

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА
В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ГЕТЕРОГЕННЫХ
ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ СО СМЕШАННОЙ КИНЕТИКОЙ**

А. М. Суноицкий

(Москва)

§ 1. Пусть ламинарный поток каплеобразной вязкой жидкости, содержащий некоторое вещество С, с концентрацией $c = c(x, y)$ обтекает тело с химически активной поверхностью так, что происходит гетерогенная химическая реакция вещества С с веществом поверхности. Задаче расчета переноса вещества к поверхности при гетерогенных реакциях со смешанной кинетикой для больших чисел Прандтля посвящен ряд исследований [1-4]. Ниже строится в замкнутой форме приближенное решение этой задачи.

Введем связанную с телом ортогональную систему координат x_1, y_1 , причем линия $y_1 = 0$ совпадает с контуром обтекаемого тела. Составляющие скорости $u_1(x_1, y_1), v_1(x_1, y_1)$ определяются из решения соответствующей задачи гидродинамики вязкой жидкости и считаются известными. Пусть $c_1(x_1, y_1)$ — концентрация вещества в произвольной точке потока, c_0 — концентрация вещества вдали от тела, k — константа скорости реакции, $n > 0$ — порядок реакции, τ — напряжение трения на поверхности, μ и ν — соответственно динамический и кинематический коэффициенты вязкости, D — коэффициент диффузии. Тогда в пренебрежении диффузионным переносом вверх по течению сравнительно с конвективным получим уравнение [1]

$$u_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = D \frac{\partial^2 c_1}{\partial y_1^2} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$c_1(x_1, y_1) = c_0 \quad \text{при } y_1 = \infty, \quad c_1(x_1, y_1) = c_0 \quad \text{при } x_1 = 0 \quad (1.2)$$

$$D \frac{\partial c_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} = k c_1^n(x_1, y_1) \quad \text{при } y_1 = 0 \quad (1.3)$$

При больших диффузионных числах Прандтля $\sigma = \nu/D$ можно $u_1(x_1, y_1)$ и $v_1(x_1, y_1)$ заменить их приближенным представлением вблизи границы

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{\tau(x_1) y_1}{\mu}, \quad v_1(x_1, y_1) = -\frac{\tau'(x_1) y_1^2}{2\mu} \quad (1.4)$$

Эффективное решение системы (1.1)–(1.4) представляет собой сложную задачу. Поэтому построим приближенное решение задачи следующим образом. Возьмем однопараметрическое семейство функций, удовлетворяющее (1.1)–(1.2). Параметр выберем из условия, что (1.3) удовлетворяется не в произвольной точке поверхности тела, а в среднем по поверхности тела, т. е. $c_1(x_1, y_1)$ удовлетворяет следующему интегральному соотношению (S — поверхность тела):

$$\int_S D \frac{\partial c_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} dS = \int_S k c_1^n(x_1, y_1) dS \quad \text{при } y_1 = 0 \quad (1.5)$$

Замена условия (1.3) на (1.5) была впервые предложена И. А. Кибелем для задачи теплообмена при излучении [5].

§ 2. Обозначим через V скорость набегающего потока, через l характерный размер тела; введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} x = \frac{x_1}{l}, \quad R = \frac{Vl}{\nu}, \quad y = \frac{y_1 R^{1/2} \sigma^{1/3}}{l}, \quad u = \frac{u_1}{V}, \quad v = \frac{v_1 R^{1/2}}{V} \\ c = \frac{c_1 - c_0}{c_0}, \quad z(x) = \frac{\tau(x_1) l}{\mu V R^{1/2} \sigma^{1/3}}, \quad \lambda = \frac{k c_0^{n-1} l}{D R^{1/2} \sigma^{1/3}} \\ \varphi = \left(\frac{\tau(x_1)}{\mu} \right)^{1/2} \frac{y_1 (R^{1/2} \sigma^{1/3})^{1/2}}{l^{1/2} V^{1/2}}, \quad t = 8^{1/2} \sigma^{-1/3} \int_0^x z^{1/2}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.1)$$

тогда система (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) в переменных t, φ примет вид

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \quad (2.2)$$

$$c(t, \varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi = \infty, \quad c(t, \varphi) = 0 \quad \text{при } t = 0$$

$$\int_0^r \frac{\partial c}{\partial \varphi} dt = 2^{1/2} \lambda \int_0^r (1+c)^n f^{-1}(t) dt \quad \left(r = 8^{-1/2} \sigma^{-1/3} \int_0^1 z^{1/2}(\xi) d\xi, f(t) = z^{1/2}[x(t)] \right)$$

Функция

$$c(t, \varphi) = M \left(1 - \int_0^{\varphi t^{-1/3}} \exp(-\frac{\eta^3}{9}) d\eta \right) / \int_0^\infty \exp(-\frac{\eta^3}{9}) d\eta$$

удовлетворяет первым трем соотношениям (2.2). Константа M определяется из четвертого соотношения (2.2), которое дает

$$(1 + M)^n + CM = 0 \quad \left(C = \frac{3^{4/3} r^{2/3}}{2^{3/2} \Gamma(1/3) \lambda B}, \quad B = \int_0^r f^{-1}(t) dt \right) \quad (2.3)$$

Поток вещества на поверхности определяется соотношением

$$J = D \int_0^l \frac{\partial c_1}{\partial y_1} dx_1 = kc_0^n l (1 + M)^n \quad (2.4)$$

В частности, для пограничного слоя пластины (решение Блазиуса) имеем

$$C = 2^{-1/3} 3^{2/3} \Gamma^{-1}(1/3) \alpha^{1/3} \lambda^{-1} \quad (2.5)$$

Для реакции первого порядка ($n = 1$) равенство (2.4) приводится к виду

$$J = kc_0 l \left(1 - \frac{1}{1 + C} \right) = kc_0 l \left(1 - \frac{1}{1 + 2^{-1/3} 3^{2/3} \Gamma^{-1}(1/3) \alpha^{1/3} \lambda^{-1}} \right) \quad (2.6)$$

Точное решение Левича и Меймана для реакции первого порядка на пластине [1] при малых λ дает

$$J \simeq kc_0 l (1 - 0.440\delta + 0.184\delta^2 - \dots) \quad (2.7)$$

приближенное решение (2.6) дает

$$J = kc_0 l (1 - 0.451\delta + 0.204\delta^2 - \dots) \quad (2.8)$$

$$(\delta = 3^{1/3} \beta^{-2/3} \Gamma(1/3) \Gamma^{-1}(2/3) kl^{1/2}, \quad \beta = 2^{-1/2} \alpha^{1/2} DV^{3/4} \nu^{-1/4})$$

при $\delta = 0.3$ из (2.6) — (2.8) получим соответственно

$$J = 0.881 kc_0 l, \quad J = 0.884 kc_0 l, \quad J = 0.882 kc_0 l$$

§ 3. Указанное в предыдущем параграфе решение можно также получить из следующих соображений. Если (1.3) заменить условием $c_1(x_1, y_1) = 0$ при $y_1 = 0$, то задача (1.1) — (1.4) имеет точное решение [1.6]; обозначим его через $c_1^0(x_1, y_1) = c_0 \psi(x_1, y_1)$. Очевидно, что решение, принимающее при $y_1 = 0$ значение $c_* = \text{const}$, имеет вид

$$c_1 = (c_0 - c_*) \psi(x_1, y_1) + c_* \quad (3.1)$$

Подставляя c_1 , определенное по формуле (3.1), в (1.5), получим

$$\frac{D(c_0 - c_*)}{S} \int_S \frac{\partial \psi(x_1, y_1)}{\partial y_1} dS = kc_*^n \quad (3.2)$$

Левая часть равенства (3.2) представляет собой поток вещества на поверхности в случае (3.1), отнесенный к единице поверхности. Таким образом, можно воспользоваться результатами решений задач (1.1) — (1.4) для случая постоянной концентрации на поверхности.

Рассмотрим в качестве примера обтекание сферы медленным потоком вязкой жидкости (решение Стокса). Для сферы при постоянной концентрации имеем [1]

$$J = 7.98 c_0 a^{3/2} D^{2/3} V^{1/3}$$

где a — радиус сферы, (3.2) принимает вид

$$\frac{7.98 (c_0 - c_*) D^{2/3} V^{1/3} a^{3/2}}{4\pi a^2} = kc_*^n \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) легко решается графически (см., например, [1, 7]). Для реакции первого порядка ($n = 1$)

$$J = 4\pi a^2 kc_* \frac{4\pi a^2 kc_0}{1 + \frac{4\pi a^{3/2} k}{7.98 D^{2/3} V^{1/3}}} \quad (3.4)$$

§ 4. Д. А. Франк-Каменецкий ввел понятие равнодоступной поверхности [7] (поверхности, для которой условия транспорта вещества в любой точке одинаковы) и предложил метод расчета скорости переноса вещества к равнодоступной поверхности. К равнодоступным поверхностям относятся поверхности, у которых нормальная к поверхности составляющая скорости не зависит от продольной координаты [1.3]. Имеет смысл приближенно рассматривать произвольные поверхности как равнодоступные

в среднем, т. е. считать, что на каждой единице поверхности поток вещества равен JS^{-1} , где J — поток вещества на всей поверхности при некоторой постоянной концентрации c_* , S — площадь поверхности. Следуя методу Д. А. Франк-Каменецкого, имеем

$$JS^{-1} = kc_*^n \quad (4.1)$$

что, как нетрудно видеть, эквивалентно решению задачи (1.1) — (1.4) при замене условия (1.3) на (1.5).

В недавних работах американских авторов [2,3] метод Д. А. Франк-Каменецкого прямо прилагается к неравнодоступным поверхностям. Шамбре и Акривос [2], например, записывают равенство потоков вещества в данной точке для пластины при $n = 1$

$$0.34(c_0 - c_*)D^{2.2}v^{-1/2}x^{-1/2} = kc_*$$

что приводит к довольно большим неточностям.

Поступила 8 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г., Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Chambré D. L., Acrivos A. On chemical surface reactions in laminar boundary layer flows. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, N 11.
3. Rosner D. E. Chemically frozen boundary layers with catalytic surface reaction. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, N 5.
4. Супоничкий А. М. О расчете скорости переноса вещества в ламинарном потоке жидкости при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой. ПМТФ, 1960, № 2.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
6. Lightill M. J. Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc., 1950, vol. 202, S. A., N 1070.
7. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд-во АН СССР, 1947.

РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОЛИТРОПЫ ПРОДУКТОВ ВЗРЫВА КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ

А. Я. Апин, И. М. Воскобойников, Ю. А. Карташов, В. Д. Лютов
(Москва)

Адиабата продуктов взрыва во фронте детонационной волны может быть описана политропическим законом

$$p = Av^{-n} \quad (1)$$

причем показатель n зависит от состава продуктов взрыва, их давления и температуры. Данные о детонации тротила и гексогена [1] позволяют предполагать, что при давлениях выше 100 тыс. атм зависимостью n от давления можно пренебречь.

Температура детонации также слабо влияет на величину показателя политропы. Так, значения n для продуктов взрыва ВВ достаточно близки, хотя температуры детонации меняются на 2000° К. Таким образом, в первом приближении можно считать, что показатель политропы продуктов взрыва во фронте детонационной волны конденсированных ВВ полностью определяется составом продуктов взрыва.

В работе [2] было показано, что состав продуктов взрыва зависит только от элементарного состава ВВ и может быть записан, придерживаясь следующих приближенных правил. Водород полностью окисляется до H_2O , а углерод окисляется до CO . При большем количестве кислорода окисление углерода происходит до CO_2 . Однако для ВВ с нулевым и небольшим отрицательным и положительным кислородным балансом до CO_2 окисляется не более 70% углерода.

Выше было сделано предположение, что адиабата продуктов взрыва может быть описана политропическим законом (1). Если это предположение распространить на все компоненты продуктов взрыва, то можно показать, что

$$n^{-1} = \sum \alpha_i n_i^{-1} \quad (2)$$

Здесь α_i — объемная доля компоненты продуктов взрыва, n_i — показатель политропы для этой компоненты. Так как вычисление α_i представляет большие трудности, показатель политропы искался в виде

$$n^{-1} = \sum \beta_i n_i^{-1} \quad (3)$$

где β_i — молярная доля компоненты продуктов взрыва.

Переход от α_i к β_i будет тем более оправдан, чем ближе значения объемов, занимаемых 1 молекул компонент продуктов взрыва.