

И. Г. Брыкина, В. В. Русаков

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ**

Несмотря на развитие численных методов решения трехмерных задач обтекания затупленных тел потоком вязкого газа, весьма актуальна проблема разработки приближенных методов решения этих задач, позволяющих получать простые аналитические формулы, которые, не требуя больших затрат машинного времени и обладая в то же время достаточной точностью, широко используются при проведении практических расчетов. Много приближенных методов разработано для больших чисел Рейнольдса Re , когда течение исследуется в рамках теории пограничного слоя. Но пока не существует аналогичных методов, пригодных для решения трехмерных задач обтекания при небольших Re , когда вязкость существенна во всей возмущенной области течения.

Цель настоящей работы, являющейся продолжением [1], состоит в получении простых формул для определения тепловых потоков и напряжения трения в окрестности плоскости симметрии тел, обтекаемых под углом атаки, при малых и умеренных Re на основе приближенного решения уравнений пространственного вязкого ударного слоя с учетом скольжения и скачка температуры на поверхности. Ранее задачи обтекания в аналогичной постановке, но без учета эффектов скольжения изучались численно в [2—5].

1. Рассмотрим пространственное обтекание затупленных тел потоком вязкого газа при малых и умеренных Re , когда течение обладает плоскостью симметрии. Течение исследуется в рамках модели, аналогичной распространенной двухслойной модели вязкого ударного слоя, предложенной в [6] для осесимметричного обтекания и основанной на предположении о малой толщине возмущенной области течения.

Выберем систему криволинейных неортогональных координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , нормально связанную с обтекаемой поверхностью: $\xi^3 = \text{const}$ — семейство поверхностей, параллельных поверхности тела ($\xi^3 = 0$), а ξ^1 и ξ^2 выбраны на поверхности следующим образом. Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности тела в декартовой системе координат, вектор скорости набегающего потока V_∞ совпадает по направлению с осью z , начало координат помещено в точку торможения потока. Введем параметризацию поверхности: $x = \xi^1, y = \xi^2, z = f(\xi^1, \xi^2)$. Пусть $\xi^2 = 0$ — плоскость симметрии течения. Разложим в ее окрестности все искомые функции в ряды по ξ^2 : $F(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = F_0(\xi^1, \xi^3) + F_2(\xi^1, \xi^3)(\xi^2)^2 + \dots$. Подставим эти разложения в уравнения трехмерного тонкого вязкого ударного слоя [7] и, сохраняя в разложении для давления два члена, а в разложениях для остальных функций по одному члену, получим замкнутую систему уравнений, описывающую течение в окрестности плоскости симметрии, которая в переменных типа Дородницына имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \beta_3 u^1 \frac{\partial u^1}{\partial \xi^1} - S \frac{\partial u^1}{\partial \xi^2} + \beta_1 (u^1)^2 &= -\frac{p_1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\mu \rho}{Re \Delta^2} \frac{\partial u^1}{\partial \xi^2} \right), \\ \beta_3 u^1 \frac{\partial u^2}{\partial \xi^1} - S \frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} + \beta_2 (u^2)^2 + \beta_4 (u^1)^2 + \beta_8 u^1 u^2 &= \\ &= -\frac{g}{\rho} (p_2 - \beta_0 p_1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\mu \rho}{Re \Delta^2} \frac{\partial u^2}{\partial \xi^2} \right), \\ \beta_3 u^1 \frac{\partial G}{\partial \xi^1} - S \frac{\partial G}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[\frac{\mu \rho}{Re Pr \Delta^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(G - \frac{1 - Pr}{1 - Gr_w} \beta_0 (u^1)^2 \right) \right], \\ S &= \beta_1 \varphi^1 + \beta_2 \varphi^2 + \beta_3 \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^1} + \frac{\varphi^1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi^1} \right), \quad u^1 = \frac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^2}, \quad u^2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^2}, \\ Vg \frac{\partial p}{\partial \xi^2} &= \beta_4 \Delta (u^1)^2, \quad Vg \frac{\partial p_1}{\partial \xi^2} = g \beta_1 \beta_3 u^1 \left(u^1 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi^2} + 2\Delta \frac{\partial u^1}{\partial \xi^2} \right) + \beta_5 \Delta (u^1)^2, \\ Vg \frac{\partial p_2}{\partial \xi^2} &= \Delta [\beta_6 (u^1)^2 + 4\beta_7 u^1 u^2 + 2\beta_2^2 (u^2)^2], \end{aligned}$$

$$\xi = \xi^1, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\xi^3} \rho d\xi^3, \quad \Delta = \int_0^{\xi^3} \rho d\xi^3,$$

$$\frac{p}{\rho} = \varepsilon T, \quad T = G(1 - G_w) + G_w - \beta_0 (u^1)^2, \quad \mu = T^{\omega},$$

$$G = \frac{H - H_w}{H_{\infty} - H_w}, \quad G_w = \frac{H_w}{H_{\infty}}, \quad \text{Re} = \frac{R \rho_{\infty} V_{\infty}}{\mu(T_0)}, \quad T_0 = \frac{V_{\infty}^2}{2c_p},$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad g = 1 + f_1'^2, \quad p_1 = \frac{1}{g\beta_3} \frac{\partial p}{\partial \xi^1} \Big|_{\xi^2=0}, \quad p_2 = \frac{1}{g\beta_2} \frac{\partial^2 p}{(\partial \xi^2)^2} \Big|_{\xi^2=0},$$

$$\beta_1 = \frac{f_{11}''}{g^2}, \quad \beta_2 = \frac{f_{22}''}{g}, \quad \beta_3 = \frac{f_1'}{g}, \quad \beta_4 = f_1'^2 \beta_1, \quad \beta_5 = \frac{f_{111}'''}{g^2} f_1' + \beta_1^2 g(6 - 4g),$$

$$\beta_6 = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{f_{1122}^{(IV)}}{g^2} \beta_0 + \beta_1 (\beta_7(6 - 4g) + 6\beta_2^2(1 - g)) \right],$$

$$\beta_7 = \frac{f_{122}'''}{g^2} f_1', \quad \beta_8 = \beta_3 \frac{f_{122}'''}{f_{22}''} - 2\beta_1, \quad \beta_9 = \frac{f_1'^2}{g}.$$

Здесь $\rho_{\infty} \rho$ — плотность; $\rho_{\infty} V_{\infty}^2 p$ — давление; $\mu(T_0)$ — вязкость; $H V_{\infty}^2 / 2$ — полная энтальпия; $T V_{\infty}^2 / (2c_p)$ — температура; $V_{\infty} u_{\infty}^{\alpha}$ — физические составляющие вектора скорости в направлениях ξ^1 и ξ^2 ($V_{\infty} u_{\infty}^{\alpha}$ — физические компоненты вектора скорости в набегающем потоке); Pr — число Прандтля; γ — отношение удельных теплоемкостей; R — характерный линейный размер; индексы ∞ , s и w относятся к величинам в невозмущенном потоке, за ударной волной и на поверхности обтекаемого тела, а индексы 1 и 2 при производных функции f обозначают, по какой координате (ξ^1 или ξ^2) производится дифференцирование.

На поверхности тела задаются граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры [8]:

$$\zeta = 0: u^{\alpha} = Q \frac{T^{\omega-1/2}}{\Delta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \zeta} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\beta_3 \varphi^1 \frac{d\Delta}{d\xi} + \Delta \left(\beta_1 \varphi^1 + \beta_2 \varphi^2 + \beta_3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial \xi} \right) = 0, \quad G = Q^T \frac{T^{\omega-1/2}}{\Delta} \frac{\partial G}{\partial \zeta},$$

$$Q = \frac{2 - \theta}{\theta} \sqrt{\frac{\gamma \pi}{\gamma - 1}} \frac{1}{\text{Re}}, \quad Q^T = \frac{(2 - \alpha)}{\alpha} \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} \sqrt{\frac{\gamma \pi}{\gamma - 1}} \frac{1}{\text{Re Pr}},$$

где θ — коэффициент диффузного отражения; α — коэффициент аккумуляции (при расчетах принималось $\theta = 1$, $\alpha = 1$).

На ударной волне используются обобщенные соотношения Ренкина — Гюгонио

$$\zeta = 1: u^{\alpha} = 1 - \frac{\mu_{*} \rho \sqrt{g}}{\text{Re} \Delta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \zeta} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$G = 1 - \frac{\mu_{*} \rho \sqrt{g}}{\text{Re Pr} \Delta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[G - \frac{1 - \text{Pr}}{1 - G_w} \beta_0 (u^1)^2 \right],$$

$$p = \frac{1}{g}, \quad p_1 = -2\beta_1, \quad p_2 = -\frac{2}{g} \left(\beta_2 + \frac{\beta_7}{\beta_2} \right),$$

$$\beta_3 \varphi^1 \frac{d\Delta}{d\xi} + \Delta \left(\beta_1 \varphi^1 + \beta_2 \varphi^2 + \beta_3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Коэффициенты трения в окрестности плоскости симметрии вычисляются по формулам

$$c_f^{\alpha} = \frac{\mu_{*} \rho \partial (V_{\infty} u^{\alpha}) / \partial \xi^{\alpha}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 / 2} = \frac{2(\mu_{*} \rho)_w}{\text{Re} \Delta} \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \zeta} \right)_w \quad (\alpha = 1, 2).$$

Тепловой поток к поверхности в течении со скольжением обусловлен, во-первых, теплопроводностью, во-вторых, трением и состоит из двух частей: $q = \lambda_* \partial T_* / \partial \xi_*^2 + \mu_* u_*^1 \partial u_*^1 / \partial \xi_*^3$ (звездочкой отмечены размерные величины). Число Стантона c_H находится по формуле

$$c_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)} = \frac{(\mu\rho)_w}{\text{Re Pr}\Delta} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{1 - \text{Pr}}{1 - G_w} \beta_w u^1 \frac{\partial u^1}{\partial \xi} \right).$$

2. Уравнения (1.1) будем решать методом последовательных приближений аналогично [9, 10]. Метод впервые предложен для двумерных задач пограничного слоя в [11]. Затем в [9, 10] был разработан метод последовательных приближений для решения двумерных задач теории вязкого ударного слоя.

Уравнения импульсов и энергии интегрируются 2 раза по координате ξ (от ξ до 1 и от 0 до ξ) с учетом граничных условий и уравнений для давления и его производных. Для решения получившейся системы интегрированных уравнений строится итерационный процесс, при котором каждое последующее приближение для искомых функций выражается через предыдущее таким образом, чтобы все приближения удовлетворяли граничным условиям как на теле, так и на ударной волне. Итерационный алгоритм, позволяющий, если задано каким-либо образом нулевое приближение, определить последовательно любое количество приближений для искомых функций, аналогичен по виду алгоритму в [10] и поэтому здесь не приводится.

В первом приближении этого метода получено аналитическое решение для давления, компонент скорости, коэффициентов трения и числа Стантона:

$$(2.1) \quad p_w = \frac{1 - \beta_* t}{g}, \quad \beta_* = \frac{\varepsilon \beta_i \beta_w a}{3r\beta}, \quad t = 1 + 3b + 3b^2;$$

$$(2.2) \quad u^\alpha = \alpha_0 \eta^\alpha \Delta_\alpha \sqrt{g} + \alpha_1 \Delta_\alpha^2 (T^1(\xi) - F^\infty(\xi)) \quad (\alpha = 1, 2), \\ G = \alpha_0 \eta \Delta_H \sqrt{g} + \alpha_1 \text{Pr} \Delta_H^2 T^2(\xi) + \frac{4 - \text{Pr}}{4 - G_w} \beta_0 (u^1)^2;$$

$$(2.3) \quad c_f^\alpha = 2\eta^\alpha \Delta_\alpha / \sqrt{g}, \quad \eta^\alpha = r - at/3 - R^\alpha \quad (\alpha = 1, 2);$$

$$(2.4) \quad c_H = \eta \Delta_H / \sqrt{g}, \quad \eta = r - c(1 + (3/2)(b + d) + 3bd)/3,$$

$$a_1^\alpha = r(1 - a(1 + b)) + \sqrt{g} \alpha_0 \eta^\alpha, \quad a_2^\alpha = \alpha_1 (T^1(1) - F^\infty(1)),$$

$$b_1 = r(1 - c(1 + d)) + \sqrt{g} \alpha_0 \eta, \quad b_2 = \alpha_1 \text{Pr} T^2(1),$$

$$b_3 = 1 - \frac{4 - \text{Pr}}{4 - G_w} \beta_0 (u_s^1)^2, \quad r = 1/2 + b,$$

$$\alpha_0 = \frac{((1/2) \pi \varepsilon (cd + G_w))^{1/2}}{g p_w}, \quad \alpha_1 = \frac{\text{Re} \varepsilon (c(1 - G_w))^{1/2}}{a\beta},$$

$$\Delta_\alpha = \frac{-a_1^\alpha + \sqrt{(a_1^\alpha)^2 + 4a_2^\alpha}}{2a_2^\alpha}, \quad \Delta_H = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2 b_3}}{2b_2},$$

$$T^\gamma(\xi) = \sum_{i=-1}^4 \sum_{j=0}^3 \frac{l_i \tau_j^\gamma}{i+j+3/2} (n^{i+j+3/2} - d^{i+j+3/2}) \quad (\gamma = 1, 2, 3), \quad n = \xi + d,$$

$$\tau_0^1 = r - at/3, \quad \tau_1^1 = ad(b - d/2), \quad \tau_2^1 = -aq/2, \quad \tau_3^1 = -a/6,$$

$$\tau_0^2 = \eta, \quad \tau_1^2 = dc(b - d/2), \quad \tau_2^2 = -cq/2, \quad \tau_3^2 = -c/6,$$

$$R^\alpha = \frac{\delta^\alpha}{3\beta} at + \frac{\varepsilon}{a\beta} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{q_i \tau_j^\alpha}{i+j} ((1+d)^{i+j} - a^{i+j}), \quad q = b - d,$$

$$q_1 = G_w, \quad q_2 = c(1 - G_w) + 2qq_3, \quad q_3 = -\beta_0 a^2,$$

$$S^1 = \beta_1, \quad S^2 = \beta - g\beta_1 + \beta_7/\beta_2,$$

$$\begin{aligned}
h_0^\alpha &= -\frac{2}{a} - th_3^\alpha, \quad h_1^\alpha = 3q^2 h_3^\alpha, \quad h_2^\alpha = 3qh_3^\alpha, \\
h_3^\alpha &= \frac{g}{3r\beta} (2\beta_1\beta^2 + k^\alpha), \quad k^1 = \beta_5/g, \quad k^2 = 2\beta_2^2 + \beta_6 + 4\beta_7 - \beta_0\beta_5, \\
F^\alpha(\zeta) &= \frac{S_a^\alpha}{3\beta} T^3(\zeta) + \\
&+ \frac{\varepsilon}{a\beta} \sum_{k=-1}^4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{l_k q_i h_j^\alpha}{i+j} \left((1+d)^{i+j} \frac{n^{k'} - d^{k'}}{k'} - \frac{n^{i+j+k'} - d^{i+j+k'}}{i+j+k'} \right), \\
k' &= k + 3/2, \quad \tau_0^3 = t, \quad \tau_1^3 = -3q^2, \quad \tau_2^3 = -3q, \quad \tau_3^3 = -1, \\
p_0 &= 1 + \beta_* t, \quad l_{-1} = \frac{G_w p_0}{2c}, \quad i_0 = \left(1 + \frac{qq_3}{c} \right) p_0, \\
l_1 &= \frac{q_3 p_0}{2c}, \quad l_2 = -\beta_* \left(3q + \frac{G_w}{2c} \right), \quad l_3 = -\beta_* \left(1 + \frac{5qq_3}{2c} \right), \\
l_4 &= -\frac{\beta_* q_3}{2c}, \quad b = \frac{Q_*^T a}{1 - 2Q_* a}, \quad d = \frac{Q_*^T a}{1 - 2Q_* a}, \quad c = \frac{\text{Pr } a}{1 + \text{Pr } a(1+d) - a(1+b)}, \\
\text{Pr}(1 + a(Q_*^T - 2Q_*)) (a^4 - E\varphi^2) + a^3\varphi &= 0, \quad \varphi = 1 - a(1 + 2Q_*) + Q_* a^2, \\
Q_* &= \frac{\beta \sqrt{g} Q}{2}, \quad Q_*^T = \frac{\beta \sqrt{\varepsilon} Q^T}{2}, \quad E = (1 - G_w) \left(\frac{2 \text{Re } \varepsilon}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.
\end{aligned}$$

Расчеты, проведенные по формуле (2.4), а также численные расчеты, выполненные с помощью конечно-разностного метода, для тел различной формы показали, что при $\text{Re} \gtrsim 5$ распределение вдоль поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке, слабо зависит от учета эффектов скольжения и скачка температуры на поверхности. Таким образом, с учетом этого факта приведенные выше соотношения могут быть упрощены, и для относительных значений теплового потока получается простая формула

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad \frac{q}{q_0} &= \frac{H}{gH_0} \frac{(1 - (2/3)c) T_0}{(1 - (2/3)c_0) T} \frac{c - 1 + \sqrt{(1-c)^2 + 8 \text{Re } \sqrt{g} T/H}}{c_0 - 1 + \sqrt{(1-c_0)^2 + 8 \text{Re } T_0/H_0}}, \\
T &= \varepsilon \text{Pr} (c(1 - G_w))^{1/2} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{7}{9}c \right) + \frac{G_w}{2c} \left(1 - \frac{5}{7}c \right) \right], \\
c &= \frac{a \text{Pr}}{1 - a(1 - \text{Pr})}, \quad \varepsilon^4 (1 - \text{Pr}) - a^3 + E^* (1 - a)^2 = 0, \\
E^* &= g(1 - G_w) \text{Pr} \left(\frac{\varepsilon \text{Re}}{H} \right)^2,
\end{aligned}$$

где H — средняя кривизна поверхности в данной точке ($H = (k_1 + k_2)/2$); k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности в этой точке; индекс 0 относится к значениям соответствующих величин в точке торможения.

Из анализа (2.5) следует, что при умеренных и больших числах Рейнольдса ($\text{Re} \gtrsim 100$) относительный тепловой поток перестает зависеть от Re и формула (2.5) приобретает вид

$$(2.6) \quad \frac{q}{q_0} = \frac{1}{g^{3/4}} \sqrt{\frac{H}{H_0}}, \quad H = \frac{1}{2g} \left(\frac{f''_{11}}{g} + f''_{22} \right).$$

Практическое отсутствие зависимости распределения относительного теплового потока по поверхности от Re (при $\text{Re} \gtrsim 100$) подтверждается и численными расчетами.

3. Для оценки точности полученных формул проводилось систематическое сравнение аналитического решения с численным, найденным с использованием разностной схемы четвертого порядка точности аппроксимации по ζ и второго порядка по ξ . Результаты расчета по приближенным аналитическим формулам сравнивались с результатами численных

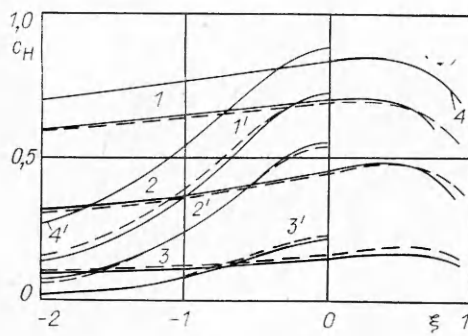


Рис. 1

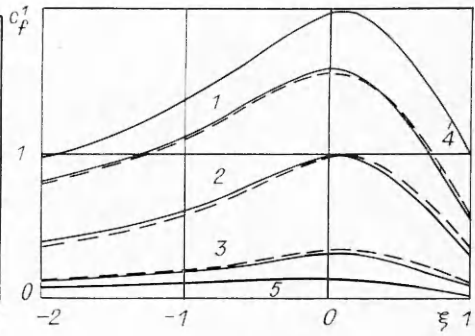


Рис. 2

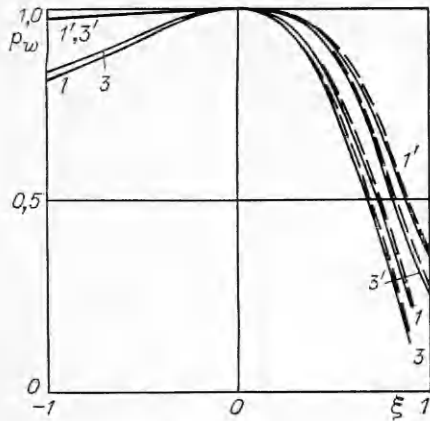
расчетов в окрестности плоскости симметрии эллиптических параболоидов и гиперболоидов, обтекаемых под углами атаки, в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи: Re изменялось от 1 до 1000, угол атаки α — от 0 до 45° , температурный фактор G_w — от 0 до 0,3, γ — от 1,1 до 1,4. Сравнение аналитического решения с численным показало хорошую точность формул для давления, коэффициентов трения и теплообмена во всем рассмотренном диапазоне изменения параметров задачи, что видно, например, из рис. 1—3, где приведены характерные распределения этих величин вдоль поверхности эллиптического параболоида $z = (1/2)(x^2 + ky^2)$ ($k = 0,8$), обтекаемого под углами атаки 0, 45° ; 15° и 30° соответственно, и гиперболоида $z = (1 + x^2 + y^2)^{1/2} - 1$, обтекаемого под углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3, кривые $1'$, $3'$). Линии 1—3 отвечают $Re = 1, 10, 100$, сплошные линии — численное решение, штриховые — расчет по формулам (2.1), (2.3) и (2.4) для p_w , c_f^1 и c_H . На рис. 1 кривые $1'$ — $4'$ для $\alpha = 0$. Результаты приведены при $\gamma = 1,4$, $G_w = 0,1$, $Pr = 0,71$.

Исследование зависимости теплового потока и напряжения трения от α показало, что с ростом α максимум этих величин смещается из критической точки в сторону уменьшения радиуса продольной кривизны контура тела, однако абсолютный максимум значений q и c_f^1 для данного тела достигается в критической точке при его обтекании без угла атаки. Так, при обтекании эллиптического параболоида ($k = 0,8$) при $Re = 100$ для $\alpha = 0, 15, 30, 45^\circ$ максимальные значения $c_H = 0,22; 0,21; 0,19; 0,16$.

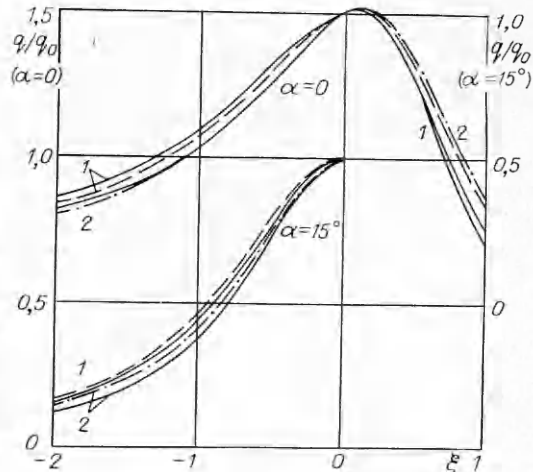
Анализ полученных результатов показал, что в уравнениях импульсов нельзя опускать члены, содержащие касательные к поверхности составляющие градиента давления, так как неучет этих членов приводит к значительной ошибке при определении коэффициентов трения, что продемонстрировано на рис. 2, где линии 5 — данные, найденные при тех же значениях параметров, что и линии 3, но без учета указанных членов с касательными составляющими градиента давления.

При небольших Re эффекты скольжения и скачка температуры на поверхности, как и для осесимметричных течений, существенно влияют на распределение абсолютных значений напряжения трения и теплового потока на поверхности, что показано на рис. 1 и 2 (линии 4 получены при тех же параметрах, что и линии 1, но без учета скольжения). При этом влияние эффектов скольжения сказывается сильнее в случае обтекания тела под углом атаки с той стороны от точки торможения, где радиус продольной кривизны контура тела уменьшается.

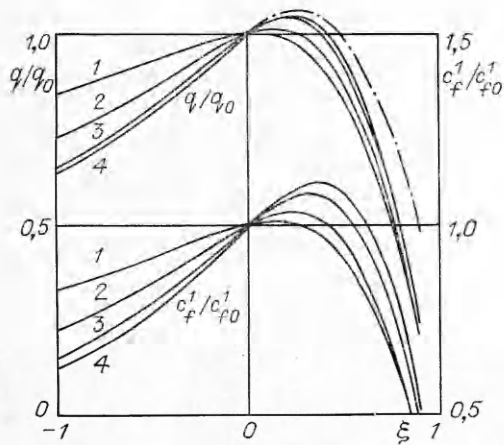
Проведена также оценка точности упрощенной формулы (2.5) для распределения теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке. Пример сравнения аналитических и численных решений представлен на рис. 4 для эллиптического параболоида ($k = 0,8$), обтекаемого под углами атаки 0 и 15° и $Re = 10$ и 100 (кривые 1 и 2), сплошные линии — численное решение, штриховые — расчет по формуле (2.5), штрихпунктирные — по формуле (2.6), не зависящей от Re , который



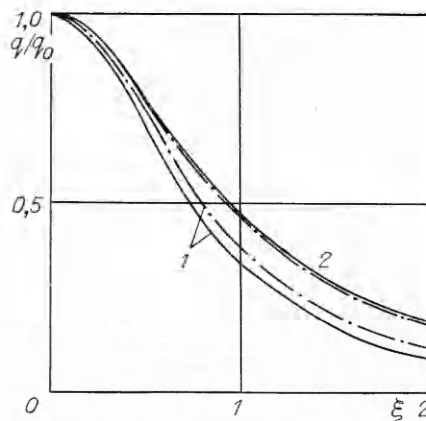
Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

практически совпадает (с точностью до 1 %) с расчетом по (2.5) при $Re = 100$. Таким образом, при $Re \geq 100$ для определения q/q_0 можно пользоваться формулой (2.6).

Тот факт, что при $Re \geq 100$ зависимость распределения относительного теплового потока от Re практически исчезает, проиллюстрирован на рис. 5, где приведены распределения q/q_0 и c_f^1/c_f0^1 вдоль линии растекания эллиптического параболоида ($k = 0,8$, $\alpha = 30^\circ$), полученные из численного решения (сплошные линии) при $Re = 1; 10; 100; 700$ (кривые 1—4). Видно, что распределение c_f^1/c_f0^1 в отличие от q/q_0 в диапазоне $100 \leq Re \leq 700$ еще существенно зависит от Re .

Сравнение с результатами численного решения для тел различной формы, обтекаемых под разными углами атаки, показало хорошую точность формулы (2.6), выражающей относительный тепловой поток в данной точке на линии растекания в зависимости от метрики и средней кривизны поверхности в этой точке, при $Re \geq 100$. Примеры такого сравнения для эллиптических параболоидов с $k = 0,8$, $\alpha = 0, 15^\circ$; $k = 0,8$, $\alpha = 30^\circ$; $k = 0,25$ и 4 (кривые 1 и 2), $\alpha = 0$ даны на рис. 4—6 соответственно; расчет по формуле (2.6) (штрихпунктирные линии) хорошо согласуется с численным решением уравнений (1.1) (сплошные линии).

Авторы выражают благодарность Г. А. Тирскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брыкина И. Г., Русаков В. В. Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 2.
2. Анкудинов А. Л. Расчет вязкого ударного слоя в плоскости симметрии течения около эллиптического гиперболоида под углом атаки // Тр. ЦАГИ.— 1983.— Вып. 2203.
3. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. К теории пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // ПММ.— 1984.— Т. 48, вып. 5.
4. Зинченко В. И. Математическое моделирование сопряженных задач тепломассообмена.— Томск: Изд-во ТГУ, 1985.
5. Провоторов В. П. Исследование пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1979.— Вып. 1983.
6. Cheng H. K. Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // Proc. 1961 Heat Transfer Fluid Mech. Institute, Stanford, 1961.
7. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Некоторые вопросы механики сплошной среды.— М.: Изд-во МГУ, 1978.
8. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа.— М.: Наука, 1965.
9. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // ЖВММФ.— 1978.— Т. 18, № 1.
10. Брыкина И. Г. Применение метода последовательных приближений к решению уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя с учетом скольжения на поверхности // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
11. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации // Отчет Ин-та механики МГУ.— 1969.— № 1016.

г. Москва

Поступила 22/II 1988 г.,
в окончательном варианте —
29/III 1988 г.

УДК 539.215

И. Л. Захаров, Я. А. Крафтмажер

ОБРАЩЕННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Среди бесконтактных методов измерения электропроводности [1] значительное место занимает метод, основанный на определении вращающего момента, действующего на образец во вращающемся магнитном поле [2—5]. Образец в форме шара или цилиндра подвешивают на тонкой упругой нити. Вращающееся магнитное поле создают с помощью двух- или трехфазного тока либо механическим вращением катушек, по которым проходит постоянный ток. Вращающий момент, действующий на образец, регистрируют по углу закручивания нити, применяя осветитель, зеркальце и шкалу, или путем компенсации вращающего момента. Электропроводность образца определяют абсолютным или относительным методом. В первом случае используют точное решение задачи для проводящего шара или цилиндра во вращающемся магнитном поле [6].

Цель данной работы — усовершенствование способа измерений электропроводности во вращающемся магнитном поле, в частности, для контроля чистоты металлов по остаточному сопротивлению. Этот метод основан на том, что при достаточно низких температурах удельное сопротивление металлов определяется в основном примесями и дефектами кристаллической структуры, и широко применяется в настоящее время. Обычно чистоту металла характеризуют отношением его удельных сопротивлений при комнатной температуре и температуре жидкого гелия. Основным недостатком метода вращающегося магнитного поля заключается в том, что образцы должны иметь небольшие размеры, обычно около 1 см. При необходимости исследовать распределение примесей вдоль длинных об-