

УДК 532.5; 527; 522

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

Д. Г. Ахметов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: akhmetov@hydro.nsc.ru

Представлена полуэмпирическая модель формирования вихревого кольца при истечении импульсной затопленной струи из круглого отверстия, получены формулы для определения параметров вихревого кольца в зависимости от условий его образования. Показано, что расчетные зависимости характеристик вихревого кольца от критериев, определяющих процесс образования вихря, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: вихревое кольцо, истечение затопленной струи.

Введение. Исследования вихревых колец, являющихся одним из видов вихревых движений жидкости и газа, проводятся в течение более ста лет. Как известно, вихревое кольцо представляет собой тороидальный объем завихренной жидкости, который движется в окружающей среде перпендикулярно плоскости кольца [1]. Движение жидкости осесимметричное, вектор завихренности (ротор скорости) в торе направлен вдоль окружностей, соосных круговой оси тора. Поперечное сечение тонких вихревых колец по форме близко к кругу. Вместе с тороидальным вихревым кольцом движется некоторый объем жидкости, охватывающий кольцо и имеющий форму, близкую к форме сплюснутого в направлении движения кольца эллипсоида вращения (рис. 1). Этот замкнутый объем жидкости называется атмосферой вихря. В течение длительного времени представления о структуре и законах движения вихревых колец основывались на математических моделях вихревого кольца, разработанных с использованием схемы идеальной жидкости [1–3]. Экспериментальные исследования позволили получить более достоверную информацию о структуре и процессах формирования реальных вихревых колец [4–7].

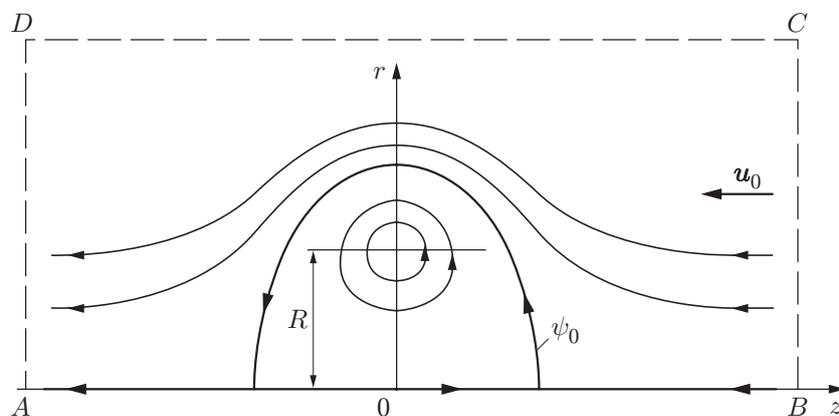


Рис. 1. Картина линий тока вихревого кольца:

ψ_0 — линия тока, ограничивающая атмосферу вихря; $ABCD$ — контур интегрирования для определения циркуляции вихревого кольца

Знание законов формирования вихревого кольца необходимо для получения вихревых колец с заданными характеристиками и разработки методов расчета параметров вихревого кольца в зависимости от условий его образования. Вихревые кольца могут быть получены разными способами. Один из способов создания вихревого кольца состоит в следующем: погруженный в жидкость плоский круглый диск резким толчком приводится в движение в направлении, перпендикулярном его плоскости, и затем мгновенно удаляется из жидкости. Вихревые кольца такого рода, точнее, полукольца можно наблюдать, например, на поверхности кофе в чашке при быстром движении наполовину погруженной в него чайной ложки. Путем простых рассуждений в [8] получены формулы для оценки параметров образующегося при движении диска вихревого кольца в зависимости от радиуса и скорости диска. Однако такой способ генерации вихревых колец можно рассматривать скорее как мысленный эксперимент или как способ получения вихревых колец лишь для качественных исследований, так как в условиях эксперимента практически невозможно обеспечить контролируемое движение и последующее удаление диска из жидкости без возмущения возникающего при этом течения. Поэтому вихревые кольца получают в основном другим способом — при истечении затопленной струи конечной длины из круглого отверстия или из открытого конца цилиндрической трубы.

Теоретический расчет параметров вихревых колец, образующихся при истечении затопленной струи, является более сложной задачей. Ранее эта задача уже привлекала внимание ряда исследователей [9, 10]. В работе [9] рассмотрена модель формирования вихревого кольца из цилиндрической вихревой пелены конечной длины в неограниченной жидкости. Однако эта модель не соответствует реальной картине образования вихревого кольца, так как при истечении струи цилиндрическая пелена не возникает, а сразу начинается процесс сворачивания вихревой пелены в тороидальную спираль и формируется вихревое кольцо. В работе [10] предложена физически более обоснованная модель формирования вихревого кольца. В [10] на основе законов сохранения импульса, энергии и дополнительных предположений о распределении циркуляции в ядре вихря определены изменения некоторых параметров вихревого кольца в процессе истечения струи. Эта модель дает качественно правильное представление о динамике формирования и эволюции некоторых характеристик вихревого кольца при истечении струи. Однако при выводе формул используется закон сохранения энергии без учета диссипации части энергии струи в процессе формирования вихря. Не учитывается также, что импульс струи не полностью трансформируется в импульс вихревого кольца. Поэтому имеющиеся формулы не позволяют получить достаточно точные количественные оценки параметров сформировавшегося вихревого кольца.

Постановка задачи. Ниже представлена модель формирования вихревого кольца при истечении затопленной струи, основанная на более корректном применении законов сохранения, и получены хорошо согласующиеся с экспериментальными данными формулы для определения почти всех характеристик вихревого кольца. Из результатов экспериментальных исследований структуры и параметров вихревых колец, образующихся при истечении затопленной струи с постоянной скоростью V_0 в течение конечного промежутка времени T из цилиндрического сопла радиусом R_0 и длиной l , следует, что формирование вихревого кольца определяется в основном двумя безразмерными критериями [4]:

$$L_* = V_0 T / R_0, \quad \text{Re} = V_0 R_0 / \nu. \quad (1)$$

Здесь L_* — безразмерная длина струи (или продолжительность истечения струи); Re — число Рейнольдса струи; ν — кинематическая вязкость среды.

Структура вихревого кольца существенно зависит от распределения завихренности, однако согласно данным работы [4] структура сформировавшегося турбулентного вихревого кольца упрощенно может быть охарактеризована конечным числом параметров:

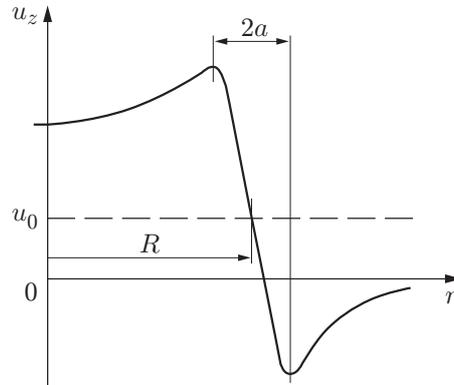


Рис. 2. Распределение скорости в плоскости вихревого кольца

радиусом кольца R , радиусом поперечного сечения завихренного ядра вихря a , циркуляцией Γ , поступательной скоростью u_0 , величиной импульса P и энергией E . В работе [4] параметры вихревого кольца определены по результатам измерения поля скорости с помощью двух термоанемометрических датчиков, установленных на пути движения вихря на некотором расстоянии от выходного сечения сопла, где процесс формирования вихревого кольца можно считать завершенным. Следует отметить, что в экспериментах большинство указанных параметров можно определить без детального анализа полной картины распределений поля скорости или завихренности. Поступательная скорость u_0 вихревого кольца определяется путем визуализации вихря и фоторегистрации его движения в зависимости от времени. Геометрические параметры R и a определяются по распределению скорости u в плоскости вихревого кольца ($z = 0$).

На рис. 2 показано распределение скорости u в плоскости вихревого кольца в системе координат, в которой вихрь движется со скоростью u_0 относительно покоящейся на бесконечности жидкости. Распределение скорости можно представить в связанной с вихрем системе координат, если на рис. 2 в качестве оси r принять штриховую линию $u = u_0$. В этой системе расстояние от начала координат до точки пересечения кривой $u(0, r)$ с осью абсцисс определяет радиус вихревого кольца R . Линейный участок кривой $u(0, r)$ в окрестности точки $r = R$ соответствует завихренному ядру вихря, расстояние $2a$ вдоль оси r между точками максимума и минимума на концах линейного участка кривой можно принять в качестве поперечного размера (диаметра) ядра вихря.

Циркуляция скорости $\Gamma = \oint u \, dl$ вихревого кольца определяется интегрированием распределения скорости по замкнутому прямоугольному контуру $ABCD$, сторона AB которого совпадает с осью симметрии вихревого кольца (см. рис. 1). Если размеры прямоугольника принять достаточно большими, то в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится, скорость потока на сторонах BC , CD и DA прямоугольника равна нулю, и для вычисления циркуляции достаточно проинтегрировать распределение скорости только вдоль оси симметрии (вдоль линии AB). Предполагая, что поступательная скорость вихревого кольца u_0 за время регистрации распределения скорости на оси симметрии не изменяется, можно показать, что циркуляция определяется по непосредственно измеряемому распределению скорости u на оси симметрии в зависимости от времени t :

$$\Gamma = \oint_{ABCD} u(z, r) \, dl = \int_{AB} u(z, 0) \, dz = u_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, dt$$

отошедший от выходного сечения трубы на расстояние s , подпитывается вытекающей из трубы струей. На расстоянии λ от выходного сечения трубы струя практически не возмущена и представляет собой цилиндрическое тело. Формирование вихревого кольца рассматривается в цилиндрической системе координат (z, r) . Согласно рис. 3 на основе законов сохранения импульса, циркуляции и некоторых кинематических соображений можно получить формулы для определения почти всех параметров, характеризующих структуру сформировавшегося вихревого кольца в зависимости от длины и числа Рейнольдса струи. В расчетах формирующееся вихревое кольцо предполагается тонким, что соответствует большим значениям числа Рейнольдса струи ($Re = R_0 V_0 / \nu \geq 10^4$). Предполагается также, что связи между параметрами кольца определяются формулами теоретических моделей вихревого кольца в идеальной жидкости [1–3].

Вихревой импульс. Импульс вихревого кольца можно определить, оценивая изменение вихревого импульса в жидкости при истечении струи. Как известно, вихревой импульс определяется интегралом [1]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) d\tau,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор; $\boldsymbol{\omega}$ — завихренность; τ — объем интегрирования, соответствующий пространству вне трубы. Следовательно, скорость изменения импульса в неподвижном объеме τ определяется выражением

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \right) d\tau,$$

правая часть которого с помощью уравнения Гельмгольца $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$ приводится к интегралу по поверхности Σ , ограничивающей жидкость вне трубы:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho \iint_{\Sigma} \{ \mathbf{n} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})] - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + nq^2 - 2(\mathbf{n}\mathbf{u})\mathbf{u} \} d\Sigma.$$

Здесь $q = |\mathbf{u}|$ — модуль скорости; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности Σ . Поверхность Σ состоит из выходного сечения трубы, внешней поверхности трубы и бесконечно удаленной от выходного отверстия трубы поверхности, включающей все заполненное жидкостью пространство вне трубы.

В расчетах можно принять, что на внешней поверхности трубы $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = 0$. Тогда интеграл по поверхности трубы обращается в нуль. Интеграл по бесконечно удаленной от выхода трубы поверхности также равен нулю, так как на бесконечности $\boldsymbol{\omega} = 0$, а скорость \mathbf{u} имеет асимптотику источника (т. е. $|\mathbf{u}| \sim 1/|\mathbf{r}|^2$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$). Остается только интеграл по выходному сечению трубы, в котором имеется две характерные зоны: зона истечения центрального ядра струи с $\mathbf{u} = \mathbf{V}_0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ и кольцевая зона истечения пограничного слоя толщиной δ с внутренней стенки трубы. На внутренней цилиндрической поверхности пограничного слоя, примыкающей к ядру струи, $\mathbf{u} = \mathbf{V}_0$, а на внешней границе (при $r = R_0$) $\mathbf{u} = 0$. Учитывая, что $\delta/R_0 \ll 1$, можно принять, что в среднем по всему поперечному сечению пограничного слоя $\mathbf{u} = \mathbf{k}V_0/2$ и $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}V_0/\delta$ (\mathbf{k} — орт вдоль оси z ; \mathbf{e} — единичный вектор, направленный по азимутальной координате). При интегрировании члены порядка δ/R_0 и выше отбрасываются как пренебрежимо малые. Из расчетов следует, что вектор $\partial \mathbf{P} / \partial t$ имеет величину $\partial P_z / \partial t = \pi \rho R_0^2 V_0^2$, следовательно, величина импульса в жидкости в момент времени $t = T$ равна

$$P_z = \int_0^T \frac{\partial P_z}{\partial t} dt = \pi \rho R_0^2 V_0^2 T.$$

Согласно рис. 3 в момент времени $t = T$ в жидкости существует два вихревых образования: формирующееся вихревое кольцо и хвостовая часть цилиндрической вихревой пелены длиной λ , импульс которой равен $P_\lambda = \pi\rho R_0^2\lambda V_0$. Из опытов следует, что при $t > T$ хвостовая часть вихревой пелены трансформируется в небольшое вторичное вихревое кольцо с импульсом P_1 на заднем фронте струи, которое вскоре диссипирует. Приблизительно можно принять, что $P_1 = \alpha P_\lambda$ (α — коэффициент пропорциональности порядка единицы). Итак, при $t > T$ импульс жидкости P_z представляет собой сумму импульсов основного вихревого кольца P и вторичного вихревого образования P_1 на заднем фронте струи, т. е. $P_z = P + P_1$. Отсюда следует, что импульс вихревого кольца равен $P = P_z - P_1 = \pi\rho R_0^2 V_0^2 T - \alpha\pi\rho R_0^2\lambda V_0$. Согласно теоретическим моделям вихревого кольца [1–3] импульс вихревого кольца с тонким ядром связан с циркуляцией Γ и радиусом кольца R формулой $P \approx \pi\rho R^2\Gamma$. Подставляя эту формулу в полученное выше выражение, можно определить связь R и Γ с параметрами струи V_0 , T , λ :

$$R^2\Gamma = R_0^2V_0^2T - \alpha R_0^2V_0\lambda. \quad (3)$$

Циркуляция скорости. Зависимость циркуляции вихревого кольца от параметров струи может быть определена по оценке полной циркуляции скорости Γ_C , возникающей при истечении струи в пространство вне трубы. При оценке циркуляции скорости Γ_C необходимо учитывать, что в течение малого начального периода времени $t_0 \ll R_0/V_0$ скорость струи вблизи выходной кромки сопла не равна V_0 , так как интенсивность γ_0 вихревой пелены, образующейся на внутренней стенке трубы, при $t = 0$ не постоянна вдоль образующей трубы. Из расчетов потенциального течения, возникающего в начальный момент [12], следует, что распределение γ_0 вблизи кромки трубы (при $z \approx 0$) имеет вид $\gamma_0 \approx A/\sqrt{z}$, где $A = \text{const}$; z — расстояние от выходного сечения в глубь трубы. На этом этапе течение вблизи кромки трубы оказывается автомодельным, определяемым только коэффициентом A . Автомодельный этап сворачивания вихревой пелены рассмотрен в работах [13–15].

Однако циркуляцию скорости Γ_C , возникающую в жидкости при большой длительности истечения струи ($T \gg t_0$), можно оценить и без детального анализа начального этапа эволюции вихревой пелены. Влияние автомодельного этапа сворачивания вихревой пелены на циркуляцию в жидкости можно учитывать, предполагая, что уже в момент $t = 0$ циркуляция скорости Γ_C в жидкости принимает некоторое конечное значение γ , а в дальнейшем рост циркуляции в жидкости происходит при постоянной скорости истечения струи. Величину γ можно рассматривать как эмпирическую константу, значение которой при $T > R_0/V_0$ мало по сравнению со значением Γ_C .

Следует отметить, что согласно рис. 3 единственной завихренной областью в жидкости является спирально сворачивающаяся вихревая пелена. Если вдоль вихревой пелены и по образующей трубы провести разрез, то во всем пространстве, ограниченном поверхностями разреза, течение можно считать безвихревым с потенциалом скорости φ . Вычислим циркуляцию скорости по неподвижному контуру C , охватывающему спиральный конец вихревой пелены с концами в точках 1 и 2 по разные стороны разреза на кромке отверстия, двигаясь от точки 2 к точке 1 и учитывая начальное значение циркуляции:

$$\Gamma_C = \gamma + \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \gamma + \oint_C \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \gamma + \varphi_1 - \varphi_2.$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ можно найти по интегралу Коши [16] уравнений движения идеальной жидкости

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

где $V_1 = 0$; $V_2 = V_0$. Так как вблизи кромки трубы граница струи является прямолинейной, то $p_1 = p_2$ (в противном случае вихревая пелена при выходе из трубы отклонялась бы в радиальном направлении). Итак, имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^T \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (V_2^2 - V_1^2) dt = \frac{V_0^2 T}{2} = \frac{V_0 L}{2}.$$

Тогда циркуляция скорости в жидкости (в момент времени $t = T$) равна $\Gamma_C = \gamma + \varphi_1 - \varphi_2 = \gamma + V_0 L/2$. Согласно рис. 3 при $t = T$ полная циркуляция скорости в жидкости Γ_C является суммой циркуляции Γ вихревого кольца и циркуляции Γ_λ хвостовой части вихревой пелены длиной λ , т. е. $\Gamma_C = \Gamma + \Gamma_\lambda$. Можно показать, что $\Gamma_\lambda = \lambda V_0$. Так как при $t > T$ хвостовая часть вихревой пелены остается вне вихревого кольца и диссипирует, то циркуляция вихревого кольца определяется выражением

$$\Gamma = \Gamma_C - \Gamma_\lambda = \gamma + V_0(L/2 - \lambda). \quad (4)$$

Геометрическое соотношение. Для определения R и Γ в зависимости от L необходимо еще одно уравнение. Условие сохранения энергии в данном случае неприменимо, так как трудно оценить, какая часть энергии струи входит в вихревое кольцо, а какая часть диссипирует. В качестве такого уравнения можно использовать приближенное геометрическое соотношение, которое следует из рис. 3. В экспериментах установлено, что скорость распространения переднего фронта струи равна $V_0/2$, поэтому расстояние между передним фронтом струи и хвостовой частью струи вне вихревого кольца равно $L/2 - \lambda$, причем этот отрезок и поперечный размер $d \sim 2(R - R_0)$ спирального образования внутри вихревого кольца сравнимы по величине (см. рис. 3). Следовательно,

$$L/2 - \lambda \approx 2k(R - R_0) \quad (5)$$

(k — безразмерный коэффициент пропорциональности порядка единицы).

Радиус, циркуляция и импульс вихревого кольца. В безразмерных переменных $R_* = R/R_0$, $\Gamma_* = \Gamma/(R_0 V_0)$, $\gamma_* = \gamma/(R_0 V_0)$, $L_* = L/R_0$, $\lambda_* = \lambda/R_0$ система уравнений (3)–(5) принимает вид

$$R_*^2 \Gamma_* = L_* - \alpha \lambda_*, \quad \Gamma_* = \gamma_* + L_*/2 - \lambda_*, \quad L_*/2 - \lambda_* = 2k(R_* - 1).$$

Из этой системы следует кубическое уравнение для определения радиуса R_* в зависимости от длины струи L_* :

$$R_*^3 - \left(1 - \frac{\gamma_*}{2k}\right) R_*^2 - \alpha R_* - \frac{1 - \alpha/2}{2k} L_* + \alpha = 0.$$

Решив это уравнение, можно определить циркуляцию $\Gamma_* = \gamma_* + 2k(R_* - 1)$, импульс $P_* = R_*^2 \Gamma_*$ и параметр $\lambda_* = L_*/2 - 2k(R_* - 1)$. Наилучшее соответствие решений приведенных выше уравнений экспериментальным данным работы [4] имеет место при значениях констант $\alpha = 0,85$, $\gamma_* = 0,4$, $k \approx 2$. Найденные по численному решению полученных уравнений зависимости R_* , Γ_* , λ_* , P_* от L_* показаны на рис. 4 сплошными линиями. Точки соответствуют полученным в [4] экспериментальным значениям R_* , Γ_* , P_* , здесь же указаны погрешности измерений. Следует отметить, что уравнения (3)–(5) выведены в предположении $L_* \gg 1$ и не могут быть использованы при $L_* \rightarrow 0$. Однако, как следует из рис. 4, результаты расчета параметров вихревого кольца в диапазоне $1,87 \leq L_* \leq 20,00$ хорошо согласуются с экспериментальными данными. Для получения приближенных оценок зависимости R_* , Γ_* , P_* от длины струи L_* можно представить в явном виде, аппроксимируя зависимость $\lambda_*(L_*)$ в экспериментально изученном диапазоне $2 \leq L_* \leq 20$ какой-либо

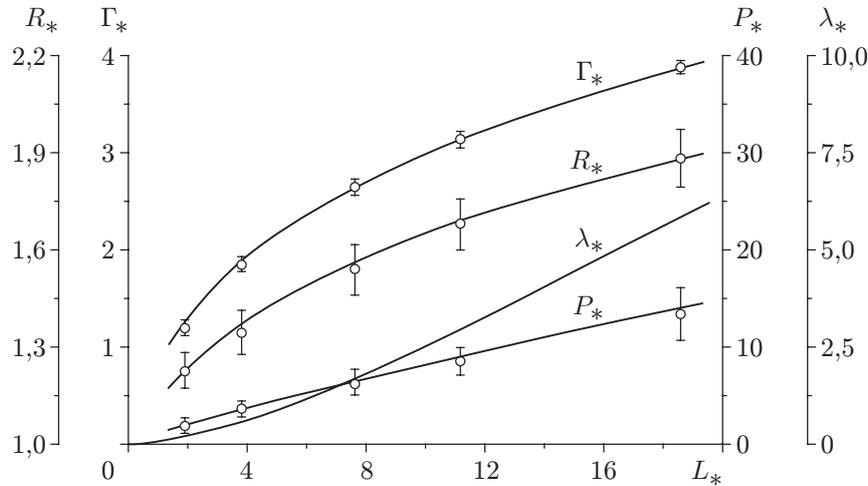


Рис. 4. Зависимость параметров R_* , Γ_* , P_* , λ_* от длины струи L_* : линии — результаты расчетов; точки — экспериментальные данные [4]

подходящей функцией. Например, полученная численно зависимость $\lambda_*(L_*)$ хорошо аппроксимируется функцией вида $\lambda_* = a \ln \operatorname{ch}(cL_*)$ с коэффициентами $a \approx 2,424$, $c \approx 0,1695$. При такой аппроксимации λ_* параметры вихревого кольца R_* , Γ_* , P_* в зависимости от длины струи L_* могут быть рассчитаны по простым формулам

$$R_* = 1 + 0,125L_* - 0,25\lambda_*, \quad \Gamma_* = 0,4 + 0,5L_* - \lambda_*, \quad P_* = L_* - 0,85\lambda_*.$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} \geq 10^3$ радиус, циркуляция и импульс вихревого кольца определяются только безразмерной длительностью истечения струи L_* (или длиной струи) и не зависят от числа Рейнольдса Re струи, что подтверждается экспериментальными данными работы [4].

Радиус ядра вихревого кольца. В рамках предложенной модели можно получить формулы для определения еще одного важного структурного параметра вихревого кольца — радиуса a ядра вихря — в зависимости от L_* и Re . Ясно, что для полного расчета формирования ядра вихря требуется решение достаточно сложной задачи о сворачивании слоя смешения струи в ядро вихря с учетом вязкости среды. Однако характер зависимости радиуса ядра $a_* = a/R_0$ от L_* и Re можно определить, не проводя подробное исследование процесса сворачивания вихревого слоя, а оценив лишь объем жидкости, втекающей в ядро вихря при формировании вихревого кольца. Согласно рис. 3 в процессе формирования вихревого кольца жидкость втекает в ядро вихря по двум каналам: вдоль слоя смешения струи (заштрихованная область), являющегося продолжением стекающего с внутренней поверхности сопла пограничного слоя, и вдоль ветви спирали из окружающего пространства и атмосферы вихря (незаштрихованная область).

Оценим сначала объем жидкости q_1 , втекающей в ядро из слоя смешения струи. Очевидно, что скорость втекания жидкости из слоя смешения в вихрь V_λ равна разности средней скорости \tilde{V} в слое смешения и скорости $u_\lambda = d\lambda/dt$ перемещения точки $z = \lambda$ в осевом направлении: $V_\lambda \approx \tilde{V} - u_\lambda$. Приближенно можно принять, что среднее по толщине слоя смешения струи значение скорости равно $\tilde{V} \approx V_0/2$, следовательно, скорость втекания жидкости из слоя смешения струи в ядро равна $V_\lambda \approx \tilde{V} - u_\lambda = V_0/2 - d\lambda/dt$. При исследовании истечения затопленных струй установлено, что течение в слое смешения струи на небольших расстояниях от выходного сечения сопла, не превышающих нескольких радиусов сопла, является ламинарным [17, 18]. Поэтому толщину слоя смешения δ_1

при входе в вихрь можно оценить по соотношению $\delta_1 \sim b\sqrt{\nu t_1}$ [18], где b — безразмерный коэффициент пропорциональности; $t_1 \sim (l + \lambda)/V_0$ — время перемещения частиц жидкости на расстояние $l + \lambda$. Таким образом, $\delta_1 \sim b\sqrt{\nu(l + \lambda)/V_0} = b\sqrt{R_0(l + \lambda)} \text{Re}^{-1/2}$. Коэффициент b можно найти по распределению скорости в слое смешения струй [17, 18]. Из аппроксимации распределения скорости в слое смешения линейной функцией можно получить значение $b \approx 5,22$. Следовательно, объем жидкости q_1 , втекающей за время T из слоя смешения струи в ядро вихря, определяется выражением

$$\begin{aligned} q_1 &\approx \int_0^T 2\pi R_0 \delta_1 V_\lambda dt = \pi b R_0 \text{Re}^{-1/2} \int_0^T \sqrt{R_0(l + \lambda)} \left(V_0 - 2 \frac{d\lambda}{dt} \right) dt = \\ &= \pi b R_0 \text{Re}^{-1/2} \int_0^L \sqrt{R_0(l + \lambda)} \left(1 - 2 \frac{d\lambda}{dz} \right) dz, \end{aligned}$$

где $z = V_0 t$; $L = V_0 T$.

Как отмечено выше, в ядро вихря помимо объема q_1 втекает поток незавихренной жидкости (незаштрихованная ветвь спирали на рис. 3). Определить объем q_2 этого потока без расчета сворачивания слоя смешения струи в тороидальную спиральную поверхность сложно. Однако согласно рис. 3 можно предположить, что толщины обеих ветвей спирали (заштрихованная и незаштрихованная области) приблизительно одинаковы, более того, одинаковы и скорости втекания жидкости по обеим ветвям спирали. Поэтому в первом приближении можно принять, что объем жидкости q_2 , втекающей в ядро вихря (незаштрихованная ветвь спирали на рис. 3), пропорционален q_1 , т. е. $q_2 \sim \beta q_1$ (β — эмпирический коэффициент). Итак, полный объем жидкости, вошедшей в ядро вихря, определяется по формуле $q \approx (1 + \beta)q_1$. Приравняв объем жидкости q , втекающей в ядро вихря, к объему тороидального ядра вихревого кольца $q_\text{я} = \pi a^2 2\pi R$, получаем выражение

$$a \sim \sqrt{\frac{(1 + \beta)b}{2\pi R}} \text{Re}^{-1/4} \left[R_0 \int_0^L \sqrt{R_0(l + \lambda)} \left(1 - 2 \frac{d\lambda}{dz} \right) dz \right]^{1/2}.$$

С использованием безразмерных параметров $a_* = a/R_0$, $R_* = R/R_0$, $l_* = l/R_0$, $\lambda_* = \lambda/R_0$, $L_* = L/R_0$, $z_* = z/R_0$ формулу для определения радиуса вихря a_* можно записать в виде

$$a_* = \frac{a}{R_0} = \text{Re}^{-1/4} \sqrt{\frac{(1 + \beta)b}{2\pi R_*}} \left(\int_0^{L_*} \sqrt{l_* + \lambda_*} dz_* - \frac{4}{3} [(l_* + \lambda_*)^{3/2} - l_*^{3/2}] \right)^{1/2}. \quad (6)$$

В выражении (6) функции $R_*(L_*)$, $\lambda_*(L_*)$ при $L_* \geq 1,87$ определены выше. При интегрировании (6) принято, что $\lambda_*(0) = 0$, так как согласно рис. 3 при нулевой длине струи длина ее хвостовой части также равна нулю. Из рис. 4 следует, что $\lambda_*(2) < 0,14$, т. е. при $0 \leq L_* < 2$ значения параметра λ_* меньше, чем при $L_* \geq 2$. Поэтому можно считать, что вид функции $\lambda_*(L_*)$ при $L_* < 2$ не оказывает существенного влияния на результаты расчетов a_* при $L_* \geq 2$, когда значения λ_* велики. Ясно, что расчеты радиуса ядра вихря a_* по формуле (6) применимы лишь в диапазоне $1,87 \leq L_* \leq 18,53$, в котором справедливы уравнения (3)–(5) (см. рис. 4). В указанном диапазоне наилучшее соответствие результатов расчетов a_* по формуле (6) экспериментальным данным [4] имеет место при $\beta \approx 3,234$. Это означает, что объем жидкости, втекающей в ядро вихря по незаштрихованной на рис. 3 ветви спирали, приблизительно в три раза больше объема жидкости, втекающей из слоя смешения струи.

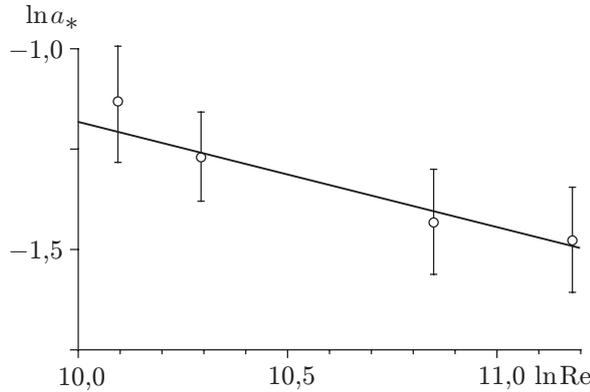


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость радиуса ядра вихря от числа Рейнольдса струи: линия — результаты расчетов; точки — экспериментальные данные [4]

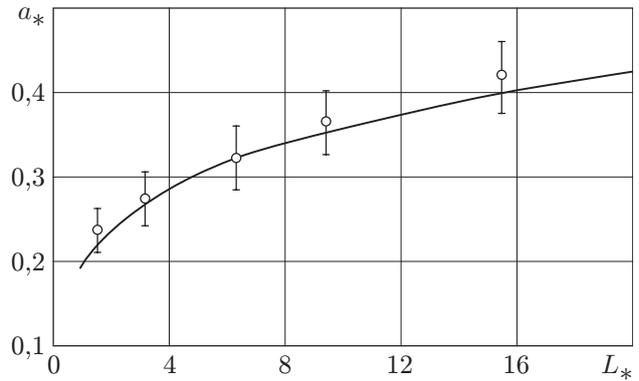


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость радиуса ядра вихря от длины струи: линия — результаты расчетов; точки — экспериментальные данные [4]

Полученная степенная зависимость a_* от числа Рейнольдса Re хорошо согласуется с построенной по экспериментальным данным работы [4] зависимостью $\ln a_*$ от $\ln Re$ (рис. 5). На рис. 5 тангенс угла наклона прямой линии, проведенной по экспериментальным точкам, равен $-1/4$, что соответствует формуле (6). В работах [6, 7] также указано, что из результатов измерений следует зависимость вида $a \sim Re^{-1/4}$. Зависимость a_* от длины струи L_* (см. (6)) ($Re = 1,825 \cdot 10^4$, $l_* = 2$) показана на рис. 6 сплошной линией, точки соответствуют экспериментальным данным работы [4]. Формула (6) определяет также характер зависимости a_* от длины l_* цилиндрического участка сопла, хотя экспериментальные данные такого рода отсутствуют. При расчетах по формуле (6) необходимо учитывать, что она выведена в предположении малости толщины слоя смешения струи δ_1 по сравнению с радиусом струи R_0 , поэтому применима при $\delta_1/R_0 \sim \sqrt{(l_* + \lambda_*)}/Re \ll 1$, что соответствует условиям формирования турбулентных вихревых колец с тонким ядром при достаточно больших числах Рейнольдса струи.

Поступательная скорость вихревого кольца. Полученные выше результаты позволяют рассчитать поступательную скорость вихревого кольца u_0 по известным теоретическим формулам [1, 2], например по формуле Кельвина

$$u_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right).$$

Поскольку в этой формуле радиус ядра вихря a является функцией длины L_* и числа Рейнольдса Re струи, скорость кольца также зависит от этих параметров. Ясно, что зависимость u_0 от Re весьма слабая, и существенна лишь зависимость u_0 от длины струи L_* . Получив выражения для расчета всех параметров в этой формуле, можно определить поступательную скорость вихря в зависимости от L_* . Расчетная зависимость $u_0^* = u_0/V_0$ от L_* показана на рис. 7 кривой 1, точки соответствуют экспериментальным значениям u_0^* , взятым из работы [4]. Видно, что формула Кельвина дает завышенные значения u_0^* , несмотря на то что значения всех подставляемых в нее параметров (R , Γ , a) соответствуют эксперименту. Этот факт свидетельствует о том, что формулы для поступательной скорости вихревого кольца, полученные в рамках схемы идеальной жидкости в предположении, что завихренность сосредоточена только в ядре вихря, не дают достаточно точных

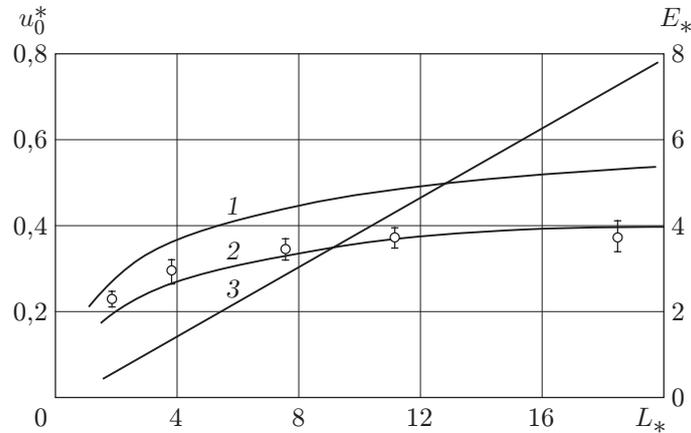


Рис. 7. Зависимости поступательной скорости (1, 2) и энергии (3) вихревого кольца от длины струи

количественных оценок скорости реальных вихревых колец с плавным колоколообразным распределением завихренности, распространяющейся и вне ядра вихря. Вообще, применительно к реальным вихревым кольцам с плавным распределением завихренности понятие ядра вихря определено недостаточно четко и используется лишь для характеристики ширины пика распределения завихренности и описания структуры вихревого кольца конечным числом параметров. Ясно лишь, что для расчета поступательной скорости реальных вихревых колец требуется более совершенная теория. Тем не менее следует отметить, что результаты расчетов u_0^* по формуле Кельвина лучше согласуются с экспериментальными данными, если в эту формулу ввести в виде множителя поправочный коэффициент $\alpha \approx 0,75$. Расчетная зависимость u_0^* от длины струи L_* с этой поправкой показана на рис. 7 кривой 2.

Энергия вихревого кольца. Из существующих теоретических моделей вихревого кольца [1–3] следует, что энергия вихревого кольца с тонким ядром определяется как функция параметров R , Γ , a :

$$E = \frac{\rho R \Gamma^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right).$$

Очевидно, что безразмерное значение энергии $E_* = E/(\rho \pi R_0^3 V_0^2) = (1/2\pi) R_* \Gamma_*^2 [\ln(8R/a) - 7/4]$, как и скорость кольца u_0^* , слабо зависит от числа Рейнольдса струи. Из анализа расчетной зависимости E_* от длины струи L_* , показанной на рис. 7 кривой 3, следует, что E_* изменяется практически пропорционально L_* ($E_* \sim 0,4L_*$). Можно предположить, что проведенный расчет E_* качественно описывает характер зависимости энергии вихревого кольца от длины струи, однако проверить корректность расчета в количественном отношении затруднительно, так как экспериментальные данные о зависимости E_* от длины струи L_* отсутствуют.

Итак, представленная модель формирования вихревого кольца, полученная с использованием не более одной эмпирической константы для каждой определяемой функциональной зависимости, позволяет рассчитать почти все характеристики вихревого кольца, образующегося при импульсном истечении затопленной струи, и прогнозировать структуру вихревого кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. **Сэффмэн Ф. Дж.** Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000.
3. **Алексеев С. В.** Введение в теорию концентрированных вихрей / С. В. Алексеев, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.
4. **Ахметов Д. Г.** Формирование и основные параметры вихревых колец // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 70–83.
5. **Sullivan J. P., Widnall S. E., Ezekiel S.** Study of vortex rings using a laser doppler velocimeter // AIAA J. 1973. V. 11. P. 1384–1389.
6. **Maxworthy T.** Some experimental studies of vortex rings // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. P. 465–495.
7. **Тарасов В. Ф.** Оценка некоторых параметров турбулентного вихревого кольца // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО АН СССР. Ин-т гидродинамики. 1973. Вып. 14. С. 120–127.
8. **Taylor G. I.** Formation of a vortex ring by giving an impulse to a circular disk and then dissolving it away // J. Appl. Phys. 1953. V. 24, N 1. P. 104.
9. **Saffman P. G.** On the formation of vortex rings // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54, N 3. P. 261–268.
10. **Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.** Формирование вихревых колец // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1980. № 3, вып. 1. С. 3–11.
11. **Владимиров В. А.** О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1977. № 6. С. 72–77.
12. **Bardotti G., Bertotti B.** Magnetic configuration of a cylinder with infinite conductivity // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 1387–1390.
13. **Pullin D. I.** Vortex ring formation at tube and orifice openings // Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 401–403.
14. **Didden N.** On the formation of vortex rings: rolling-up and production of circulation // J. Appl. Mech. Phys. (ZAMP). 1979. V. 30. P. 101–116.
15. **Nitzsche M.** Scaling properties of vortex ring formation at circular tube opening // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 7. P. 1848–1855.
16. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
17. **Бай Ши-и.** Теория струй. М.: Физматгиз, 1960.
18. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

*Поступила в редакцию 6/IV 2007 г.,
в окончательном варианте — 22/X 2007 г.*
