РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2007, том 43, № 6

ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ЭЛЕМЕНТЫ И СИСТЕМЫ

УДК 535.41

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ – ПЕРО С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ БАЗОЙ. Ч. II. РЕЖИМ НЕПОДВИЖНЫХ ЗЕРКАЛ. РЕЖИМ «СВЕРХМЕДЛЕННЫХ» КОЛЕБАНИЙ ЗЕРКАЛ *

А. П. Кольченко, В. С. Терентьев, Ю. В. Троицкий

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: kolchenko@iae.nsk.su

Теоретически исследуется многолучевой интерферометр, зеркала которого совершают малые колебания. Приводятся и анализируются передаточные функции для двух предельных случаев: интерферометра с неподвижными зеркалами и интерферометра, работающего в режиме «сверхмедленных» колебаний зеркал.

Введение. В работе [1] отмечено, что основными характеристиками многолучевого интерферометра Фабри – Перо (ИФП), имеющего сравнительно большую базу (длину) или «встроенного» в какую-либо другую оптическую систему, являются не его коэффициенты отражения и пропускания в их обычном понимании, а передаточные функции (ПФ), связывающие выходные поля ИФП с полем засветки с учетом фазовых соотношений. В [1] приводятся общие выражения для ПФ. Они получены в соответствии с законами распространения однородных плоских волн и законами их отражения от медленно движущихся (по сравнению со скоростью света) зеркал. Такой подход к задаче является более адекватным физической ситуации, чем те, которые обычно использовались [2–4].

В данной работе результаты [1] конкретизируются для двух предельных случаев: ИФП с неподвижными зеркалами и ИФП в режиме «сверхмедленных» колебаний, когда характерное время установления поля в резонаторе достаточно мало по сравнению с минимальным периодом колебаний зеркал.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-02-16356).

Режим неподвижных зеркал. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания зеркал считаются комплексными и в общем случае не одинаковыми по разные стороны зеркал:

$$r_j = |r_j| \exp(i\alpha_j); \qquad \tilde{r}_j = |\tilde{r}_j| \exp(i\tilde{\alpha}_j);$$
$$t_j = |t_j| \exp(i\beta_j); \qquad \tilde{t}_j = |\tilde{t}_j| \exp(i\tilde{\beta}_j) \quad (j=1,2). \tag{1}$$

Квадраты их модулей есть коэффициенты отражения и пропускания зеркал по интенсивности:

$$R_j = |r_j|^2; \quad \tilde{R}_j = |\tilde{r}_j|^2; \quad T_j = |t_j|^2; \quad \tilde{T}_j = |\tilde{t}_j|^2. \tag{2}$$

Для зеркал с потерями справедливы соотношения

$$R_j + T_j + A_j = 1; \qquad \tilde{R}_j + \tilde{T}_j + \tilde{A}_j = 1;$$
$$\psi_j = \beta_j + \tilde{\beta}_j - \alpha_j - \tilde{\alpha}_j = (2m+1)\pi + 2\Delta\psi_j, \tag{3}$$
$$0 \le |\Delta\psi_j| \le \pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2).$$

Здесь ψ_j – так называемая фаза Ами [5]; A_j и $\tilde{A}_j$ – коэффициенты потерь; $\Delta\psi_j$ – дефект фазы Ами. Обычно для диэлектрических зеркал он составляет сотые и тысячные доли процента. Если потери вообще отсутствуют, то $\Delta\psi_j = 0$.

Для ИФП с неподвижными зеркалами в неустановившемся режиме или при немонохроматической засветке (например, от двухмодового лазера) основными характеристиками также являются его ПФ. (Основные понятия и обозначения в данной работе, как в [1].)

Для неподвижных зеркал ($\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$) сумма в формулах (16) из [1] легко вычисляется:

$$S(t\,|\,\omega) = [1 - p(\omega)]^{-1}\{1 - [p(\omega)]^{N(t)+1}\}, \quad p(\omega) = r\exp(i\omega\tau), \ \ r = r_1 r_2, \tag{4}$$

и выражения (18) из [1] для ПФ принимают простой вид:

$$\Pi_1(t\,|\,\omega) = \tilde{r}_1 + ap(\omega)S(t-\tau\,|\,\omega); \qquad \Pi_2(t\,|\,\omega) = b[p(\omega)]^{1/2} S(t-\tau/2\,|\,\omega),$$
$$a = \tilde{t}_1 t_1 / r_1, \qquad b = \tilde{t}_1 t_2 / r^{1/2}. \tag{5}$$

Отсюда для установившегося режима в точности следуют формулы Ами [5] (в наших обозначениях):

$$\Pi_1(t\,|\,\omega) \to \hat{r}(\omega) = \tilde{r}_1 + ap(\omega)[1 - p(\omega)]^{-1};$$
$$\Pi_2(t\,|\,\omega) \to \hat{t}(\omega) = b[p(\omega)]^{1/2}[1 - p(\omega)]^{-1} \quad (t_0 \to -\infty). \tag{6}$$

Функции $\hat{r}(\omega)$ и $\hat{t}(\omega)$ в данном случае имеют смысл амплитудных коэффициентов отражения и пропускания ИФП для компоненты ω поля засветки.

Обычно вместо переменной $\omega\tau$ при записи формул (4)–(6) используют переменную ζ, переход к которой осуществляется по правилу

$$r\exp(i\omega\tau) \to p(\zeta) = |r|\exp(2i\zeta),$$
$$\zeta = (\omega - \omega_p)\tau/2, \quad (\omega_p + \alpha_1 + \alpha_2) = 2m\pi. \tag{7}$$

Здесь ω_p – резонансная частота ИФП, определяемая последним условием (7); α_1 и α_2 – фазы коэффициентов отражения зеркал r_1 и r_2; m – целое число (порядок интерференции). При этом формулы (6) будут иметь привычный вид:

$$\hat{r}(\zeta) = \tilde{r}_1 + ap(\zeta)[1 - p(\zeta)]^{-1}; \qquad \hat{t}(\zeta) = b[p(\zeta)]^{1/2}[1 - p(\zeta)]^{-1}. \tag{8}$$

Величина 2ζ имеет смысл относительной отстройки от резонанса (в единицах межмодового интервала $\nu = c/2L$).

Резонансный множитель в этих формулах можно представить в виде

$$[1 - p(\zeta)]^{-1} = (1/2\sqrt{|r|})[\Delta^2 + \sin^2(\zeta)]^{-1/2}\exp[i\gamma(\zeta)],$$
$$\Delta = (1 - |r|)/2\sqrt{|r|}, \quad \gamma(\zeta) = \mathrm{arctg}\,\{[(1 + |r|)/(1 - |r|)]\,\mathrm{tg}(\zeta)\} - \zeta, \tag{9}$$

где Δ – характерная ширина резонанса (величина, обратная «остроте»), которая обычно много меньше ν. Полуширина резонанса Δ_p на уровне 0,5 есть

$$\Delta_p = \arcsin(\Delta). \tag{10}$$

Если $\Delta \ll 1$, то $\Delta_p \approx \Delta$. Это имеет место при условии

$$1 - |r| \ll 1, \tag{11}$$

т. е. для хорошо отражающих зеркал (различие между Δ_p и Δ составляет менее 0,1 % уже при $|r| \le 0{,}8$).

Из (4) можно найти характерное время установления τ_p поля в резонаторе:

$$\tau_p \equiv \tau_p(|r|) = N_p\tau, \quad N_p = [\ln(1/|r|)^{-1}]$$
$$(\tau_p(0) = 0, \quad \tau_p(1/e) = \tau, \quad \tau_p(1) = \infty), \tag{12}$$

которое выражается целым числом N_p (от числа, заключенного в квадратные скобки) интервалов τ. Если $|r|$ близко к единице (условие (11)), то в первом приближении

$$\tau_p \cong \tau[(1 - |r|)^{-1}] \quad (1 - |r| \ll 1). \tag{13}$$

Формула (13) по сравнению с точной формулой (12) дает относительную ошибку (в сторону увеличения τ_p) менее 1 % для $|r| \ge 0{,}98$. При этом можно положить

$$N_p \approx [Q_p], \quad Q_p = 1/\Delta_p, \tag{14}$$

где Q_p имеет смысл добротности резонатора. Отметим, что и в ИФП с колеблющимися зеркалами при малых амплитудах колебаний время установления по величине будет практически тем же самым, т. е. определяться формулами (12) или (13).

Режим «сверхмедленных» колебаний. Можно показать, что если время установления τ_p очень мало по сравнению с минимальным периодом колебаний зеркал:

$$\tau_p \ll T_{\min} \qquad (T_{\min} = 2\pi / \Omega_{\max}), \tag{15}$$

то в первом приближении в выражении (16) из [1] для $S(t\,|\,\omega)$ можно принять

$$f_1(t - n\tau) \approx f_1(t); \qquad p_n(t) \approx nf(t). \tag{16}$$

Очевидно, что при этом надо пренебречь всеми сдвигами τ в аргументах всех функций и считать $N(t) = \infty$. Учитывая это обстоятельство, для $S(t,\,\omega)$ получаем

$$\begin{gathered} S(t\,|\,\omega) = [1 - p(t,\omega)]^{-1} \exp[i\varepsilon_1 f_1(t)], \\ p(t,\omega) = r\exp[i\omega\tau + i\varepsilon f(t)], \qquad f(t) = g_2 f_2(t) - g_1 f_1(t), \\ \varepsilon = h\omega\tau, \quad \varepsilon_1 = h_1\omega\tau/2, \quad g_j = \delta x_j / \delta L, \quad \delta L = \delta x_1 + \delta x_2. \end{gathered} \tag{17}$$

Соответственно для ПФ (18) из [1] получаем

$$\begin{gathered} \Pi_1(t\,|\,\omega) = \widetilde{r}_1 \exp[i\varepsilon_1 f_1(t)] + aS(t\,|\,\omega)p(t,\omega); \\ \Pi_2(t\,|\,\omega) = bS(t\,|\,\omega)[p(t,\omega)]^{1/2}. \end{gathered} \tag{18}$$

Коэффициенты a, b здесь и далее такие, как в (5).

Из этих выражений видно, что эффект от колебаний зеркал проявляется двояким образом: во-первых, через резонансный множитель $[1 - p(t,\omega)]^{-1}$ в $S(t\,|\,\omega)$ и, во-вторых, через экспоненциальный фазовый множитель в $S(t\,|\,\omega)$ и $\widetilde{r}_1$. Резонансный эффект является главным в том смысле, что он накапливается за много обходов резонатора светом и может сильно влиять как на фазу, так и на амплитуду резонанса. Наиболее ярко он проявляется в том случае, когда колебания зеркал имеют одинаковые амплитуды ($g_1 = g_2$) и зеркала движутся в противофазе ($f_1(t) = -f_2(t)$). При этом ИФП ведет себя как «гармошка» с неподвижной средней плоскостью. Если колебания зеркал происходят с одинаковыми амплитудами и в фазе (ИФП при этом совершает колебания вдоль оси X как единое целое), то $f(t) = 0$ и резонансный эффект исчезает. Однако это имеет место только в данном приближении и при $g_1 = g_2$. В общем случае резонансный эффект всегда имеет место.

Переход к переменной ζ осуществляется по правилу (7) с заменой ω параметром ω_p в ε и ε_j. Замена производится на основании условия

$$\omega_p\tau \gg |\zeta|, \tag{19}$$

которое практически всегда выполняется. Например, для оптической области и расстояния между зеркалами L порядка 1 см – 1 км величина $\omega_p\tau$ имеет порядок $10^5 - 10^{10}$, тогда как обычно при работе в области одного резонанса параметр $|\zeta| \lesssim 1$. При этом вместо (12) для ПФ получаем формулы

$$\Pi_1(t\,|\,\zeta) = \widetilde{r}_1 \exp[i\delta_1(t)] + aS(t\,|\,\zeta)\,p(t,\zeta)]; \quad \Pi_2(t\,|\,\zeta) = bS(t\,|\,\zeta)[p(t,\zeta)]^{1/2};$$

$$S(t,\zeta) = [1 - p(t,\zeta)]^{-1} \exp[i\delta_1(t)], \quad p(t,\zeta) = |r| \exp[2i\zeta + 2i\delta(t)], \quad (20)$$

$$\delta(t) = \delta_2(t) - \delta_1(t) = \varepsilon_p f(t), \quad \delta_j(t) = \varepsilon_{pj} f_j(t),$$

$$\varepsilon_p = h\omega_p\tau, \quad \varepsilon_{pj} = h_j\,\omega_p\tau/2 \ \ (j = 1,2).$$

Параметр ε_p имеет смысл диапазона относительной (в единицах $\nu = c/2L$) частотной перестройки интерферометра из-за колебаний зеркал. Если $\varepsilon_p \gg 1$, то перестройка охватывает большое число порядков интерференции (межмодовых интервалов). Если ε_p порядка единицы, то перестройка происходит в пределах одного-двух межмодовых интервалов. Наконец, если $\varepsilon_p \ll 1$, то ИФП перестраивается лишь в малой области $|\zeta| \ll \nu$. Заметим, что (20) отличается от (8) лишь наличием фазового множителя $\exp[i\delta_1(t)]$ и зависимостью $p(t,\zeta)$ от времени.

Поскольку колебания зеркал приводят к угловой модуляции волн в резонаторе, то поле в резонаторе и соответственно выходные поля будут состоять из бесконечной дискретной совокупности волн с разными частотами [1]. В частности, если периоды колебаний зеркал соизмеримы, то

$$E_j(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_m E_{jm}(t,\omega) \exp(-i\omega_m t)\,d\omega \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots;\ j = 1,2),$$

$$E_{jm}(t,\omega) = \Pi_{jm}(\zeta)[E_0(\omega)\exp(i\kappa x_1)], \quad (21)$$

$$\zeta = (\omega - \omega_p)\tau/2, \quad \omega_m = \omega + m\Omega, \quad T = 2\pi/\Omega.$$

Здесь T – основной (максимальный) период колебаний, а

$$\Pi_{jm}(\zeta) = T^{-1} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} \Pi_j(t\,|\,\zeta) \exp(im\Omega t)\,dt \equiv \mathcal{F}_m[\Pi_j(t\,|\,\zeta)]. \quad (22)$$

Величины $\Pi_{jm}(\zeta)$ – это ПФ на частотах ω_m, т. е. коэффициенты фурье-разложения функции $\Pi_j(t\,|\,\zeta)$ (см. формулы (22) в [1]).

Приведем результаты вычислений $\Pi_{jm}(\zeta)$ для одного простого, но практически важного случая, когда оба зеркала совершают гармонические колебания с одинаковой частотой, т. е. когда функции движения зеркал (1) из [1] имеют вид

$$f_j(t) = \sin(\Omega t + \varphi_j) \quad (j = 1,2). \quad (23)$$

Тогда

$$f(t) = g\sin(\Omega t + \varphi),$$
$$g = |g_{12}|, \quad \varphi = \arg(g_{12}), \quad g_{12} = g_2\exp(i\varphi_2) - g_1\exp(i\varphi_1). \quad (24)$$

Используя известную формулу разложения

$$\exp[iz\sin(x)] = \sum_m J_m(z)\exp(imx) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{25}$$

где $J_m(z)$ – функции Бесселя, выражения для $\Pi_j(t\,|\,\zeta)$ можно представить в следующем виде:

$$\Pi_j(t\,|\,\zeta) = \sum_m \Pi_{jm}(\zeta)\exp(-im\Omega t) \quad (j = 1,2),$$

$$\Pi_{1m}(\zeta) = \tilde{r}_1(-1)^m J_m(\varepsilon_1)\exp(-im\varphi) + aA_m(\zeta), \quad \Pi_{2m}(\zeta) = bB_m(\zeta),$$

$$A_m(\zeta) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} [|r|\exp(2i\zeta)]^{n+1} J_m(a_n)\exp(im\alpha_n), \quad \alpha_n = \arg(a_n),$$

$$B_m(\zeta) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} [|r|\exp(2i\zeta)]^{n+1/2} J_m(b_n)\exp(im\beta_n), \quad \beta_n = \arg(b_n), \tag{26}$$

$$a_n = (n+1)\varepsilon_p g\exp(i\varphi) + \varepsilon_{p1}\exp(i\varphi_1),$$

$$b_n = (n+1/2)\varepsilon_p g\exp(i\varphi) + \varepsilon_{p1}\exp(i\varphi_1).$$

Коэффициенты $\Pi_{jm}(\zeta)$ можно вычислить и непосредственно по формуле (22), не прибегая к разложению (25), – результат будет такой же.

Полоса пропускания интерферометра по низкочастотному каналу (по Ω) определяется зависимостью коэффициентов $\Pi_{jm}(\zeta)$ от Ω, а его чувствительность к перемещению зеркал – первой производной $\left|\Pi_{jm}(\zeta)\right|^2$ по ζ в точке $\zeta = \Delta/2$. Из (26) видно, что $\Pi_{jm}(\zeta)$ не зависят от Ω, т. е. в этом приближении полоса пропускания интерферометра по низкочастотному каналу бесконечно велика и никак не связана с его чувствительностью, которая может быть любой.

Из (26) также нетрудно понять, что если значение ε достаточно мало, а именно

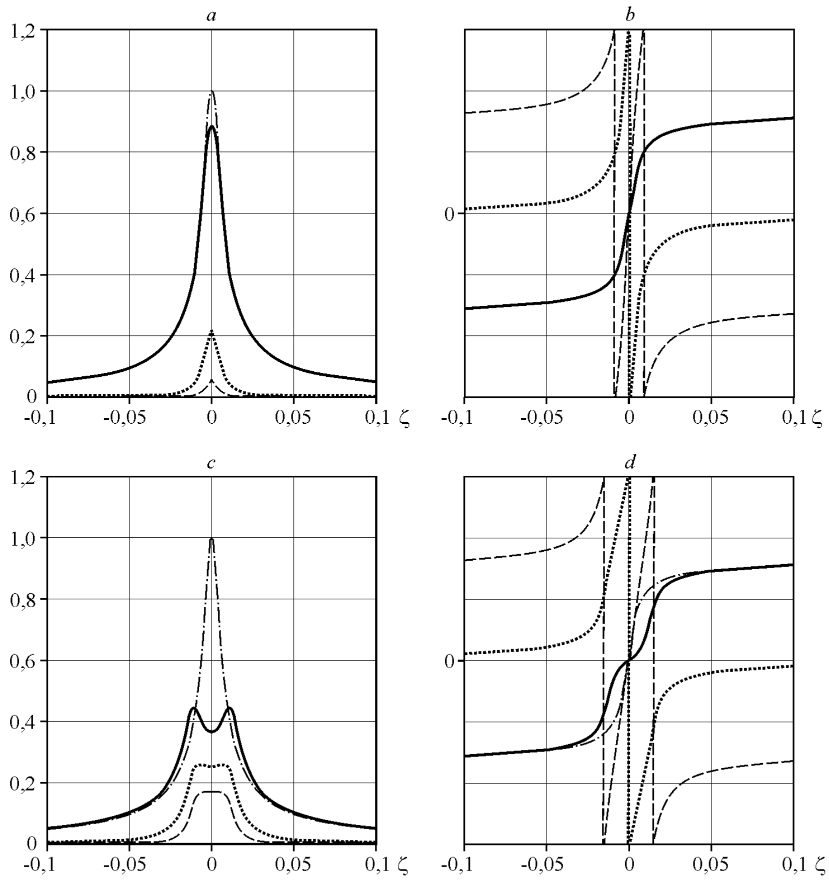
$$\varepsilon_p N_p \ll 1 \quad (N_p = \tau_p/\tau), \tag{27}$$

то $J_m(z)$ быстро уменьшаются с ростом m, так что в (21) вместо бесконечного ряда достаточно будет оставить только три первых слагаемых с $m = 0, \pm 1$.

На рисунке показаны типичные зависимости модуля и фазы функций $A_m(\zeta)$:

$$A_m(\zeta) = a_m(\zeta)\exp[i\alpha_m(\zeta)],$$
$$a_m(\zeta) = \left|A_m(\zeta)\right|, \quad \alpha_m(\zeta) = \arg(A_m(\zeta)). \tag{28}$$

Почти такие же зависимости (отличие составляет несколько процентов) получаются и для $B_m(\zeta)$, а также для случая, когда оба зеркала совершают колебания в противофазе с одинаковыми амплитудами. Характерным отличием $a_m(\zeta)$ от соответствующей «аппаратной» функции для неподвижных зеркал $a(\zeta)$ является наличие «провала» в центре при достаточно больших амплиту-



Модуль $a_m(\zeta)$ и фаза $\alpha_m(\zeta)$ функций $A_m(\zeta)$ для $m = 0, 1, 2$: при $\varepsilon_p = \Delta$ (a, b) и $\varepsilon_p = 5\Delta$ (c, d). Первое зеркало неподвижное, второе колеблется по синусоидальному закону, $|r| = 0{,}99$. (Сплошные линии (a, c) соответствуют $a_0(\zeta)$, точечные – $a_1(\zeta)$, пунктирные – $a_2(\zeta)$, штрихпунктирные – $a(\zeta)$. Сплошные линии (b, d) соответствуют $\alpha_0(\zeta)$, точечные – $\alpha_1(\zeta)$, пунктирные – $\alpha_2(\zeta)$, штрихпунктирные – $\alpha(\zeta)$)

дах колебаний зеркал ($\varepsilon_p > \Delta$). Фазовые характеристики $\alpha_m(\zeta)$ («перегибы» или даже смена знака) ведут себя адекватным образом.

Заключение. В представленной работе рассмотрено приближение, которое означает, что пренебрегается всеми эффектами запаздывания из-за конечной скорости света ($\tau = 0$). Практически это приближение реализуется только в малобазовых ИФП с длинами меньше или порядка 100 м. Однако его часто применяют в работах по длиннобазовым интерферометрам, которые планируется использовать в детекторах гравитационных волн (см., например, [4]). В этой связи заметим, что по предварительным данным [2, 6] принимаемый сигнал может иметь частоту от десятков до тысяч герц ($T \sim$ $\sim 10^{-1} - 10^{-3}$ с). Тогда из соображений чувствительности база ИФП должна быть порядка нескольких километров, а его добротность $Q_p \gtrsim 10^4$. В таком случае $\tau \sim 10^{-5}$ с, $\tau_p \sim \tau Q_p \gtrsim 10^4$ с, т. е. данное приближение здесь заведомо неприменимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кольченко А. П., Терентьев В. С., Троицкий Ю. В.** Передаточные функции интерферометра Фабри – Перо с изменяющейся во времени базой. Ч. I. Общая теория // Автометрия. 2007. **43**, № 3. С. 105.
2. **Mason J. E.** Signal Extraction and Optical Design for an Advanced Gravitational Wave Interferometer. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2001.
3. **Redding D., Regehr M., Sievers L.** Dynamic models of Fabry-Perot interferometers // Appl. Opt. 2002. **41**, N 15. P. 2894.
4. **Wise S., Mueller G., Reitze D. et al.** Linewidth-broadened Fabry-Perot cavities within future gravitational wave detectors // Class. Quantum Grav. 2004. **21**. P. S1031.
5. **Троицкий Ю. В.** Многолучевые интерферометры отраженного света. Новосибирск: Наука, 1985.
6. **Брагинский В. Б.** Гравитационно-волновая астрономия: новые методы измерений // УФН. 2000. **170**, № 7. С. 743.

Поступила в редакцию 12 декабря 2005 г.