

УДК 532.526

## БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАНЫХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИПЕРЗВУКОВЫХ УДАРНЫХ СЛОЯХ

Д. А. Бунтин, А. А. Маслов, С. Г. Миронов,  
Т. В. Поплавская, И. С. Цырюльников

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
630090 Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mails: bountin@itam.nsc.ru, maslov@itam.nsc.ru, mironov@itam.nsc.ru,  
popla@itam.nsc.ru, tsivan@ngs.ru

С помощью адаптированного метода биспектрального анализа анализируются данные численного моделирования развития возмущений в гиперзвуковом ударном слое на пластине при больших числах Маха ( $M_\infty = 21$ ) и умеренных числах Рейнольдса ( $Re_L = 1,44 \cdot 10^5$ ). Получены все основные типы нелинейных взаимодействий. Проводится сравнение полученных данных с результатами эксперимента.

**Ключевые слова:** гиперзвуковые течения, ударный слой, восприимчивость, прямое численное моделирование, эксперимент, биспектральный анализ.

**Введение.** С целью разработки методов управления пульсациями при обтекании гиперзвуковым потоком реального летательного аппарата выполнены комплексные экспериментальные и расчетные исследования восприимчивости и развития возмущений в гиперзвуковом вязком ударном слое (ВУС) на пластине [1]. Восприимчивость гиперзвукового ударного слоя к внешним и внутренним воздействиям играет важную роль в формировании спектра начальных возмущений и оказывает влияние на ламинарно-турбулентный переход в гиперзвуковом пограничном слое. В зависимости от амплитуды первичных волн и их спектра в пограничных слоях возможны различные сценарии ламинарно-турбулентного перехода [2, 3], определяемые преобладанием тех или иных нелинейных механизмов. В одном из сценариев, характерных для течений в слабовозмущенной среде, предполагается наличие восприимчивости, линейной фазы, обусловленной экспоненциальным ростом неустойчивой моды, и нелинейного перехода к турбулентности. В другом сценарии, характерном для течений в сильно возмущенной среде, линейная фаза отсутствует.

В случае гиперзвукового ударного слоя, когда течение не параллельно и головная ударная волна расположена очень близко к пограничному слою, волны неустойчивости могут возбуждаться за счет не только восприимчивости, но и непосредственного усиления

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-08-00679) и в рамках Аналитической ведомственной целевой программы № 2.1.1/3963 и Программы РАН № 11/9.

© Бунтин Д. А., Маслов А. А., Миронов С. Г., Поплавская Т. В., Цырюльников И. С., 2012

возмущений в ударной волне. При воздействии на ударный слой интенсивных возмущений внешнего потока возможно нелинейное взаимодействие и развитие возмущений [4].

При численном моделировании для определения начальной амплитуды вводимых возмущений, при которой возникают нелинейные процессы, обычно проводится ряд расчетов, в которых постепенно увеличивается амплитуда начального возмущения. Получив таким образом зависимости амплитуды пульсаций в пограничном слое от начальной амплитуды вводимых возмущений, можно определить амплитуды, при которых происходит отклонение данной зависимости от линейного закона, т. е. начинаются нелинейные процессы (см. [4]). Такой анализ нелинейных процессов является крайне ресурсоемким, поскольку для построения указанной зависимости необходимо провести расчеты в широком диапазоне значений начальных амплитуд, кроме того, он не дает информацию о характеристиках нелинейных процессов.

Биспектральный анализ позволяет сразу установить, присутствуют ли в потоке нелинейные процессы, а также выяснить, какие именно нелинейные взаимодействия имеют место в каждом рассматриваемом случае обтекания, и определить их интенсивность. Ранее биспектральный анализ использовался при обработке экспериментальных данных о нелинейном развитии возмущений в сверхзвуковом пограничном слое на конусе при числе Маха  $M = 6$  [5, 6]. В настоящей работе впервые проводится биспектральный анализ данных численного моделирования нелинейных процессов в гиперзвуковых ударных слоях. Результаты численного моделирования сопоставлены с результатами экспериментов, проведенных в аэродинамической трубе.

**Биспектральный анализ.** Метод биспектрального анализа изложен в работе [7]. Биспектр определяется соотношением  $B(f_1, f_2) = E\{X^*(f_1) \times X^*(f_2) \times X(f_1 + f_2)\}$ , где  $E\{\cdot\}$  — функция математического ожидания;  $X(f)$  — фурье-преобразование оциллограммы сигнала  $x(t)$ ; звездочка означает комплексное сопряжение. В отличие от амплитуды спектра мощности амплитуда биспектра зависит от фазовой связанности волн. Поскольку амплитуда биспектра зависит также от амплитуды волн, обычно он нормируется на амплитуду спектра мощности, в результате чего получается коэффициент бикогерентности:

$$\text{bic}^2(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|^2}{P(f_1)P(f_2)P(f_1 + f_2)}.$$

Здесь  $P(f) = E\{X^*(f) \times X(f)\}$  — спектр мощности. Однако в настоящей работе использовались другие нормировочные коэффициенты:

$$\text{bic}^2(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|^2}{E\{|X(f_1) \times X(f_2)|^2\} \times E\{|X(f_1 + f_2)|^2\}}.$$

Такая нормировка гарантирует, что значение бикогерентности находится в интервале, ограниченном нулем (что соответствует абсолютно независимым волнам) и единицей (что соответствует полностью связанным волнам) [8]. Для получения оптимального соотношения сигнала и шума для коэффициентов бикогерентности необходимо использовать многократное осреднение спектров сигнала. В силу симметрии биспектра (и бикогерентности) представленные в работе графики бикогерентности симметричны относительно линии  $f_1 = f_2$  (подробнее о свойствах симметрии биспектра см. [7]). Для упрощения понимания диаграммы бикогерентности отметим следующее: если на графике в точке пересечения частот  $(f_1, f_2)$  наблюдается пик, то нелинейно-связанными являются волны с частотами  $f_1, f_2$  и  $f_3 = f_1 + f_2$ . Спектры сигнала рассчитывались методом быстрого преобразования Фурье.

**Экспериментальное оборудование и методика измерений.** Эксперименты по измерению пульсаций плотности и давления в ударном слое на пластине проводились в



Рис. 1. Модель с двумя свистками

гиперзвуковой азотной аэродинамической трубе Т-327А Института теоретической и прикладной механики (ИТПМ) СО РАН при числе Маха потока  $M_\infty = 21$ , единичном числе Рейнольдса  $Re_{1\infty} = 6 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$  и температуре торможения  $T_0 = 1200 \text{ К}$ . В качестве модели использовалась пластина трапецевидной формы длиной 240 мм и толщиной 8 мм. Ширина передней кромки составляла 100 мм, задней — 80 мм. Заостренная передняя кромка представляет собой клин с углом при вершине, составляющим  $7^\circ$ , радиус затупления приближенно равен 0,05 мм. Боковые кромки пластины также были клиновидными с углом клина, равным  $20^\circ$ . Контроль температуры поверхности осуществлялся медь-константановой термопарой. Пластина была установлена под нулевым углом атаки к набегающему потоку и ориентирована по его направлению.

Возмущения вводились в ударный слой одним или двумя кососрезными свистками квадратного сечения с углом среза передней кромки, равным  $45^\circ$ . В экспериментах с одиночным свистком свисток располагался под пластиной (на ее оси симметрии вблизи передней кромки). В экспериментах с двумя свистками свистки располагались рядом, симметрично относительно продольной оси пластины (рис. 1). Свистки имели разную глубину канала, поэтому создавали пульсации на двух различных частотах. Вводимые в ударный слой возмущения большой амплитуды могли взаимодействовать. Начальный уровень возмущений, вносимых кососрезными свистками, не контролировался.

Измерения пульсаций давления в ударном слое проводились миниатюрным датчиком пульсаций давления с диапазоном частот до 22 кГц, который перемещался поперек ударного слоя на различных расстояниях от передней кромки пластины вдоль ее оси симметрии.

**Численное моделирование.** Проведено исследование гиперзвукового обтекания плоской бесконечно тонкой пластины длиной  $L = 240 \text{ мм}$ , расположенной под нулевым углом атаки, при числе Маха  $M_\infty = 21$  и умеренном числе Рейнольдса  $Re_L = 1,44 \cdot 10^5$ . Прямое численное моделирование развития возмущений в гиперзвуковом вязком ударном слое на пластине выполнялось с помощью пакета программ [9], созданного в ИТПМ СО РАН на основе решения полных двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса с использованием схем сквозного счета высокого порядка точности. Расчетная область представляла собой прямоугольник, включающий область набегающего потока, ударную волну и вязкий ударный слой на пластине. Часть нижней границы расчетной области совпадала с поверхностью пластины, а высота расчетной области выбиралась таким образом, чтобы

ударная волна, распространяющаяся от передней кромки пластины, не взаимодействовала с верхней границей. Использовалась равномерная сетка с числом ячеек по  $x, y$   $1050 \times 240$  ( $x, y$  — координаты вдоль пластины и перпендикулярно ее поверхности, нормированные на длину пластины).

Сначала выполнялся расчет стационарного течения, затем решалась задача о взаимодействии вязкого ударного слоя с внешними акустическими волнами и (или) локально-периодическими возмущениями типа вдува-отсоса. В первом случае переменные на левой и верхней границах расчетной области задавались в виде суперпозиции стационарного основного течения и одной или нескольких плоских монохроматических звуковых волн, каждая из которых характеризовалась амплитудой  $A$ , углом распространения  $\theta$  и частотой  $f$ . Возмущения типа периодического вдува-отсоса, генерируемые на поверхности тела вблизи передней кромки, моделировались граничным условием для поперечного массового расхода на некотором участке поверхности пластины. После введения возмущений уравнения Навье — Стокса интегрировались до тех пор, пока нестационарное решение не выходило на установившийся периодический режим. (В работе [10], в которой подробно описан данный метод, показано, что он применим при решении задач восприимчивости и устойчивости ударного слоя.) В результате решения задачи получены картины пульсаций плотности и давления в ударном слое в широком диапазоне значений определяющих параметров.

**Результаты исследований.** Амплитуды возмущений, генерируемые в ВУС, зависят от амплитуды начальных возмущений. Информация о такой зависимости необходима при решении задачи управления интенсивностью пульсаций в ударном слое. Исследована зависимость величины пульсаций плотности в ударном слое на верхней границе пограничного слоя от амплитуды  $A$  вводимых возмущений. На основе фурье-анализа этих данных получены амплитуды спектров возмущений плотности. Результаты расчетов показали, что нелинейные процессы в ударном слое при наличии внешних акустических волн возникают при амплитудах начального возмущения  $A > 0,12$ , при этом имеют место насыщение амплитуды пульсаций на вводимой (основной) частоте и быстрый рост первой гармоники (рис. 2, *a*) [4]. В случае возмущений от локального источника вдува-отсоса нелинейность на основной частоте не проявляется вплоть до значения  $A = 1,6$ , тем не менее наблюдается быстрый рост первой гармоники (рис. 2, *б*).

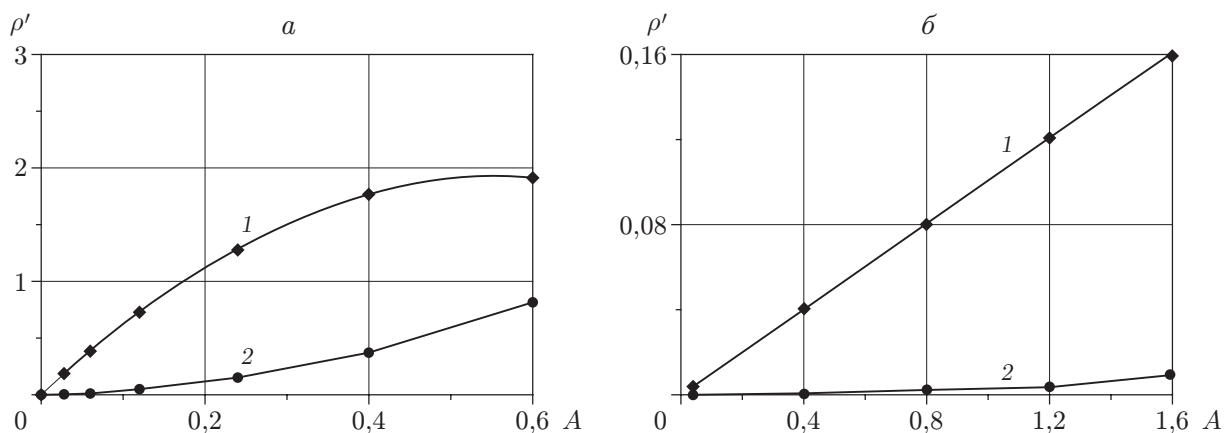


Рис. 2. Зависимости амплитуды пульсаций плотности  $\rho'$  в ВУС в точке  $y = 0,08$  от амплитуды  $A$  начального акустического возмущения (*a*) и возмущения типа вдува-отсоса (*б*) при  $x = 0,5$ :

1 — основная частота  $f = 38,4$  кГц; 2 — первая гармоника

Биспектральный анализ приведенных выше расчетных данных не дал результата: графики бикогерентности показали, что в полученном частотном диапазоне практически все волны взаимодействуют друг с другом. Это обусловлено тем, что спектры бикогерентности чувствительны к фазовой связанности волн. В эксперименте всегда присутствует электрический шум со случайной фазой, поэтому при многократном осреднении в спектрах бикогерентности остаются лишь фазово-связанные волны. В расчетах условия идеальные и отсутствует шум, т. е. волны со случайными фазами. Для устранения указанного недостатка в расчетные данные был добавлен гауссов шум с амплитудой  $A_{ш}$ , составляющей 10 % амплитуды основного сигнала  $A_p$ . Добавление гауссова шума не оказывает влияния на коэффициент бикогерентности, поскольку биспектр гауссова шума равен нулю:

$$A = A_p + A_{ш}, \quad \text{bic}[A] = \text{bic}[A_p] + \text{bic}[A_{ш}], \quad \text{bic}[A_{ш}] = 0$$

( $\text{bic}[\cdot]$  — оператор бикогерентности).

Так как в расчете различие между амплитудой вводимой волны и амплитудами волн с другими частотами составляет около трех-четырех порядков, то даже в случае наличия крайне слабой фазовой связи при нормировании амплитуд биспектров на амплитуды спектров мощности (т. е. при делении амплитуд биспектров на малую амплитуду спектральной составляющей) получаются большие коэффициенты бикогерентности. Добавляя шум, можно существенно (на два-три порядка) увеличить амплитуды волн на неосновных частотах и как следствие избежать искусственного увеличения значений коэффициента бикогерентности.

В расчете временной промежуток после установления стационарного режима выбирался равным 2,5 периода основной волны. При добавлении шума в расчетные данные спектры бикогерентности необходимо было многократно осреднить. Выбранного временного промежутка для этого было недостаточно, поэтому “осциллограмма” пульсаций дублировалась 10 раз и затем “склеивалась” (рис. 3).

После добавления гауссова шума и дублирования начального сигнала был вновь рассчитан коэффициент бикогерентности. На рис. 4 приведены значения коэффициента бикогерентности, полученные для двух начальных амплитуд акустических возмущений. В слу-

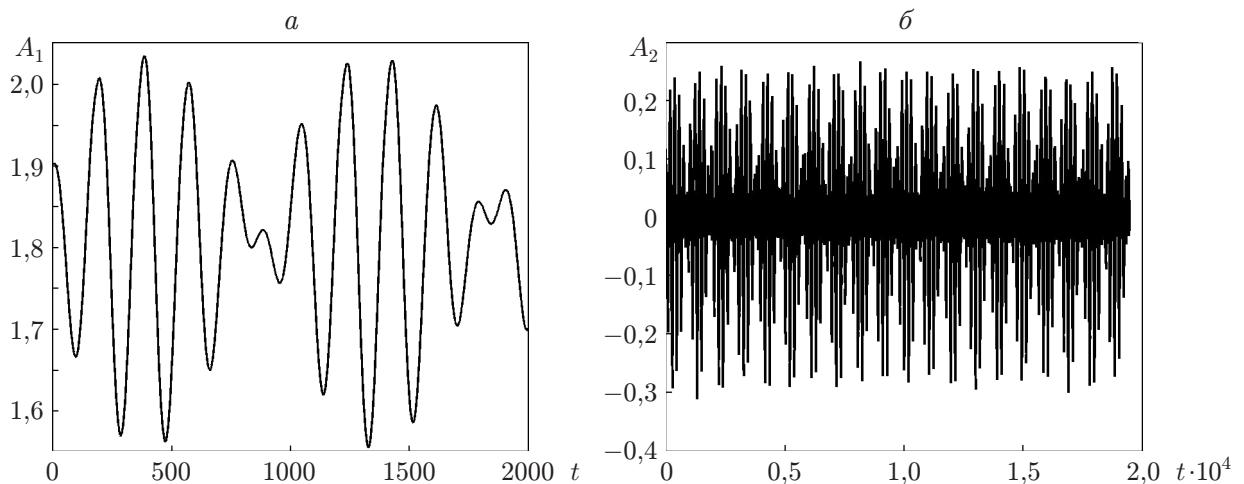


Рис. 3. Зависимости амплитуды пульсаций плотности в ВУС в точке  $y = 0,08$  при  $x = 0,5$  от безразмерного времени  $t$ :

$a$  — амплитуда, полученная в результате расчета;  $b$  — амплитуда, полученная в результате расчета после вычитания среднего значения и дублированная 10 раз с добавлением гауссова шума

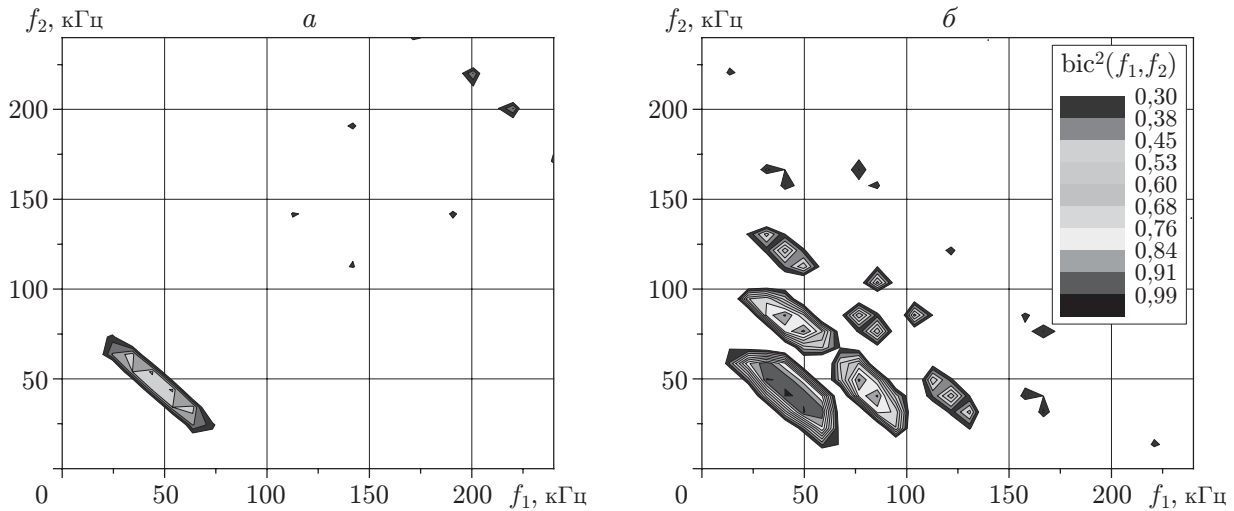


Рис. 4. Диаграммы бикогерентности в случае воздействия внешней акустической волны с частотой  $f = 38,4$  кГц:

$a$  —  $A = 0,03$ ;  $b$  —  $A = 0,24$

чае  $A = 0,03$  на диаграмме бикогерентности имеется пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_0 = 38,4$  кГц,  $f_2 = f_0 = 38,4$  кГц. Соответственно частота третьей взаимодействующей волны равна  $f_3 = f_1 + f_2 = 2f_0$ . Таким образом, за счет нелинейных взаимодействий возникает и растет гармоника основной волны. Иными словами, даже при малой начальной амплитуде ( $A = 0,03$ ) в пограничном слое наблюдаются нелинейные процессы, хотя из рис. 1,  $a$  следует, что при такой амплитуде нелинейных процессов не должно быть. В случае  $A = 0,24$  на диаграмме бикогерентности (см. рис. 4,  $b$ ) имеется несколько пиков: 1)  $f_1 = f_0 = 38,4$  кГц,  $f_2 = f_0 = 38,4$  кГц,  $f_3 = f_1 + f_2 = 2f_0$ ; 2)  $f_1 = 2f_0 = 76,8$  кГц,  $f_2 = f_0 = 38,4$  кГц,  $f_3 = 3f_0$ ; 3)  $f_1 = 3f_0 \approx 115,2$  кГц,  $f_2 = f_0 = 38,4$  кГц,  $f_3 = 4f_0$ ; 4)  $f_1 = 2f_0 = 76,8$  кГц,  $f_2 = 2f_0 = 76,8$  кГц,  $f_3 = 4f_0$ . Таким образом, увеличение начальной амплитуды приводит к усилению нелинейного взаимодействия, при этом помимо генерации гармоники основной волны (пик 1) наблюдается также генерация второй (пик 2) и третьей (пики 3, 4) гармоник.

При исследовании нелинейных взаимодействий в случае воздействия на ударный слой возмущения типа вдува-отсоса также использовался биспектральный анализ. Результаты анализа подтверждают наличие нелинейного взаимодействия, обусловленного появлением гармоники основной волны: на рис. 5,  $a$  четко выделяется пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_0 = 38,4$  кГц и  $f_2 = f_0 = 38,4$  кГц. Значение коэффициента биспектра существенно превышает уровень шума. Это свидетельствует о том, что волны с частотами  $f_1, f_2, f_3 = f_1 + f_2$  нелинейно связаны. В этом случае частота третьей взаимодействующей волны  $f_3 = 76,8$  кГц, т. е. равна частоте первой гармоники  $2f_0$ .

С увеличением начальной амплитуды вводимых возмущений амплитуда основной волны и амплитуда гармоники в ВУС возрастают (см. рис. 5,  $b$ ). Величина пика в точке пересечения частот  $f_1 = 38,4$  кГц,  $f_2 = 38,4$  кГц на диаграмме бикогерентности увеличивается, что свидетельствует о более интенсивном нелинейном взаимодействии, приводящем к росту амплитуды гармоники; кроме того, появляется еще одно слабое взаимодействие ( $f_1 = 38,4$  кГц,  $f_2 = 2f_0 = 76,8$  кГц), что указывает на возникновение второй гармоники:  $f_3 = 3f_0 = 115,2$  кГц.

Для того чтобы определить, насколько точно результаты численного моделирования воспроизводят нелинейные процессы в ударном слое, а также для проверки применимости

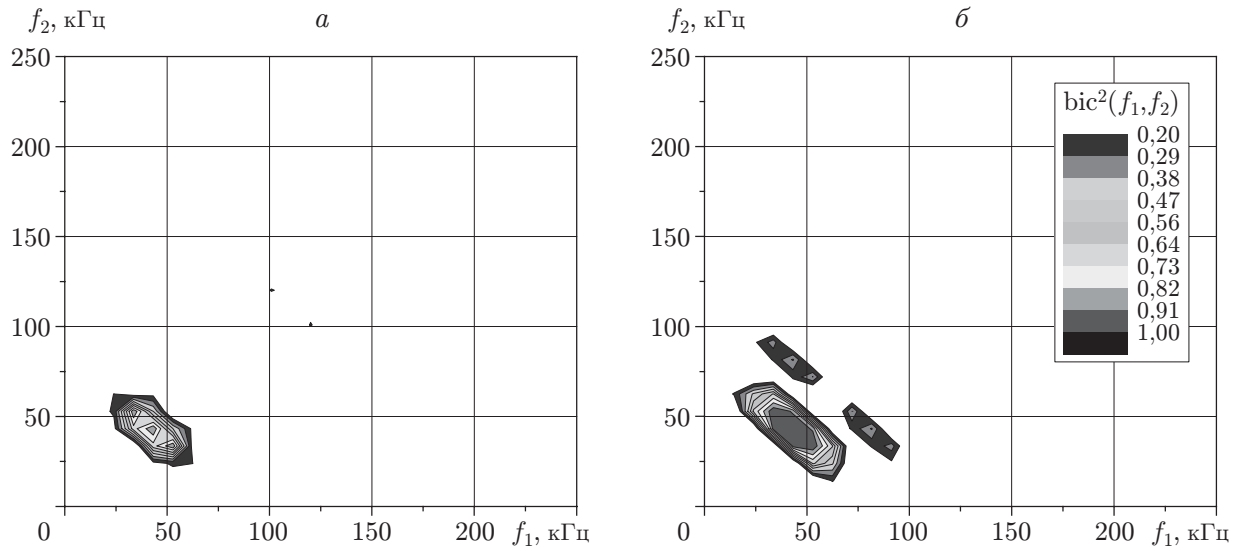


Рис. 5. Диаграммы бикогерентности в случае воздействия локализованного возмущения типа вдува-отсоса с частотой  $f = 38,4$  кГц:  
*a* —  $A = 0,8$ ; *б* —  $A = 1,6$

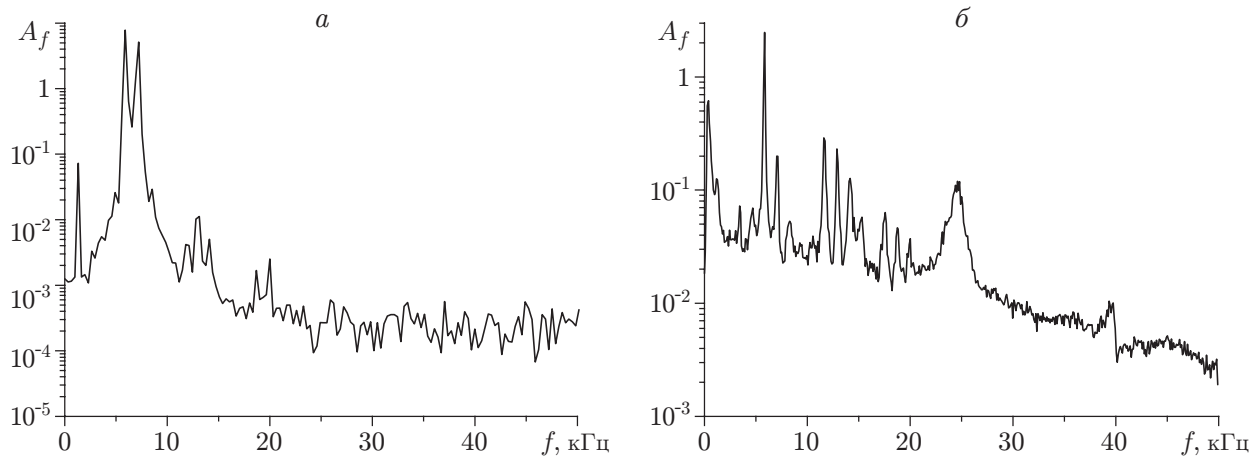


Рис. 6. Фурье-спектры пульсаций плотности в ВУС на верхней границе пограничного слоя в сечении  $x = 0,5$ :  
*a* — данные эксперимента; *б* — результаты расчета

биспектрального анализа расчетных данных проведено сравнение этих данных с результатами, полученными в эксперименте. В эксперименте контролируемые возмущения вводились с помощью двух кососрезных свистков на частотах  $f_{01} = 6$  кГц и  $f_{02} = 7,3$  кГц. В расчете возмущения типа вдува-отсоса также вводились на двух указанных выше частотах с амплитудами  $A_1 = A_2 = 1,0$ . На рис. 6 показаны экспериментальные и расчетные фурье-спектры пульсаций плотности. Четко видны два пика, соответствующие основным частотам  $f_{01} = 6$  кГц,  $f_{02} = 7,3$  кГц, и несколько меньших пиков, соответствующих гармоникам основных волн, а также комбинационным частотам.

Результаты биспектрального анализа нелинейных процессов показывают, что экспериментальные и расчетные диаграммы бикогерентности сопоставимы (рис. 7). Детальное сравнение пиков на диаграммах бикогерентности показывает, что несмотря на визуальное

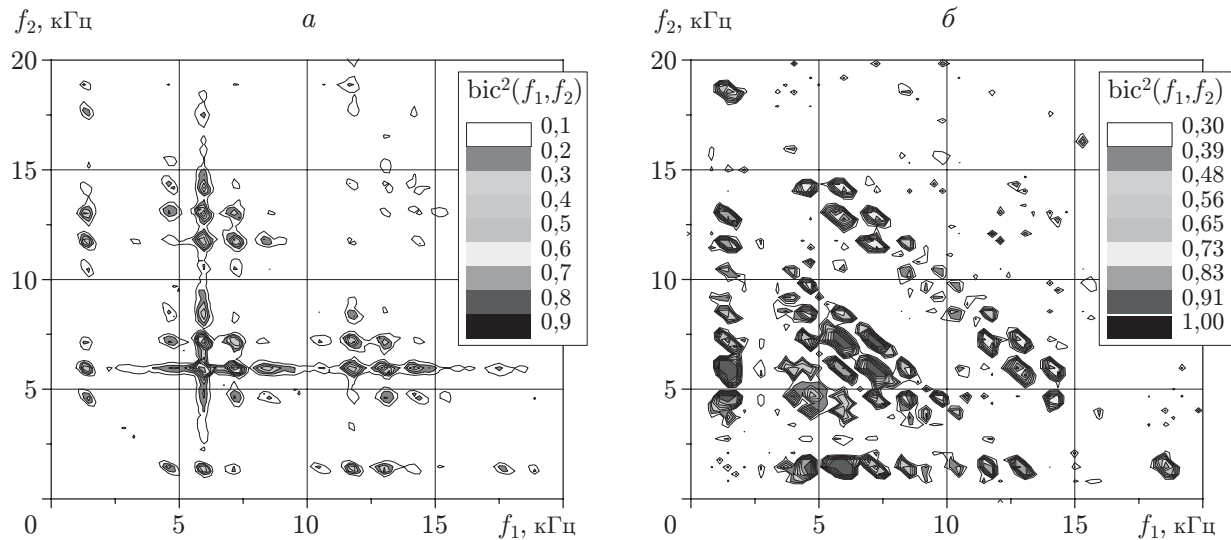


Рис. 7. Диаграммы бикогерентности в случае воздействия двух локализованных возмущений типа вдува-отсоса с частотами  $f_{01} = 6$  кГц,  $f_{02} = 7,3$  кГц, рассчитанные по пульсациям давления, полученным в эксперименте (а) и расчете (б)

различие графиков, нелинейные взаимодействия в эксперименте и расчете одни и те же, например:

- 1) пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_{01} = 6$  кГц,  $f_2 = f_{01} = 6$  кГц,  $f_3 = 2f_{01} = 12$  кГц (генерация гармоники первой основной волны);
- 2) пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_{02} = 7,3$  кГц,  $f_2 = f_{02} = 7,3$  кГц,  $f_3 = 2f_{02} = 14,6$  кГц (генерация гармоники второй основной волны);
- 3) пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_{01} = 6$  кГц,  $f_2 = f_{02} - f_{01} = 1,3$  кГц,  $f_3 = f_{02} = 7,3$  кГц (генерация волны на разностной частоте);
- 4) пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_{01} = 6$  кГц,  $f_2 = f_{02} = 7,3$  кГц,  $f_3 = f_{01} + f_{02} = 13,3$  кГц (генерация волны на суммарной частоте);
- 5) пик в точке пересечения частот  $f_1 = f_{01} + f_{02} = 13,3$  кГц,  $f_2 = f_{02} - f_{01} = 1,3$  кГц,  $f_3 = 2f_{02} = 14,6$  кГц (генерация волны на комбинационной частоте, равной удвоенной частоте второй основной волны).

Различие форм пиков на диаграммах бикогерентности в эксперименте и расчете объясняется неполной тождественностью расчетного эксперимента и экспериментов, проведенных в аэродинамической трубе. В частности, в эксперименте уровень возмущений мог быть меньше, а шум больше, чем в расчете, вследствие чего малые пики на диаграмме бикогерентности исчезли.

**Заключение.** Впервые для выявления нелинейного взаимодействия возмущений в гиперзвуковых ударных слоях выполнен биспектральный анализ расчетных и экспериментальных данных.

Развита методика биспектрального анализа расчетных данных. Эта методика апробирована на задаче нелинейного развития возмущений в гиперзвуковом ударном слое. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Показано, что в случае взаимодействия ВУС с начальными возмущениями, имеющими большую амплитуду одновременно на двух частотах, появляются комбинационные частоты (суммарные и разностные) волн, взаимодействующих друг с другом.



## ЛИТЕРАТУРА

1. **Maslov A. A., Kudryavtsev A. N., Mironov S. G., et al.** Wave processes in a viscous shock layer and control of fluctuations // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 650. P. 81–118.
2. **Morkovin M.** Bypass transition to turbulence and research desiderata // *Transition in turbines: Proc. of a symp., Cleveland (Ohio), May 15–16, 1984 / Ed. by R. Graham.* Washington: NASA, 1985. P. 161–199.
3. **Fedorov A.** Transition and stability of high-speed boundary layers // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. V. 43. P. 79–95.
4. **Маслов А. А., Поплавская Т. В., Цырюльников И. С.** Нелинейные волновые процессы в гиперзвуковом ударном слое // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2010. № 4. С. 43–50.
5. **Шиплюк А. Н., Бунтин Д. А., Маслов А. А., Чокани Н.** Нелинейные механизмы начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях // *ПМТФ.* 2003. Т. 44, № 5. С. 64–71.
6. **Kimmel R. L., Kendall J. M.** Nonlinear disturbances in a hypersonic boundary layer. N. Y., 1991. (Paper / AIAA; N 91-0320).
7. **Никиас Х. Л., Рагувер М. Р.** Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов // *Тр. Ин-та инж. электротехники и радиоэлектроники.* 1987. Т. 75, № 7. С. 5–30.
8. **Chokani N.** Nonlinear evolution of Mack modes in a hypersonic boundary layer // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17. P. 014102-1–014102-13.
9. **Кудрявцев А. Н., Поплавская Т. В., Хотяновский Д. В.** Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // *Мат. моделирование.* 2007. Т. 19, № 7. С. 39–55.
10. **Кудрявцев А. Н., Миронов С. Г., Поплавская Т. В., Цырюльников И. С.** Экспериментальное исследование и прямое численное моделирование развития возмущений в вязком ударном слое на плоской пластине // *ПМТФ.* 2006. Т. 47, № 5. С. 3–15.

*Поступила в редакцию 30/V 2011 г.*

---