованием связи (1).

На выходе из пластической области при переходе через линию разрыва скоростей перемещений  $A_0A_1B$  частица деформируется еще раз. Поскольку тензоры градиентов деформаций относительно начальной, промежуточной и конечной конфигураций среды связаны соотношением

$$\frac{\partial x_i^0}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i^0}{\partial x_k^{*0}} \frac{\partial x_k^{*0}}{\partial x_j},$$

полные деформации в точке  $M_4$  определяются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial x_i^{0+}}{\partial x_j} \right|_{M_4} = (\delta_{ik} - (W_1 t_i + W_2 n_i) n_k) \left. \frac{\partial x_k^{*0-}}{\partial x_j} \right|_{M_3}. \quad (11)$$

Здесь

$$\left. \frac{\partial x_k^{*0-}}{\partial x_j} \right|_{M_3} = a_{jk} \Big|_{M_3}.$$

Используя соотношения (7), (11) и систему дифференциальных уравнений (10), можно получить накопления деформаций на участках  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$ ,  $M_3M_4$ .

В качестве характеристик величин деформаций частицы приняты главные значения тензора конечных деформаций Альманси (1)

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}.$$

Изменение плотности среды в результате деформации определяется соотношением

$$\rho_c = \sqrt{(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)} \rho_c^0,$$

где  $\rho_c^0$  — начальная плотность.

Численное решение задачи получено для следующих значений параметров:  $v_0 = 1$ ,  $\rho_c^0 = 1$ ,  $\varphi = 40, 45^\circ$ . На рис. 2 представлены зависимости деформаций частиц на выходе из пластической области от угла  $\psi$  ( $\alpha \leq \psi \leq \varphi$ ) при значениях угла  $\alpha = 5 \div 30^\circ$ .

На рис. 3 показана зависимость плотности материала  $\rho_c$  на выходе из пластической области от угла  $\psi$  при  $\varphi = 40^\circ$  и значениях угла  $\alpha = 5 \div 30^\circ$ . Из рис. 3 следует, что при  $\alpha = 30^\circ$  происходит разуплотнение среды при выглаживании. В остальных случаях

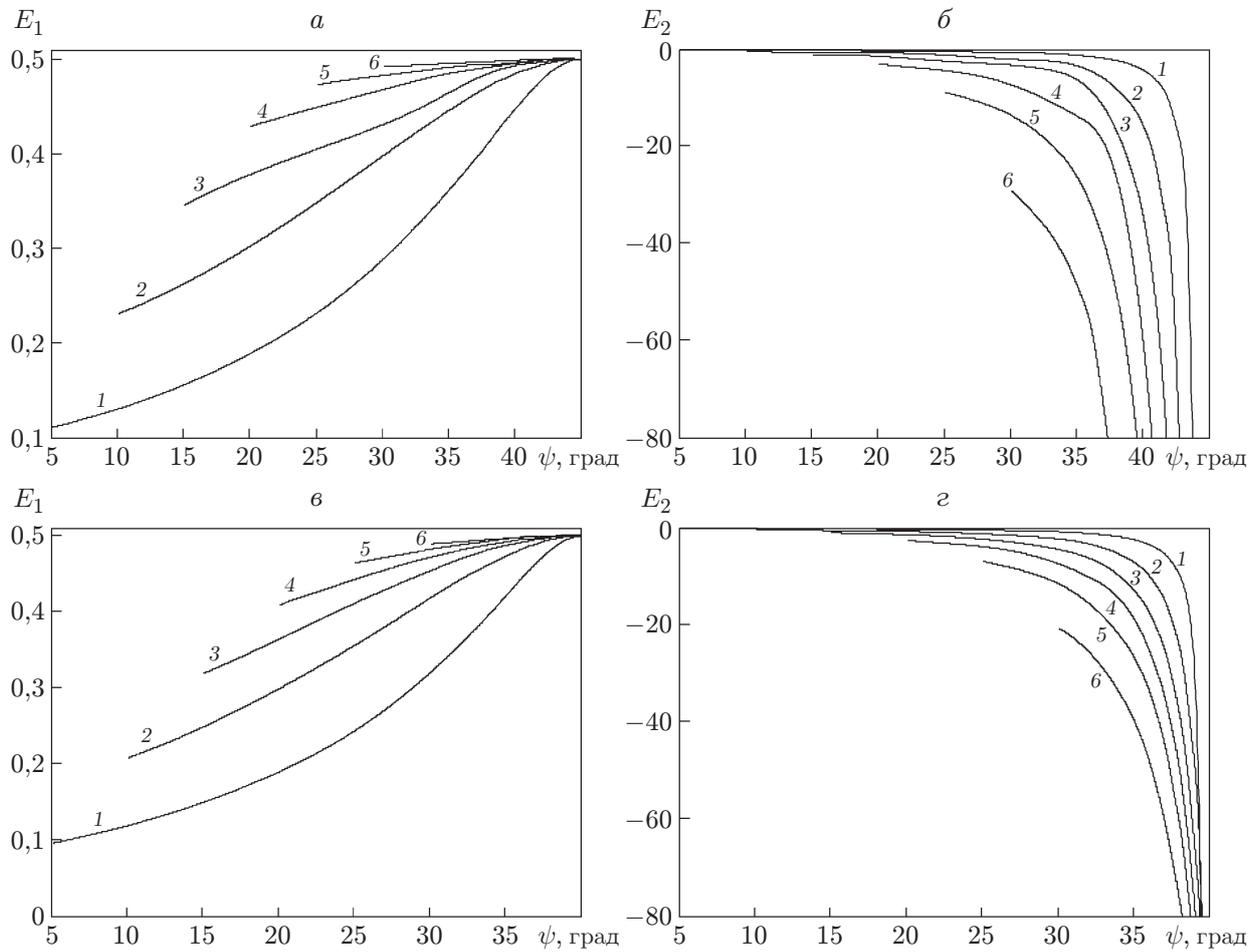


Рис. 2. Зависимости деформаций  $E_1$  (а, в),  $E_2$  (б, г) от угла  $\psi$  в области  $CA_0A_1BD$  (см. рис. 1) при различных значениях углов  $\alpha$  и  $\varphi$ :  
 а, б —  $\varphi = 45^\circ$  (несжимаемый материал), в, г —  $\varphi = 40^\circ$ ; 1 —  $\alpha = 5^\circ$ , 2 —  $\alpha = 10^\circ$ ,  
 3 —  $\alpha = 15^\circ$ , 4 —  $\alpha = 20^\circ$ , 5 —  $\alpha = 25^\circ$ , 6 —  $\alpha = 30^\circ$

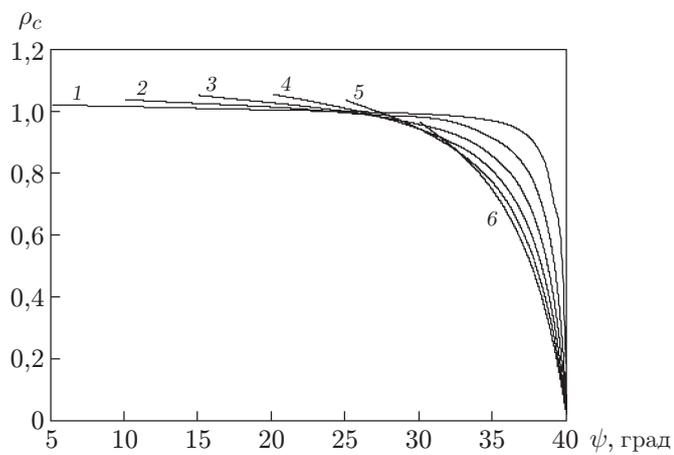


Рис. 3. Зависимость плотности материала от угла  $\psi$  в области  $CA_0A_1BD$  (см. рис. 1) при  $\varphi = 40^\circ$  и различных значениях угла  $\alpha$  (обозначения те же, что на рис. 2)

сначала происходит уплотнение среды, а затем, по мере приближения к точке  $B$ , — ее разуплотнение.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Предложенная модель расчета технологического процесса выглаживания поверхности позволяет количественно определить изменение плотности материала.

Рассмотренный подход может служить основой для экспериментального определения константы  $\varphi$ , входящей в условие текучести Кулона — Мора.

На основе экспериментальной реализации процессов выглаживания поверхностей различных материалов угловым штампом можно определить механическую характеристику разрушения материала, связанную с пластической сжимаемостью (по моменту начала “шелушения” поверхности).

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Друянов Б. А.** Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. М.: Машиностроение, 1990.
2. **Сегал В. М.** Технологические задачи теории пластичности. Минск: Наука и техника, 1977.
3. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
4. **Хромов А. И.** Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996.
5. **Хромов А. И.** Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. АН. 1998. Т. 362, № 2. С. 202–205.
6. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
7. **Анисимов А. Н., Хромов А. И.** Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона — Мора // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. 2007. № 1. С. 44–49.
8. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
9. **Анисимов А. Н., Хромов А. И.** О деформациях на поверхности разрыва поля скоростей перемещений // Теоретическая и прикладная механика: Межвед. сб. науч.-метод. ст. Минск: Белорус. нац. техн. ун-т, 2005. Вып. 19. С. 126–127.
10. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 11/VII 2008 г.,  
в окончательном варианте — 5/V 2009 г.*