

УДК 538.4

РЕШЕНИЕ МЕТОДАМИ ГОМОТОПИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КВАДРАТУРЫ ЗАДАЧИ О СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НА РАСТЯГИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА И МАССООБМЕНА

Х. Тэбэй, М. А. Могими*, А. Кимизэйфэр**, М. А. Могими

Университет Шэхиды Бэхонэра Кермана, 7616914111 Керман, Иран

* Исламский независимый университет Шираза, Шираз, Иран

** Ольборгский университет, ДК-9220 Ольборг, Дания

E-mails: tabaei.hamid@gmail.com, akf@me.aau.dk, moghimi64@yahoo.com

Представлено аналитическое решение задачи о свободно-конвективном магнитогидродинамическом течении на растягиваемой пластине с учетом эффекта Холла и массообмена. Преобразованием подобия уравнения Навье — Стокса, энергии, закона Ома и массообмена приводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием одного из аналитических методов решения нелинейных задач, а именно метода гомотопического анализа, аналитически решаются определяющие уравнения. Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов, полученными с использованием перспективного численного метода дифференциальной квадратуры (МДК), развитого авторами данной работы. Показано, что результаты расчетов, полученные с помощью аналитического метода и МДК, хорошо согласуются. Проведено тестирование МДК, изучены зависимости скорости, температуры и концентрации от безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: профили температуры, распределение скорости, метод дифференциальной квадратуры, эффект Холла, метод гомотопического анализа, автомоделльное решение.

Введение. Явление магнитогидродинамического (МГД) течения на растягиваемой пластине при наличии тепломассообмена имеет важные приложения в машиностроении, электрохимии, нефтяной промышленности и в процессах обработки полимеров. Протягивая такую пластину в вязкой жидкости, можно управлять скоростью охлаждения и получать продукт с желаемыми характеристиками. Исследование стационарного течения на движущейся непрерывной плоской поверхности начато в работе [1]. В [2–7] изучены различные аспекты этой задачи. Следует отметить, что в [1–7] не учитывался эффект Холла.

В работе [8] исследован эффект Холла в случае свободно-конвективного МГД-течения на полубесконечной пластине при наличии массообмена и теплового излучения. В [9] с использованием конечно-разностных схем с центральными разностями изучены эффекты Холла в свободно-конвективном МГД-течении при наличии массообмена на растягиваемой пластине.

Большинство задач гидроаэромеханики и теплообмена являются нелинейными и не имеют аналитических решений. Метод гомотопического анализа (МГА), предложенный в

работе [10], является одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных уравнений. В [11] с использованием МГА исследованы поведение и устойчивость генераторов Ван дер Поля — Матъе — Дуффинга для различных функций возбуждения, в [12] проведено сравнение МГА и методов гомотопических возмущений для решения нелинейных уравнений теплопроводности и конвекции. В работе [13] представлено аналитическое решение для генераторов Ван дер Поля — Дуффинга, а в [14] проведено сравнение МГА и метода гомотопических возмущений для простых нелинейных задач. Аналитическое решение задачи о частичном скольжении жидкости четвертого класса с переменной вязкостью получено в [15]. В работе [16] МГА использован для решения задачи естественной конвекции жидкости Дарси на вертикальном полном конусе в пористой среде с заданным тепловым потоком на поверхности. В [17] с помощью МГА исследовано аналитическое решение двумерной задачи о застойном течении на сжимающейся пластине. Метод гомотопического анализа для решения задачи о смешанном конвекционном течении Марангони в пограничном слое предложен в работе [18]. Этот метод позволяет управлять областью сходимости.

Метод дифференциальной квадратуры (МДК) является методом высокого порядка и по сравнению с методами низкого порядка (методами конечных разностей, конечных элементов и т. д.) имеет ряд преимуществ, таких как высокая точность при малом числе узлов сетки, незначительные вычислительные затраты. Таким образом, этот метод представляется весьма перспективным. Некоторые исследователи используют этот метод при численном решении задачи о течении жидкости. В работах [19, 20] обсуждаются преимущества МДК при решении задач гидроаэромеханики течения несжимаемой жидкости, в [21] МДК используется при решении уравнений магнитной гидродинамики в прямоугольном канале при наличии внешнего поперечного наклонного магнитного поля. В [22] с помощью МДК с использованием уравнений Навье — Стокса в терминах скорость — завихренность решена эталонная тестовая двумерная задача естественной конвекции в каверне.

До настоящего времени не было проведено исследования аналитического решения задачи о свободно-конвективном МГД-течении на растягиваемой пластине с учетом эффекта Холла и массообмена. В данной работе МГА используется для нахождения аналитического решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в автономной задаче. Проведено сравнение результатов расчетов с результатами, полученными с помощью МДК при решении нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается стационарное свободно-конвективное течение и массообмен несжимаемой вязкой электропроводящей жидкости на плоской поверхности, выходящей из горизонтального разреза на вертикальной поверхности и растягиваемой со скоростью, пропорциональной расстоянию от фиксированного начала координат O . Если пренебречь вязкой диссипацией, то уравнения непрерывности, импульса и энергии с учетом массообмена и уравнения обобщенного закона Ома для стационарного случая можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho(1 + m^2)}(u + mw), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho(1 + m^2)}(mu - w), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - k_0(C - C_\infty)^n.$$

Граничные условия для этой задачи следующие:

$$u = bx, \quad v = w = 0, \quad T = T_w, \quad C = C_w \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = w = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

В приведенных выше уравнениях u, v, w — компоненты скорости в направлениях осей x, y, z соответственно; T — температура; g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент линейного расширения; β^* — температурный коэффициент объемного расширения с учетом концентрации; C, D — концентрация примеси и коэффициент молекулярной диффузии соответственно; k_0 — константа скорости реакции; n — порядок реакции; ν, α — кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости соответственно; $m = \sigma B_0 / (en_e)$ — параметр тока Холла; B_0 — интенсивность постоянного магнитного поля; σ — электропроводность.

С использованием техники получения автомодельного решения уравнения (1) могут быть преобразованы в эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем следующие переменные подобия:

$$u = bx f'(\eta), \quad v = -\sqrt{b\nu} f(\eta), \quad w = bx g(\eta), \quad \eta = \sqrt{b/\nu} y,$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}. \quad (2)$$

Подставляя уравнения (2) в (1), получаем уравнения [9]

$$f''' + f f'' - f'^2 + \text{Gr} \theta + \text{Gc} \varphi - \frac{M}{1 + m^2} (f' + mg) = 0,$$

$$g'' + f g' - \left(f' + \frac{M}{1 + m^2} \right) g + \frac{Mm}{1 + m^2} f' = 0, \quad (3)$$

$$\theta'' + \text{Pr} f \theta' = 0,$$

$$\varphi'' + \text{Sc} (\varphi' f - \gamma \varphi^n) = 0$$

с граничными условиями

$$f'(0) = 1, \quad f(0) = g(0) = 0, \quad \theta(0) = \varphi(0) = 1,$$

$$f'(\infty) = g(\infty) = \theta(\infty) = \varphi(\infty) = 0. \quad (4)$$

В (3), (4) $M = \sigma B_0^2 / (\rho b)$ — магнитный параметр; $\text{Gr} = g\beta(T_w - T_\infty) / (b^2 x)$ — локальное число Грасгофа; $\text{Gc} = g\beta^*(C_w - C_\infty) / (b^2 x)$ — локальное модифицированное число Грасгофа; $\text{Pr} = \nu / \alpha$ — число Прандтля; $\text{Sc} = \nu / D$ — число Шмидта; $\gamma = k_0(C_w - C_\infty)^{n-1} / b$ — безразмерный параметр химической реакции.

Геометрия задачи показана на рис. 1.

2. Методы решения. В настоящей работе поставленная задача исследуется с использованием МГА и МДК.

2.1. *Метод гомотопического анализа.* Определяющими уравнениями для свободно-конвективного МГД-течения на растягиваемой поверхности в пористой среде с учетом тепломассообмена являются уравнения (3). Нелинейные операторы определены следующим образом:

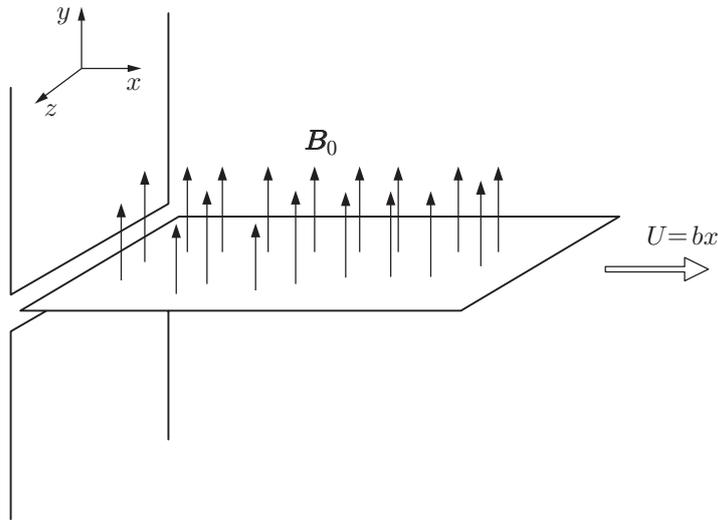


Рис. 1. Физическая модель задачи

$$N_f[f(\eta; q)] = \frac{\partial^3 f(\eta; q)}{\partial \eta^3} + f(\eta; q) \frac{\partial^2 f(\eta; q)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f(\eta; q)}{\partial \eta} - \frac{M}{1+m^2} \left(\frac{\partial f(\eta; q)}{\partial \eta} + mg(\eta; q) \right) + \text{Gr} \theta(\eta; q) + \text{Gc} \varphi(\eta; q) = 0,$$

$$N_g[g(\eta; q)] = \frac{\partial^2 g(\eta; q)}{\partial \eta^2} + f(\eta; q) \frac{\partial g(\eta; q)}{\partial \eta} + \frac{M}{1+m^2} \frac{\partial f(\eta; q)}{\partial \eta} - g(\eta; q) \left(\frac{\partial f(\eta; q)}{\partial \eta} + \frac{M}{1+m^2} \right) = 0,$$

$$N_\theta[\theta(\eta; q)] = \frac{\partial^2 \theta(\eta; q)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} f(\eta; q) \frac{\partial \theta(\eta; q)}{\partial \eta} = 0,$$

$$N_\varphi[\varphi(\eta; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(\eta; q)}{\partial \eta^2} + \text{Sc} f(\eta; q) \frac{\partial \varphi(\eta; q)}{\partial \eta} = 0.$$

Здесь $q \in [0, 1]$ — параметр вложения. Значению параметра $q = 0$ соответствуют заданные начальные функции $U_0(\eta)$, $Y_0(\eta)$, $V_0(\eta)$, значению $q = 1$ — точное решение $U(\eta)$, $Y(\eta)$, $V(\eta)$:

$$\begin{aligned} f(\eta; 0) &= U_0(\eta), & f(\eta; 1) &= U(\eta), & g(\eta; 0) &= W_0(\eta), & g(\eta; 1) &= W(\eta), \\ \theta(\eta; 0) &= Y_0(\eta), & \theta(\eta; 1) &= Y(\eta), & \varphi(\eta; 0) &= V_0(\eta), & \varphi(\eta; 1) &= V(\eta). \end{aligned}$$

Разложения функций $f(\eta; q)$, $g(\eta; q)$, $\theta(\eta; q)$, $\varphi(\eta; q)$ в ряды Тейлора имеют вид

$$f(\eta; q) = U_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\eta) q^m; \quad (5)$$

$$g(\eta; q) = W_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\eta) q^m, \quad \theta(\eta; q) = Y_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) q^m,$$

$$\varphi(\eta; q) = V_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(\eta) q^m,$$

где

$$\begin{aligned} U_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m f(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, & W_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m g(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \\ Y_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \theta(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, & V_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \varphi(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \end{aligned}$$

В зависимости от характера определяющих уравнений можно использовать различные основные функции [11]. Можно использовать базовые функции в виде

$$\begin{aligned} U(\eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} b_{pm} \eta^p e^{-m\eta}, & W(\eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} z_{pm} \eta^p e^{-m\eta}, \\ Y(\eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} d_{pm} \eta^p e^{-m\eta}, & V(\eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{pm} \eta^p e^{-m\eta}, \end{aligned}$$

где $b_{pm}, z_{pm}, d_{pm}, k_{pm}$ — неизвестные коэффициенты, которые должны быть определены. Выбрав базовую функцию, необходимо выбрать вспомогательные функции $H_f(\eta), H_g(\eta), H_\theta(\eta), H_\varphi(\eta)$, начальные аппроксимации $U_0(\eta), W_0(\eta), Y_0(\eta), V_0(\eta)$ и вспомогательные линейные операторы $L_f, L_g, L_\theta, L_\varphi$, так чтобы решения соответствующих уравнений деформации со старшими производными имели тот же вид, что и основные функции [11]. Следует отметить, что наличие таких выражений, как $\eta \sin(m\eta)$, нарушает сходимость к аналитическому решению.

Линейные операторы $L_f, L_g, L_\theta, L_\varphi$ выбраны в виде

$$\begin{aligned} L_f[f(\eta; q)] &= \frac{\partial^3 f(\eta; q)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial f(\eta; q)}{\partial \eta}, & L_g[g(\eta; q)] &= \frac{\partial^2 g(\eta; q)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial g(\eta; q)}{\partial \eta}, \\ L_\theta[\theta(\eta; q)] &= \frac{\partial^2 \theta(\eta; q)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta(\eta; q)}{\partial \eta}, & L_\varphi[\varphi(\eta; q)] &= \frac{\partial^2 \varphi(\eta; q)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi(\eta; q)}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (6) следует

$$\begin{aligned} L_f[c_1 + c_2 \eta + c_3 e^{-\eta}] &= 0, & L_g[c_4 + c_5 e^{-\eta}] &= 0, \\ L_\theta[c_6 + c_7 e^{-\eta}] &= 0, & L_\varphi[c_8 + c_9 e^{-\eta}] &= 0, \end{aligned}$$

где c_1, \dots, c_9 — константы интегрирования. Согласно правилу представления решения и начальных условий начальные аппроксимации U_0, W_0, Y_0, V_0 , а также константы интегрирования c_1, \dots, c_9 выбираются в виде

$$U_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad W_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad Y_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad V_0(\eta) = e^{-\eta}.$$

Уравнения деформации нулевого порядка и граничные условия для $f(\eta), g(\eta), \theta(\eta; q), \varphi(\eta; q)$ следующие:

$$(1 - q)L_f[f(\eta; q) - U_0(\eta)] = qh_f H_f(\eta) N_f[f(\eta; q)]; \quad (7)$$

$$f(0; q) = 1, \quad f(\infty; q) = 0;$$

$$(1 - q)L_\theta[\theta(\eta; q) - Y_0(\eta)] = qh_\theta H_\theta(\eta) N_\theta[\theta(\eta; q)]; \quad (8)$$

$$\theta(0; q) = 1, \quad \theta(\infty; q) = 0;$$

$$(1 - q)L_\varphi[\varphi(\eta; q) - V_0(\eta)] = qh_\varphi H_\varphi(\eta) N_\varphi[\varphi(\eta; q)]; \quad (9)$$

$$\varphi(0; q) = 1, \quad \varphi(\infty; q) = 0$$

(h — вспомогательный параметр, управляющий сходимость и точностью решения).

Согласно правилу представления решения с учетом (5) вспомогательная функция $H(\eta)$ может быть выбрана следующим образом:

$$H_f(\eta) = \eta^p e^{-m\eta}, \quad H_g(\eta) = \eta^p e^{-m\eta}, \quad H_\theta(\eta) = \eta^p e^{-m\eta}, \quad H_\varphi(\eta) = \eta^p e^{-m\eta}.$$

Дифференцируя уравнения (7)–(9) по параметру вложения q m раз, полагая $q = 0$ и деля полученное выражение на $m!$, имеем

$$U_m(\eta) = \chi_m U_{m-1}(\eta) + h \left(\frac{1}{2} \int_0^\eta H_f(\eta) R_m(U_{m-1}) d\eta - \frac{1}{2} e^{-q} \int_0^\eta H_f(\eta) e^q R_m(U_{m-1}) d\eta + \right. \\ \left. + c_1 + c_2 e^q + c_3 e^{-\eta} \right); \quad (10)$$

$$U_m(0) = 0, \quad U'_m(0) = 0, \quad U'_m(\infty) = 0;$$

$$W_m(\eta) = \chi_m W_{m-1}(\eta) + h \int_0^\eta \int_0^\mu H_g(\eta) e^\eta R_m(W_{m-1}) d\eta d\mu + c_4 + c_5 e^{-\eta}; \quad (11)$$

$$W_m(0) = 0, \quad W_m(\infty) = 0;$$

$$Y_m(\eta) = \chi_m Y_{m-1}(\eta) + h \int_0^\eta \int_0^\mu H_\theta(\eta) e^\eta R_m(Y_{m-1}) d\eta d\mu + c_6 + c_7 e^{-\eta}; \quad (12)$$

$$Y_m(0) = 0, \quad Y_m(\infty) = 0;$$

$$V_m(\eta) = \chi_m V_{m-1}(\eta) + h \int_0^\eta \int_0^\mu H_\varphi(\eta) e^\eta R_m(V_{m-1}) d\eta d\mu + c_8 + c_9 e^{-\eta}; \quad (13)$$

$$V_m(0) = 0, \quad V'_m(\infty) = 0.$$

Уравнения (10)–(13) являются уравнениями деформации порядка m , где

$$R_m(U_{m-1}) = \frac{d^3 U_{m-1}(\eta)}{d\eta^3} + \text{Gr } Y(\eta) + \text{Gc } V(\eta) - \frac{M}{1+m^2} \left(m W_{m-1}(\eta) + \frac{dU_{m-1}(\eta)}{d\eta} \right) - \\ - \sum_{z=0}^{m-1} \frac{dU_z(\eta)}{d\eta} \frac{dU_{m-1-z}(\eta)}{d\eta} + \sum_{z=0}^{m-1} U_z(\eta) \frac{d^2 U_{m-1-z}(\eta)}{d\eta^2},$$

$$R_m(W_{m-1}) = \frac{d^2 W_{m-1}(\eta)}{d\eta^2} + \frac{Mm}{1+m^2} \sum_{z=0}^{m-1} \frac{dU_z(\eta)}{d\eta} \frac{dU_{m-1-z}(\eta)}{d\eta} + \\ + \sum_{z=0}^{m-1} U_z(\eta) \frac{dW_{m-1-z}(\eta)}{d\eta} - \sum_{z=0}^{m-1} W_z(\eta) \frac{dU_{m-1-z}(\eta)}{d\eta} - \frac{M}{1+m^2} W_{m-1}(\eta),$$

$$R_m(Y_{m-1}) = \frac{d^2 Y_{m-1}(\eta)}{d\eta^2} + \text{Pr} \sum_{z=0}^{m-1} U_z(\eta) \frac{dY_{m-1-z}(\eta)}{d\eta},$$

$$R_m(V_{m-1}) = \frac{d^2 V_{m-1}(\eta)}{d\eta^2} + \text{Sc} \left(\sum_{z=0}^{m-1} U_z(\eta) \frac{dV_{m-1-z}(\eta)}{d\eta} - \right. \\ \left. - \gamma \sum_{r_1=0}^m V_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} V_{r_1-r_2} \cdots \sum_{r_{n-1}=0}^{r_{n-2}} V_{r_{n-2}-r_{n-1}}(\eta) V_{r_{n-1}}(\eta) \right), \\ \chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

Скорость сходимости можно увеличить, выбрав подходящие значения m, p . Согласно правилу представления решения такими значениями являются $p = 0, m = 1$. Поэтому соответствующая вспомогательная функция определена как $H_f(\eta) = e^{-\eta}$. В результате первые и вторые члены ряда решения имеют вид

$$U_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad Y_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad V_0(\eta) = e^{-\eta}, \\ U_1(\eta) = -0,5556h e^{-2\eta} - 0,667h \text{Gc} e^{-2\eta} + 0,333h \text{Gr} e^{-2\eta} + 0,333h \text{Gc} e^{-2\eta} + \dots, \\ Y_1(\eta) = 0,667h \text{Pr} c e^{-\eta} - 0,6hN \text{Pr} a e^{-\eta} - 0,75h \text{Pr} N^2 e^{-\eta} - 0,667h \text{Pr} \text{Gc} e^{-2\eta} + \dots, \\ V_1(\eta) = -0,667h \text{Sc} c e^{-\eta} - 0,222h \text{Sc} e^{-\eta} + 0,333h e^{-2\eta} - 0,667h \text{Sc} c e^{-2\eta} + \dots$$

Данное решение должно сходиться к аналитическому. Следует отметить, что вспомогательный параметр h управляет сходимостью и точностью решения [10]. Чтобы определить область, в которой решение в виде рядов не зависит от h , было построено большое количество h -кривых. Область, в которой графики зависимостей $f, f', f'', g, g', \theta, \theta', \varphi, \varphi'$ от h являются горизонтальными линиями, известна как область сходимости соответствующей функции. Объединение областей сходимости функций $f(\eta), g(\eta), \theta(\eta), \varphi(\eta)$ и их производных известна как полная область сходимости.

Чтобы изучить влияние параметра h на сходимость решения, графики h -кривых при выбранных значениях постоянных были построены для решения с аппроксимацией 15-го порядка (рис. 2).

2.2. *Метод дифференциальной квадратуры.* Основная идея метода дифференциальной квадратуры состоит в том, что производная функции по пространственной переменной на заданном множестве точек аппроксимирована как взвешенная линейная сумма в выбранных точках в области изменения этой переменной. Чтобы пояснить аппроксимацию в МДК, рассмотрим функцию $f(\eta)$ в области $0 \leq \eta \leq a$. Согласно МДК функция $f(\eta)$ может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\left. \frac{\partial^r f(\eta)}{\partial \eta^r} \right|_{\eta, \tau = \eta_i} = \sum_{m=1}^{N_\eta} A_{im}^{(r)} f(\eta_m) = \sum_{m=1}^{N_\eta} A_{ij}^{(r)} f_m, \quad i = 1, 2, \dots, N_\eta.$$

Поэтому весовые коэффициенты для производных первого порядка в направлении η_i определяются по формуле [23]

$$A_{ij} = \begin{cases} - \sum_{j=1, i \neq j}^{N_\eta} A_{ij}, & i = j, \\ \frac{1}{a} \frac{M(\eta_i)}{(\eta_i - \eta_j)M(\eta_j)}, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_\eta, \quad M(\eta_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^{N_\eta} (\eta_i - \eta_j).$$

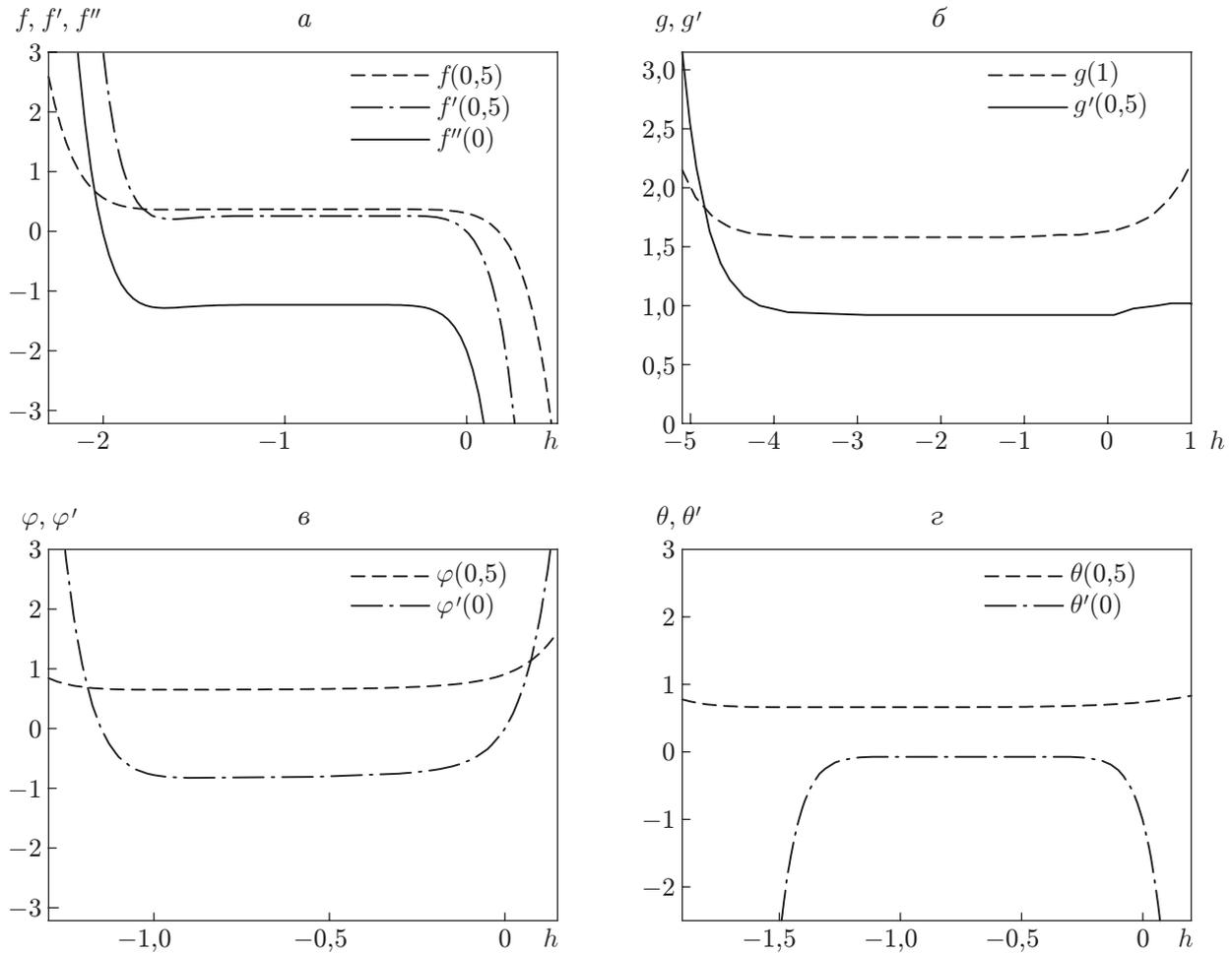


Рис. 2. h -кривые решения с аппроксимацией 15-го порядка:
 а — $f(0,5)$, $f'(0,5)$, $f''(0)$; б — $g(1)$, $g'(0,5)$; в — $\varphi(0,5)$, $\varphi'(0)$; г — $\theta(0,5)$, $\theta'(0)$

Весовые коэффициенты производной высшего порядка могут быть получены следующим образом [23]:

$$[A_{ij}^{(r)}] = [A_{ij}^{(r-1)}][A_{ij}] = [A_{ij}][A_{ij}^{(r-1)}].$$

В этой работе используется сеточное распределение Чебышева — Гаусса — Лобэпто

$$\frac{\eta_i}{a} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_\eta - 1} \pi \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_\eta.$$

Согласно МДК дискретизированные определяющие уравнения и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\sum_{n=1}^{N_\eta} C_{in} f_n + f_i \sum_{n=1}^{N_\eta} B_{in} f_n - \left(\sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in} f_n \right)^2 + Gr \theta + Gc \varphi - \frac{M}{1+m^2} \left(\sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in} f_n + mg \right) = 0$$

$$(i = 3, \dots, N_\eta - 1),$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{N_\eta} B_{in}g_n + f_i \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}g_n - \left(\sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}f_n + \frac{M}{1+m^2} \right) g + \frac{Mm}{1+m^2} \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}f_n &= 0 \\
 (i = 2, \dots, N_\eta - 1), \\
 \sum_{n=1}^{N_\eta} B_{in}\theta_n + \text{Pr } f_i \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}\theta_n &= 0 \quad (i = 2, \dots, N_\eta - 1), \\
 \sum_{n=1}^{N_\eta} B_{in}\varphi_n + \text{Sc} \left(f_i \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}\varphi_n - \gamma\varphi^n \right) &= 0 \quad (i = 2, \dots, N_\eta - 1), \\
 \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}f_n = 1, \quad f_i = g_i = 0, \quad \theta_i = \varphi_i = 1 \quad (i = 1), \\
 \sum_{n=1}^{N_\eta} A_{in}f_n = g_i = \theta_i = \varphi_i = 0 \quad (i = N_\eta).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь B , C — весовые коэффициенты второго и третьего порядка соответственно. Значения f_i , g_i , θ_i и φ_i в каждом узле области решения могут быть получены в результате решения уравнений (14).

3. Результаты исследования и их обсуждение. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (4) решается аналитически с использованием МГА.

Решения для $f'(\eta)$ и $\varphi(\eta)$, полученные с использованием МГА, сравниваются с результатами численного решения на основе МДК. Из табл. 1, 2 следует, что МГА позволяет получить аналитическое решение с высокой степенью точности с использованием нескольких итераций. Далее исследовалось влияние магнитного параметра M , параметра Холла m и параметра химической реакции γ на осевую скорость f' , поперечную скорость f , скорость g вдоль z -направления, температуру θ и концентрацию φ . На рис. 3,а-в показано, что с увеличением магнитного параметра M скорость уменьшается. Замедление движения жидкости вызывает увеличение силы сопротивления (силы Лоренца). На рис. 3,г,д видно, что с увеличением магнитного параметра толщины температурного и концентрационного слоев увеличиваются.

На рис. 4 представлены зависимости скорости, температуры и концентрации от параметра Холла m . Из рис. 4,а-в следует, что осевая и поперечная скорости увеличиваются с увеличением параметра Холла m , в то время как скорость g вдоль z -направления уменьшается. Изменение температуры и концентрации показано на рис. 4,г,д. Видно, что с увеличением параметра Холла m толщины температурного и концентрационного пограничных слоев уменьшаются.

Изучено влияние химической реакции на свободно-конвективный поток и массообмен электропроводящей жидкости на растягиваемой пластине при наличии магнитного поля. На рис. 5,а видно, что с увеличением параметра химической реакции γ осевая скорость уменьшается. Из рис. 5,б,в следует, что толщины температурного и концентрационного пограничных слоев уменьшаются с увеличением параметра химической реакции γ .

Заключение. В работе представлено аналитическое решение задачи о свободно-конвективном МГД-течении на растягиваемой пластине с учетом эффекта Холла и массообмена, полученное с использованием МГА. Показано, что с использованием МГА можно

Таблица 1

Решение, полученное с помощью МГА, и численное решение на основе МДК для функции $f'(\eta)$
при $Pr = 0,7$, $M = 0,5$, $Gr = Gc = 0,5$, $Sc = 0,5$, $n = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$

η	$f'(\eta)$				
	МГА (3-й порядок)	МГА (5-й порядок)	МГА (10-й порядок)	МГА (15-й порядок)	МДК (численное решение)
0,5	0,735 926 35	0,738 347 21	0,742 658 56	0,743 382 52	0,743 392 93
1,0	0,542 848 23	0,545 183 14	0,544 310 68	0,544 436 67	0,544 433 39
1,5	0,368 103 45	0,377 582 04	0,381 935 19	0,388 563 52	0,388 672 74
2,0	0,239 710 48	0,259 205 18	0,254 910 38	0,256 510 38	0,256 555 79
2,5	0,158 104 29	0,169 028 49	0,176 194 02	0,179 229 50	0,179 205 86
3,5	0,064 917 84	0,069 130 83	0,077 173 30	0,079 373 72	0,079 388 22
5,0	0,025 120 93	0,022 445 19	0,022 983 51	0,020 249 87	0,020 259 47
7,5	0,001 592 96	0,001 492 68	0,000 682 05	0,000 740 28	0,000 728 40
8,0	0,000 379 20	0,000 037 15	0,000 002 17	0,000 000 00	0,000 000 00

Таблица 2

Решение, полученное с помощью МГА, и численное решение на основе МДК для функции $\varphi(\eta)$
при $Pr = 0,7$, $M = 0,5$, $Gr = Gc = 0,5$, $Sc = 0,5$, $n = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$

η	$\varphi(\eta)$				
	МГА (3-й порядок)	МГА (5-й порядок)	МГА (10-й порядок)	МГА (15-й порядок)	МДК (численное решение)
0,5	0,663 928	0,719 404	0,764 104	0,763 129	0,763 116
1,0	0,528 402	0,549 104	0,565 910	0,566 190	0,566 518
1,5	0,449 304	0,419 924	0,406 946	0,408 639	0,408 614
2,0	0,249 510	0,261 948	0,272 003	0,273 502	0,273 638
2,5	0,204 390	0,162 058	0,192 018	0,194 502	0,194 242
3,5	0,069 024	0,082 309	0,091 930	0,090 270	0,090 393
5,0	0,024 092	0,024 105	0,026 192	0,025 832	0,025 878
7,5	0,011 804	0,010 495	0,001 044	0,001 135	0,001 124
8,0	0,003 818	0,000 216	0,000 057	0,000 000	0,000 000

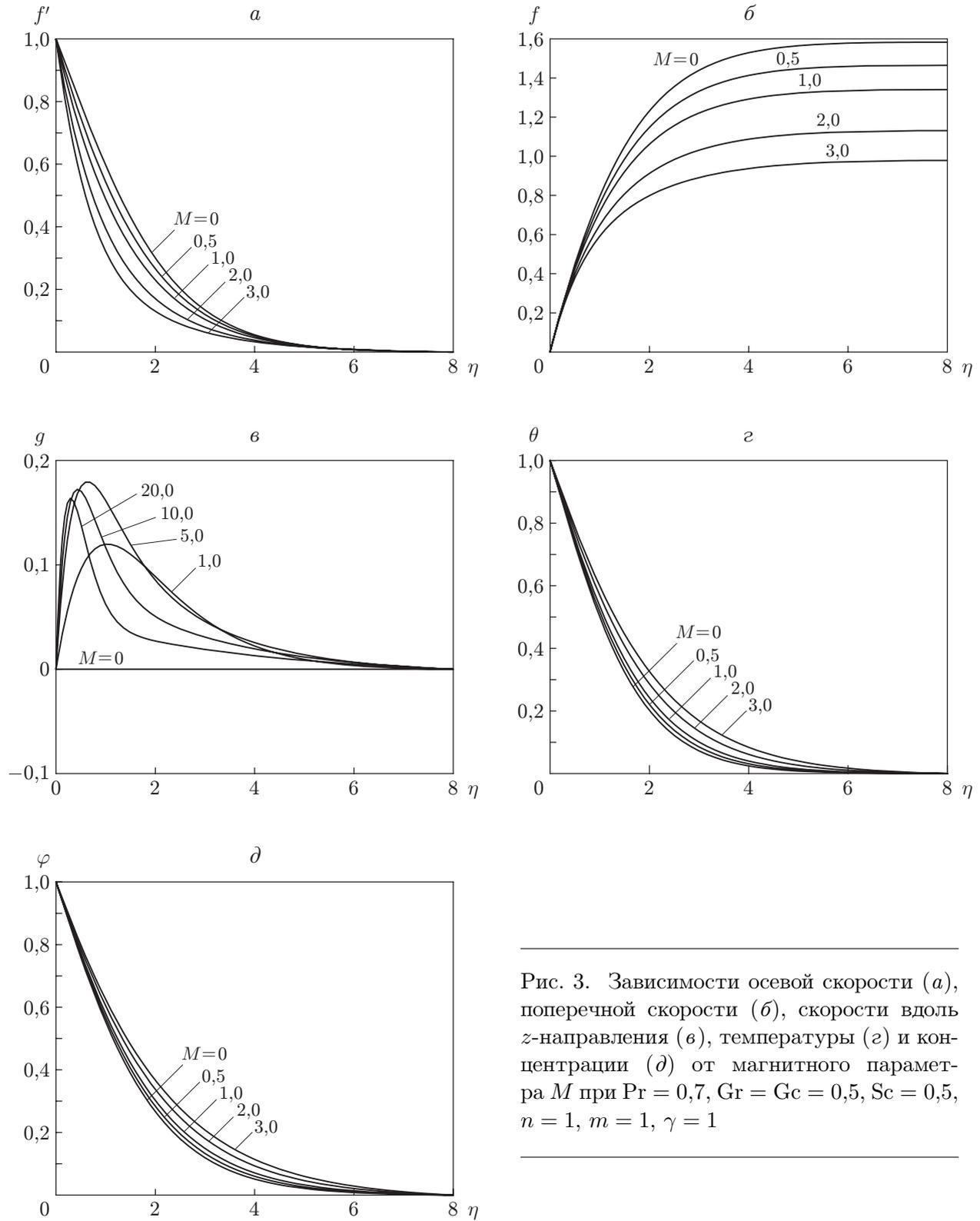


Рис. 3. Зависимости осевой скорости (а), поперечной скорости (б), скорости вдоль z -направления (в), температуры (г) и концентрации (д) от магнитного параметра M при $Pr = 0,7$, $Gr = Gc = 0,5$, $Sc = 0,5$, $n = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$

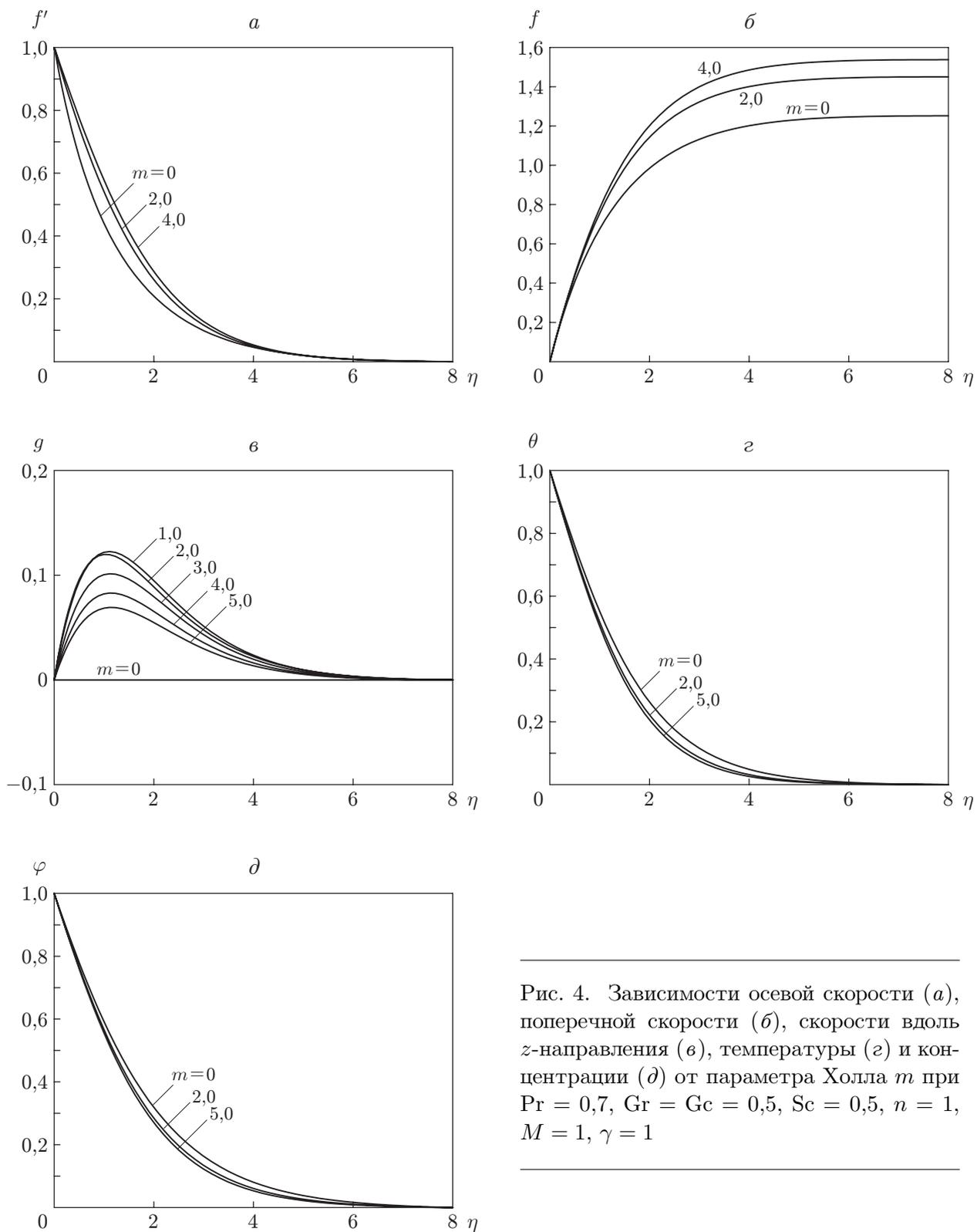


Рис. 4. Зависимости осевой скорости (а), поперечной скорости (б), скорости вдоль z -направления (в), температуры (г) и концентрации (д) от параметра Холла m при $Pr = 0,7$, $Gr = Gc = 0,5$, $Sc = 0,5$, $n = 1$, $M = 1$, $\gamma = 1$

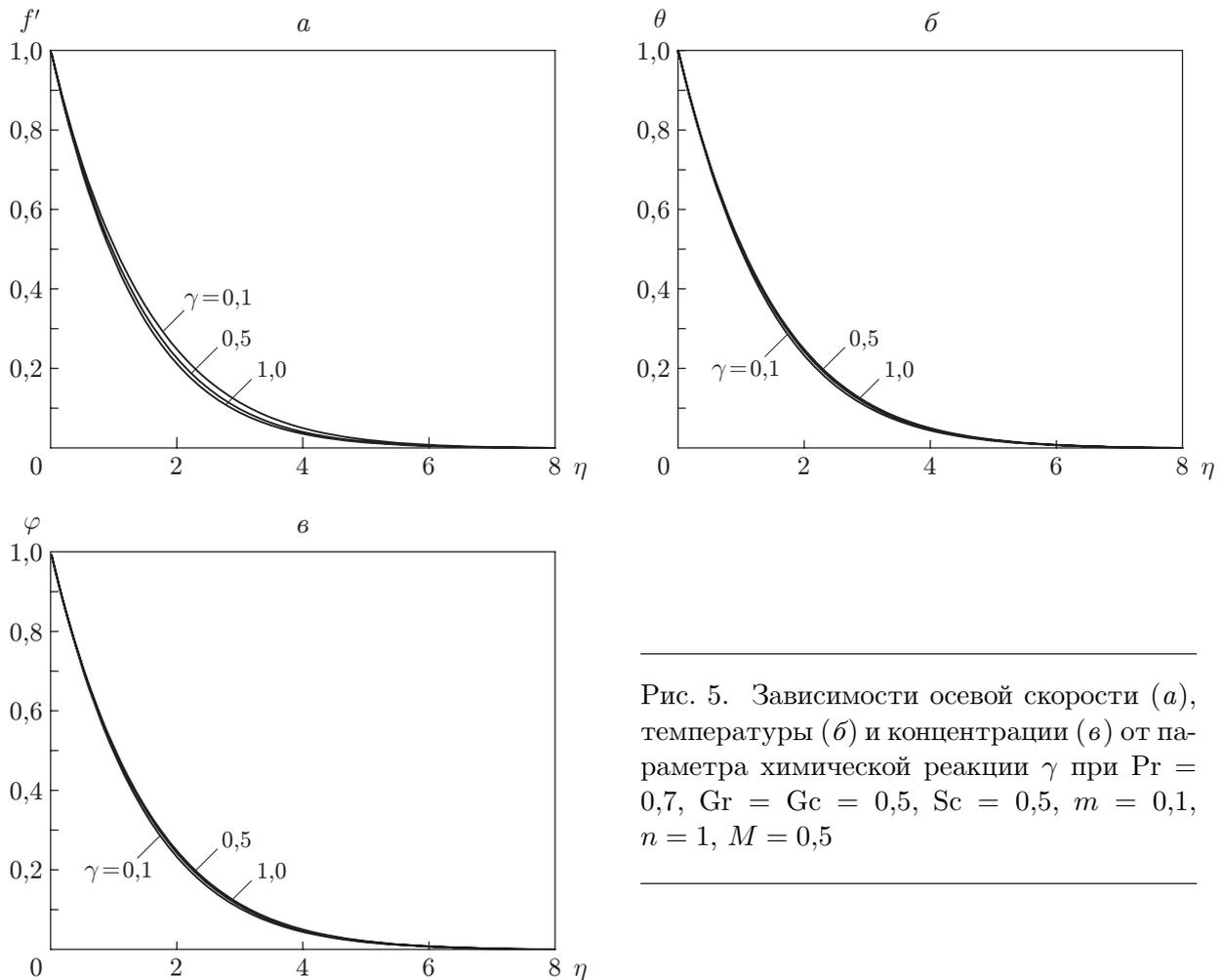


Рис. 5. Зависимости осевой скорости (а), температуры (б) и концентрации (в) от параметра химической реакции γ при $Pr = 0,7$, $Gr = Gc = 0,5$, $Sc = 0,5$, $m = 0,1$, $n = 1$, $M = 0,5$

получить достаточно точное решение, которое хорошо согласуется с результатами численного решения, полученными с помощью МДК. Изучено влияние различных параметров на распределения скорости, температуры и концентрации. Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что с использованием МГА можно решать нелинейные задачи теплообмена и задачи о течении жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakiadis B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surfaces. 1. Boundary layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow // *AICHE J.* 1961. V. 7. P. 26–28.
2. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces. 2. The boundary-layer on a continuous flat surface // *AICHE J.* 1961. V. 7. P. 221–225.
3. **Sakiadis B. C.** Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces. 3. The boundary-layer on a continuous cylindrical surface // *AICHE J.* 1961. V. 7. P. 467–472.
4. **Chin D. T.** Mass transfer to a continuous moving sheet electrode // *J. Electrochem. Soc.* 1975. V. 122. P. 643–646.
5. **Gorla R. S. R.** Unsteady mass transfer in the boundary layer on a continuous moving sheet electrode // *J. Electrochem. Soc.* 1978. V. 125. P. 865–869.

6. **Erickson L. E., Fan L. T., Fox V. G.** Heat and mass transfer on a moving continuous flat plate with suction or injection // *Industr. Engng Chem. Fundam.* 1966. V. 5. P. 19–25.
7. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
8. **Abo-Eldahab E. M., Elbarbary E. M. E.** Hall current effect on magnetohydrodynamic free-convection flow past a semi-infinite vertical plate with mass transfer // *Intern. J. Engng Sci.* 2001. V. 39. P. 1641–1652.
9. **Shit G. C.** Hall effects on MHD free convective flow and mass transfer over a stretching sheet // *Intern. J. Appl. Math. Mech.* 2009. V. 5. P. 22–38.
10. **Liao S. J.** The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems: Ph. D. thesis. Shanghai, 1992.
11. **Kimiaefar A.** An analytical approach to investigate the response and stability of Van der Pol — Mathieu — Duffing oscillators under different excitation functions // *J. Math. Methods Appl. Sci.* 2010. V. 33. P. 1571–1577.
12. **Sajid M., Hayat T.** Comparison of HAM and HPM methods in nonlinear heat conduction and convection equations // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2008. V. 9. P. 2296–2301.
13. **Kimiaefar A., Saidi A. R., Bagheri G. H., et al.** Analytical solution for Van der Pol — Duffing oscillators // *Chaos, Solitons Fractals.* 2009. V. 42. P. 2660–2666.
14. **Chowdhury M. S. H., Hashim I., Abdulaziz O.** Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method for purely nonlinear fin-type problems // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14. P. 371–378.
15. **Nadeem S., Hayat T., Abbasbandy S., Ali M.** Effects of partial slip on a fourth grade fluid next term with variable viscosity. An analytic solution // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2010. V. 11. P. 856–868.
16. **Sohouli A. R., Faomouri M., Kimiaefar A., Domairry G.** Application of homotopy analysis method for natural convection of darcian fluid about a vertical full cone embedded in porous media prescribed surface heat flux // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 15. P. 1691–1699.
17. **Kimiaefar A., Bagheri G. H., Rahimpour M., Mehrabian M. A.** Analytical solution of two-dimensional stagnation flow towards a shrinking sheet by means of homotopy analysis method // *J. Process Mech. Engng.* 2009. V. 223. P. 133–143.
18. **Moghimi M. A., Kimiaefar A., Rahimpour M., Bagheri G. H.** Homotopy analysis method for Marangoni mixed convection boundary layer flow // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci.* 2010. V. 224. P. 1193–1202.
19. **Shu C., Khoo B. C., Yeo K. S.** Numerical solutions of incompressible Navier — Stokes equations by generalized differential quadrature // *Finite Elements Anal. Design.* 1994. V. 18. P. 83–97.
20. **Shu C.** Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flow including parallel computation: Ph. D. thesis. Glasgow, 1991.
21. **Moghimi M. A., Talebizadeh P., Mehrabian M. A.** Heat generation / absorption effects on magnetohydrodynamic natural convection flow over a sphere in a non-Darcian porous medium // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt E. J. Process Mech. Engng.* 2011. V. 225. P. 29–39.
22. **Malekzadeh P., Moghimi M. A., Nickaeen M.** The radiation and variable viscosity effects on electrically conducting fluid over a vertically moving plate subjected to suction and heat flux // *Energy Conversion Management.* 2011. V. 52. P. 2040–2047.
23. **Shu C.** *Differential quadrature and its application in engineering.* Berlin: Springer, 2000.