

7. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
8. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., «Наука», 1966.
9. И. Б. Светличный, А. Д. Марголин, П. Ф. Похил. ФГВ, 1971, 7, 2.
10. З. Р. Горбис. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М., «Энергия», 1970.
11. С. С. Кутателадзе. Основы теории теплообмена. М., Машгиз, 1957.
12. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. В сб. Тепло-массоперенос. Т. 2. Минск, «Наука и техника», 1968.
13. П. К. Конаков. Теория подобия и ее применение в теплотехнике. М., ГЭИ, 1959.
14. А. А. Ковальский, С. С. Хлевной, В. Ф. Михеев. ФГВ, 1967, 3, 4.
15. А. Г. Мержанов, А. К. Филоненко. Изв. АН СССР, ОХН, 1963, 3.
16. В. М. Мальцев, П. Ф. Похил. ПМТФ, 1963, 2.
17. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М., «Наука», 1973.
18. А. А. Зенин, О. И. Лейпунский и др. Докл. АН СССР, 1966, 169.

УДК 536.46+517.9

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАМЕНИ В ТВЕРДОФАЗНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПОТЕРЬ

К. Г. Шкадинский, М. И. Лебедева
(Черноголовка)

Распространение фронта горения в реальных условиях сопровождается теплопотерями в окружающую среду, которые могут привести к срыву горения. Впервые это явление теоретически было рассмотрено Я. Б. Зельдовичем [1].

По мере роста теплопотерь нарушается одномерность структуры фронта, но несмотря на это, влияние теплопотерь на процесс распространения пламени изучают обычно на одномерной модели, рассматривая систему уравнений:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho QW(T, \eta) - L(T - T_n); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = W(T, \eta), \quad (2)$$

где T_n — температура окружающей среды; η — глубина превращения; L — эффективный коэффициент теплообмена; $W(T, \eta)$ — скорость химической реакции; Q — тепловой эффект реакции; ρ — плотность; c — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности. Такое упрощение приводит к максимально простой модели, причем T и η можно трактовать как усредненные с некоторым весом по сечению величины [2].

В общем случае систему (1)–(2) решают численно, используя обычно следующие два подхода. Первый заключается в решении нестационарной системы (1)–(2) до установления движущегося с постоянной скоростью фронта горения [3], второй — в нахождении решения в форме бегущей волны. Достоинства первого метода — отсутствие принципиальных затруднений при его реализации и возможность непосредственного решения вопроса об устойчивости фронта. Второй подход хотя и не позволяет непосредственно установить устойчивы ли полученные решения, но является не столь громоздким и требует существенно меньше машинного времени по сравнению с первым. Именно поэтому второй метод мог получить большее распространение, если бы

при реализации его не возникала необходимость довольно сложного анализа поля интегральных кривых системы уравнений и особых точек.

В данной работе для решения задачи применяется второй подход и анализируются результаты, полученные с его помощью для случая взаимодействия компонентов через слой продуктов [4], т. е. для кинетической зависимости вида

$$W(T, \eta) = \begin{cases} ke^{-m\eta} \eta^{-n} (1-\eta)^\alpha \exp(-E/RT) & \text{при } \eta < 1, T > T_n + \epsilon; \\ 0 & \text{при } \eta \geq 1, T \leq T_n + \epsilon, \end{cases} \quad (3)$$

где ϵ — некоторый малый положительный температурный интервал; m, n, α — кинетические параметры.

Кроме рассматриваемой задачи аналогичная методика может быть использована для изучения стадийного горения с эндотермическими стадиями.

Исследование и решение системы (1) — (3) проводятся в следующих безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad \Theta_n = \frac{E}{RT_*^2} (T_n - T_*), \quad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad \xi = \frac{x}{x_*}, \\ \beta &= \frac{RT_*}{E}; \quad \gamma = \frac{cRT_*^2}{QE}; \quad t_* = \frac{\gamma}{k \exp(-E/RT_*)}; \\ x_*^2 &= \frac{t_* \lambda}{c\rho}; \quad \kappa = \frac{Lt_*}{c\rho}; \quad z = \xi + u\tau; \quad y = \frac{d\Theta}{dz}, \end{aligned}$$

где T_* — некоторая масштабная температура; u — безразмерная скорость горения.

Таким образом, скорость стационарного фронта горения и его структура будут определяться из решения следующей стационарной задачи:

$$\frac{dy}{d\Theta} = u - \frac{\varphi(\Theta, \eta) - \kappa(\Theta - \Theta_n)}{y}, \quad (4)$$

$$\frac{d\eta}{d\Theta} = \gamma \frac{\varphi(\Theta, \eta)}{uy}, \quad (5)$$

$$\varphi(\Theta, \eta) = \begin{cases} e^{-m\eta} \eta^{-n} (1-\eta)^\alpha \exp[\Theta/(1+\beta\Theta)] & \text{при } \eta < 1, \Theta > \Theta_n + \delta, \\ 0 & \text{при } \eta \geq 1, \Theta \leq \Theta_n + \delta, \end{cases} \quad (6)$$

где δ — малое положительное число;

$$\Theta = \Theta_n, \quad y = 0, \quad \eta = \eta_n \geq 0; \quad (7)$$

$$\Theta = \Theta_n, \quad y = 0.$$

Анализ математической модели пламени для реакции нулевого порядка

Для разработки алгоритма численного решения задачи (4) — (7) полезно предварительно рассмотреть математическую модель пламени для реакции нулевого порядка

$$\frac{dy}{d\Theta} = u - \frac{\varphi(\Theta) - \kappa(\Theta - \Theta_n)}{y}; \quad (8)$$

$$\frac{d\eta}{d\Theta} = \gamma \frac{\varphi(\Theta)}{uy}, \quad (9)$$

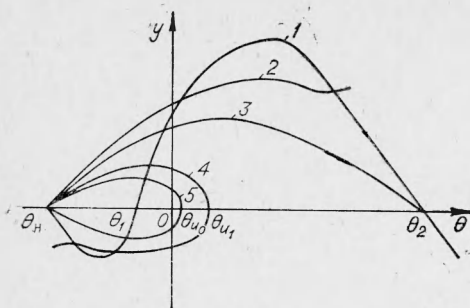


Рис. 1. Семейство I интегральных кривых $y(\Theta, u)$ уравнения (8) ($0 < u_1 < u_0 < u_2$).
 1 — $y = [\varphi(\Theta) - \kappa(\Theta - \Theta_n)]/u_1$; 2 — $y(\Theta, u_2)$; 3 — $y(\Theta, u_0)$; 4 — $y(\Theta, u_1)$; 5 — $y(\Theta, 0)$.

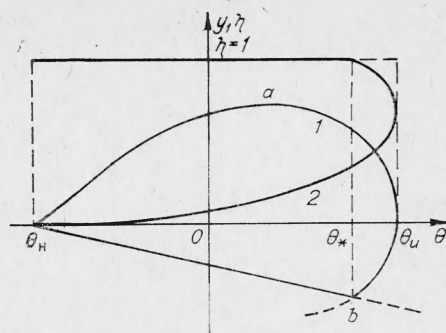


Рис. 2. Предполагаемый вид решения задачи (8) — (11).
 1 — $y(\Theta, u')$; 2 — $\eta(\Theta, u')$.

где

$$\varphi(\Theta) = \begin{cases} \exp[\Theta/(1+\beta\Theta)] & \text{при } \eta < 1, \Theta > \Theta_n + \delta, \\ 0 & \text{при } \eta \geq 1, \Theta \leq \Theta_n + \delta, \end{cases} \quad (10)$$

$$\Theta = \Theta_n, y = 0, \eta = 0, \quad (11)$$

$$\Theta = \Theta_n, y = 0.$$

Задача (8) — (11) содержит все особенности задачи (4) — (7), но существенно проще для математического анализа.

При достаточно больших значениях параметра κ кривая $y = \frac{\varphi(\Theta) - \kappa(\Theta - \Theta_n)}{u}$ расположена ниже оси Θ и, следовательно, задача (8) — (11) в этом случае не имеет решения. Поэтому представляет интерес рассматривать только те значения κ , для которых график нулевой изоклины уравнения (8) имеет вид, изображенный на рис. 1. В этом случае уравнение (8) имеет три особые точки. Их исследование показывает, что точки $\Theta = \Theta_n, y = 0$; $\Theta = \Theta_2, y = 0$ — седловые, и наклоны сепаратрис в этих точках соответственно равны:

$$\sigma_{1,2} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + \kappa};$$

$$\mu_{1,2} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} + \kappa - \varphi'(\Theta_2)}.$$

Точка $\Theta = \Theta_1, y = 0$ является узлом, если $\frac{u^2}{4} \geq \varphi'(\Theta_1) - \kappa$, или фокусом, если $\frac{u^2}{4} < \varphi'(\Theta_1) - \kappa$.

Рассмотрим на интервале $[\Theta_n, \Theta_2]$ семейство I интегральных кривых уравнения (8), выходящих из точки $\Theta = \Theta_n, y = 0$ с положительным наклоном и соответствующих различным значениям параметра u при фиксированном значении параметра κ . При этом не будем пока учитывать, что $\varphi(\Theta) \equiv 0$ при $\eta \geq 1$.

Можно показать, что интегральные кривые семейства I обладают следующими свойствами:

1. Каждая интегральная кривая $y(\Theta, u)$ семейства I единственна всюду в области своего существования, заключенной в интервале $[\Theta_n, \Theta_2]$, и непрерывно зависит от параметров u, κ .

2. При $u=0$ решение уравнения (8), проходящее через точку $(\Theta_n, 0)$, имеет вид

$$y = \pm \sqrt{2 \int_{\Theta_n}^{\Theta} [\kappa(\Theta - \Theta_n) - \varphi(\Theta)] d\Theta}.$$

3. Любые две интегральные кривые семейства I не пересекаются между собой на интервале (Θ_n, Θ_2) и, если $u_1 > u_2$, $y(\Theta, u_1) > y(\Theta, u_2)$ при $y > 0$ и $y(\Theta, u_1) < y(\Theta, u_2)$ при $y < 0$; $\Theta_{u_1} > \Theta_{u_2}$, если положительные ветви кривых $y(\Theta, u_1)$ и $y(\Theta, u_2)$ пересекают ось Θ соответственно в точках Θ_{u_1} и Θ_{u_2} .

4. Семейство I содержит только одну замкнутую интегральную кривую; она соответствует $u=0$.

5. Существует u_0 такое, что интегральная кривая $y(\Theta, u_0)$ проходит через точку $(\Theta_2, 0)$. При $u > u_0$ интегральные кривые семейства I ось Θ не пересекают.

Пусть при некотором $u=u'$ существует решение задачи (8) — (11) $y=y(\Theta, u')$, $\eta=\eta(\Theta, u')$. Тогда возможны два случая: либо $\eta(\Theta, u') < 1$ всюду при $\Theta \geq \Theta_n + \delta$, либо в некоторой точке $\Theta_* < \Theta_n + \delta$ функция $\eta(\Theta, u')$ становится равной единице, и решение состоит из двух частей (рис. 2). Интегральная кривая $\Theta_n a b$ — решение уравнения (8) при $\varphi(\Theta) \neq 0$, отрезок $\Theta_n b$ — решение (8) при $\varphi(\Theta) = 0$, соответствующее наклону $\delta_2: y = \left(\frac{u'}{2} - \sqrt{\frac{(u')^2}{4} + \kappa}\right)(\Theta - \Theta_n)$. Согласно свойству 4 возможен только второй случай.

Возьмем вдоль каждой интегральной кривой семейства I интеграл

$$I(u) = \gamma \int_{\Theta_n}^{\Theta_x} \frac{\varphi(\Theta)}{uy} d\Theta = \gamma \int_{\Theta_n}^{\Theta_u} \frac{\varphi(\Theta)}{uy_+} d\Theta - \gamma \int_{\Theta_n}^{\Theta_u} \frac{\varphi(\Theta)}{uy_-} d\Theta,$$

где y_+ — положительная, а y_- — отрицательная ветви кривой $y(\Theta, u)$; Θ_x — точка пересечения кривой $y(\Theta, u)$ с соответствующим лучом

$y = \left(\frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} + \kappa}\right)(\Theta - \Theta_n)$. Искомому решению соответствует u , для которого $I(u) = 1$. Для функции $I(u)$ легко показать, что она существует и непрерывна на интервале $(0, u_0)$, а при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow u_0$ $I(u) \rightarrow \infty$ и, следовательно, имеет на этом интервале, по крайней мере, один минимум. На рис. 3 схематично изображены графики $I(u)$ для различных значений параметра κ , полученные с помощью ЭВМ.

При $\kappa=0$ $I(u) = \gamma(\Theta_u - \Theta_n)$ и, следовательно, монотонно возрастает с ростом u , поскольку, как это нетрудно показать, Θ_u — монотонно возрастающая функция u . Известно [5], что при $\kappa=0$ задача (8) — (11) имеет единственное решение, т. е. существует $u_{ад}$ такое, что $I(u_{ад}) = 1$. Вследствие непрерывной зависимости интегральных кривых уравнения (8) от параметров, функция $I(u)$ непрерывно зависит от параметра κ . Поэтому найдутся такие значения $\kappa > 0$, что соответствующие им функции $I(u)$ пересекут прямую $I=1$. Следовательно, в зависимости от величины κ задача (8) — (11) имеет либо два решения, либо одно, либо вообще не имеет решения (см. рис. 3).

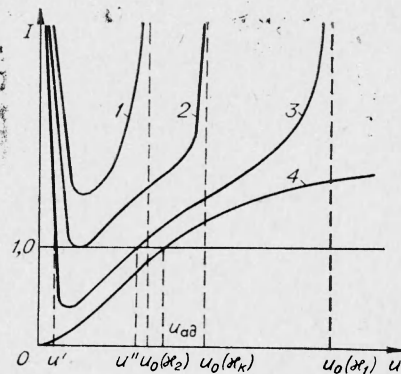


Рис. 3. Вид функции $I(u)$ при различных значениях κ ($0 < \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$). 1 — $I(u, \kappa_2)$; 2 — $I(u, \kappa_k)$; 3 — $I(u, \kappa_1)$; 4 — $I(u, 0)$.

Алгоритм численного решения задачи (4)—(7)

Из сказанного выше следует, что при достаточно малых κ , например при $\kappa = \kappa_1$ (см. рис. 3), семейство интегральных кривых $y(\Theta, u)$ системы (8)—(10) имеет вид, изображенный на рис. 4. Интегральные кривые состоят из двух частей, являющихся соответственно решениями

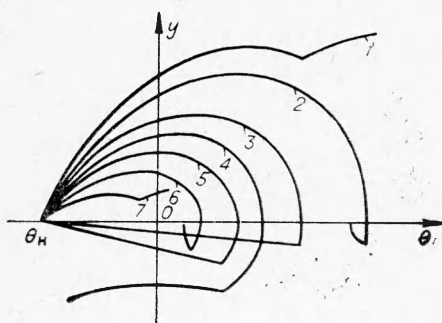


Рис. 4. Семейство интегральных кривых $y(\Theta, u)$ системы (8)—(10)

1, 2 — $u > u''$ (тип A); 3 — u'' ; 4 — $u' < u < u''$ (тип B); 5 — u' ; 6, 7 — $u < u' < u''$ (тип A).

уравнения (8) при $\varphi(\Theta) \neq 0$, $y(\Theta_n, u) = 0$ и при $\varphi(\Theta) = 0$, $y(\Theta_*, u) = y_*$, где Θ_* — точка, в которой $\eta(\Theta_*, u) = 1$. Отнесем интегральную кривую этого семейства к типу A, если она при $\Theta > \Theta_n$ либо всюду неотрицательна, либо пересекает ось Θ больше одного раза, и к типу B, если при $\Theta > \Theta_n$ кривая пересекает ось Θ один раз, и отрицательная ветвь ее не входит в точку $(\Theta_n, 0)$. Выше показано, что существуют две граничные интегральные кривые $y(\Theta, u')$ и $y(\Theta, u'')$, $u' \leq u''$, разделяющие семейства кривых типа A и B. Для них $I(u') = I(u'') = 1$. Кривые типа A соответствуют значениям $u > u''$ и $u < u'$, а B — значениям $u' < u < u''$ (см. рис. 3). Заметим, что с увеличением теплотеря u'' убывает, а u' растет. При $\kappa = \kappa_k$ $u' = u''$, а при $\kappa \geq \kappa_k$ отсутствуют интегральные кривые типа B.

Следовало ожидать, и численные расчеты подтвердили, что для более сложной кинетической функции $\varphi(\Theta, \eta)$ интегральные кривые $y(\Theta, u)$ системы (4)—(6) будут вести себя подобным образом. В основу алгоритма решения задачи (4)—(7) положена идея разделения интегральных кривых на два типа. Интервал между значениями u , которым соответствуют интегральные кривые различных типов, сужается до требуемой точности.

Таким образом, определение структуры и скорости фронта горения при наличии теплотеря сводится к вычислению интегральных кривых, расчет которых имеет некоторые особенности. Отметим, что данный алгоритм требует существенно меньше машинного времени, чем нестационарный метод [3].

Обсуждение результатов счета

В работе [1] показано, что для газов существует критическая величина теплотеря, превышение которой приводит к срыву горения. Было показано, что значение скорости на пределе горения в \sqrt{e} раз меньше скорости горения в адиабатических условиях, а максимальное значение температуры во фронте горения меньше адиабатического на один характерный интервал $\frac{RT_\Gamma^2}{E}$.

При взаимодействии компонентов через слой продукта реакции из-за особенности функции тепловыделения структура стационарного фронта пламени имеет для таких систем специфические свойства. В работе [4] показано, что следует различать слабые и сильные зависимости кинетической функции от глубины превращения. В случае сильных кинетических зависимостей зона наибольшей скорости тепловыделения приходится на температуры, существенно меньшие адиабатической температуры горения. Кроме того, в этом случае имеется зна-

чительная зона догорания. Отмеченные особенности показывают, что для таких систем выводы работы [1] следует использовать осторожно. В данной работе рассмотренным выше способом задача (4) — (7) была решена численно как для слабых, так и для сильных кинетических зависимостей. В результате расчетов определялась функция $u(\kappa)$ (рис. 5) и структура фронта соответственно для $u'(\kappa)$ и $u''(\kappa)$. Отметим, что согласно [1], меньшее решение $u'(\kappa)$ отвечает неустойчивому режиму, который в действительности не осуществляется.

Специфической особенностью сильных кинетических зависимостей является недогорание, тогда как для слабых осуществляется режим полного превращения (рис. 6), причем в последнем случае даже на пределе существования фронта горения глубина превращения становится тождественно равной единице. В случае сильных зависимостей глубина превращения стремится к некоторой величине $\eta_k < 1$. Естественно предположить, что вследствие непрерывной зависимости решения системы (1) — (2) от параметров m, n, α при некоторых промежуточных значениях этих параметров глубина превращения асимптотически стремится к единице.

Из таблицы видно, что и для сильных, и для слабых кинетических зависимостей оказывается справедливым вывод Я. Б. Зельдовича относительно значения критической скорости горения: $(u_{ад}/u_{кр}) \approx \sqrt{e}$. Но установленная в [1] связь между максимальными температурами пламени в адиабатических условиях T_r и на пределе распространения фронта T_{mk}

$$T_r - T_{mk} \approx \frac{RT_r T_{mk}}{E}$$

имеет место только в случае слабых зависимостей. Для сильных зависимостей аналогичную связь можно установить между температурами, соответствующими максимуму скорости тепловыделения, поскольку, как видно из таблицы,

$$\frac{W_{мад}}{W_{mk}} \approx e,$$

где $W_{мад}$ и W_{mk} — максимальные скорости тепловыделения при $\kappa=0$ и $\kappa=\kappa_k$ соответственно. Для функции $W(T, \eta)$ вида (3) при $n=\alpha=0, m>0$ легко получить связь

$$T_{pад} - T_{pкр} \approx RT_{pад} T_{pкр} [1 + m(\eta_{ад} - \eta_{кр})]/E,$$

где $T_{pад}, \eta_{ад}$ и $T_{pкр}, \eta_{кр}$ — температуры и глубины превращения, при которых достигает максимума функция $W(T, \eta)$ при $\kappa=0$ и $\kappa=\kappa_k$ соответственно.

В заключение отметим, что данные работы [3] и полученные в настоящей работе результаты согласуются между собой и, главное, дополняют друг друга. Используя предложенные в этих работах подходы к решению задачи, можно не только определить пределы распространения пламени, но и выяснить, в какой мере неустойчивость стационарного горения влияет на них.

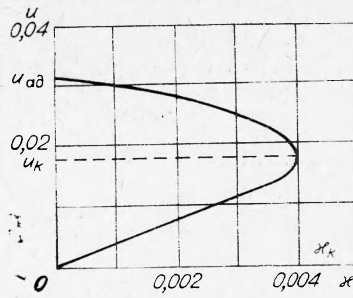


Рис. 5. Зависимость скорости горения от величины теплопотерь ($\theta_n = -5; \beta = 0,19; \gamma = 0,1; \eta_n = 0,01; m = 5; n = \alpha = 0$).

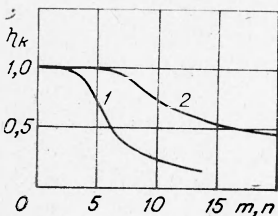


Рис. 6. Зависимость конечной глубины превращения на пределе распространения пламени от вида кинетической функции $\varphi(\theta, \eta)$ ($\theta_n = -5; \beta = 0,19; \gamma = 0,1; \eta_n = 0,01$).

1 — $\eta_k(n)$ при $m = \alpha = 0$; 2 — $\eta_k(m)$ при $n = \alpha = 0$.

Соотношения между характеристиками фронта горения в адиабатических условиях и на пределе распространения пламени в зависимости от вида кинетической функции $\varphi(\Theta, \eta)$ ($\Theta_n = -5$; $\beta = 0,19$; $\gamma = 0,1$; $\eta_n = 0,01$; $\alpha = 0$)

Параметры	$m=0, n=1$	$m=5, n=0$	$m=10, n=0$	$m=20, n=0$
$\frac{u_{ад}}{u_k \sqrt{e}}$	1,08	1,05	0,96	1,01
$\frac{(T_r - T_{mk}) E}{RT_r T_{mk}}$	1,03	1,28	2,68	4,65
$\frac{W_{мад}}{W_{mk} e}$	0,89	0,84	0,79	0,86
$\frac{(T_{p_{ад}} - T_{p_{кр}}) E}{RT_{p_{ад}} T_{p_{кр}} [1 + m(\eta_{ад} - \eta_{кр})]}$	0,94	0,85	0,80	0,94

Поступила в редакцию
30/IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1941, 11, 1.
2. В. В. Барзыкин, С. И. Худяев. Докл. АН СССР, 1966, 169, 6.
3. А. П. Алдушин, Т. М. Мартемьянова и др. ФГВ, 1973, 9, 5.
4. А. П. Алдушин, Т. М. Мартемьянова и др. ФГВ, 1972, 8, 2.
5. А. П. Алдушин. ПМТФ, 1974, 3.

УДК 662.311.1+536.463

ГОРЕНИЕ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СМЕСЕЙ С БЫСТРОГОРЯЩИМИ КОМПОНЕНТАМИ

А. Е. Фогельзанг, С. М. Колясов, Б. С. Светлов, В. Я. Аджемян
(Москва)

Модельные смеси, исследованные в настоящее время, содержат в качестве окислителя вещества или неспособные к горению, или горящие с малой скоростью [1, 2]. Горючие, использовавшиеся в таких смесях, как правило, неспособны к самостоятельной газификации. Также известно, что если одно из составляющих двойной композиции горит быстро, то при определенном размере частиц другого компонента скорость горения смеси определяется главным образом скоростью превращения быстрогорящего вещества, хотя количество его может быть очень малым [3]. Это дает основания полагать, что закономерности горения составов, содержащих быстрогорящие окислитель или горючее, могут отличаться от закономерностей горения смесей, исследованных к настоящему времени [1, 2]. Поэтому представляло интерес рассмотреть горение составов с окислителем и горючим, способными к самостоятельной газификации с большой скоростью.

В качестве быстрогорящего горючего была выбрана перекись бензоила, скорость горения которой при давлении 1 и 100 ат составляет 0,3 и 6,2 см/с соответственно. Прототипами обычных горючих, не спо-