

УДК 536.25

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

О. Н. Гончарова^{*,**}, Е. В. Резанова^{*}

^{*} Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул

^{**} Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: gon@math.asu.ru, katerezanova@mail.ru

Изучены стационарные двухслойные течения жидкости и газа в случае, когда на границе раздела учитывается испарение жидкости. На твердых непроницаемых границах канала выполняются условия прилипания, заданы линейное относительно продольной координаты распределение температуры и условие, определяющее концентрацию пара на верхней границе. На термокапиллярной границе раздела, остающейся недеформированной, выполняются кинематическое и динамические условия, условие для тепловых потоков с учетом массопереноса, а также условия непрерывности скорости и температуры, баланса массы и соотношение для концентрации насыщенного пара. Построено точное решение стационарной задачи при заданном расходе газа. Приведены примеры профилей скорости, характеризующие стационарные режимы течений для системы этанол — азот в условиях нормальной и пониженной гравитации. Исследуется влияние продольных градиентов температуры, заданной на границах канала, на характер течения.

Ключевые слова: конвекция, термокапиллярная граница раздела, двухслойные течения, испарение, точное решение.

Введение. Исследование течений жидких слоев, процессов тепло- и массопереноса в них при наличии испарения на границах раздела является сложной и актуальной задачей. В последнее время интерес к подобным задачам возрос, что обусловлено проведением новых экспериментов на Земле и в космосе, связанных с изучением конвективных процессов в жидкости при наличии гравитационных полей различной интенсивности [1–3].

Разработке математических моделей конвективных движений, процессов тепло- и массопереноса в жидкостях посвящены работы [4, 5], в которых представлены постановки задач о гравитационной тепловой конвекции в системе двух несмешивающихся жидкостей и о термодиффузионном движении, а также приведены результаты исследований конвективной неустойчивости системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела. Следует отметить работы [1, 2, 6–9], в которых изучены задачи для областей с границами раздела с учетом массопереноса и испарения. В этих работах особое внимание уделяется формулировке условий на границе раздела. Методика получения граничных условий на поверхности раздела фаз в двухслойных системах изложена также в работе [10], где условия на поверхности раздела получены с учетом различных физико-химических факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-00163).

© Гончарова О. Н., Резанова Е. В., 2014

Один из первых примеров построения точных решений задачи о двухслойных течениях с учетом испарения приведен в [11], при этом граница раздела не предполагается термокапиллярной. В [11] изучена задача о стационарной конвекции в двухслойной бинарной системе при наличии испарения с учетом влияния концентрации и температуры. Там же получены зависимости массы жидкости, испаряющейся через границу раздела, и концентрации жидкости на этой границе от горизонтального градиента температуры. В работах [12, 13] построены примеры точных решений задачи о двухслойном течении жидкости и газа в полной постановке. При этом испарение в явном виде не учитывается, но моделируется с помощью соответствующих условий для температуры на границе раздела [12, 13]. Построенные в работах [12, 13] решения являются обобщением известного решения о конвекции в горизонтальном слое со свободной границей [14]. В [15] представлен обзор результатов построения обобщений решений Бириха для задач о двухслойных течениях несмешивающихся жидкостей, в частности с учетом влияния концентрации. Изученные в [15] решения удовлетворяют дополнительному условию замкнутости потока. В [16] представлен вид точного решения задачи о двухслойных течениях при наличии испарения в предположении о недеформируемости границы раздела и о выполнении дополнительного условия замкнутости потоков.

Данная работа посвящена построению точных решений задачи о двухслойных конвективных течениях с учетом испарения. В качестве математической модели используются уравнения Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска [4]. Рассматривается процесс диффузии пара с учетом эффекта Дюфура в верхнем слое, представляющем собой смесь газа и паров жидкости.

1. Постановка задачи: определяющие уравнения. Пусть система координат (x, y) выбрана таким образом, что вектор свободного падения \mathbf{g} направлен противоположно оси y ($\mathbf{g} = (0, -g)$). Система двух вязких несжимаемых жидкостей (жидкость и смесь газа и пара) заполняет бесконечные горизонтальные слои с твердыми верхней и нижней границами $y = h$, $y = -l$ и границей раздела $y = 0$ (рис. 1).

В случае стационарного течения система уравнений для нахождения скорости жидкости, температуры и давления в нижнем или верхнем слое записывается в виде [4]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \tag{1}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g(\beta T + \gamma C); \tag{2}$$

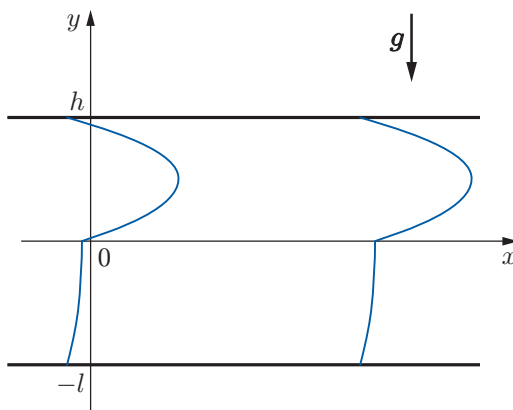


Рис. 1. Область течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \right). \quad (4)$$

Слагаемые γC в уравнении (2) и $\delta(\partial^2 C/\partial x^2 + \partial^2 C/\partial y^2)$ в уравнении (4) учитываются при моделировании течения в верхнем слое (см. рис. 1). Диффузия пара, считающегося пассивной примесью, в газе описывается следующим уравнением:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

В (1)–(5) u, v — проекции вектора скорости на оси Ox и Oy декартовой системы координат; $p' = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ — модифицированное давление (отклонение от гидростатического давления); $\mathbf{x} = (x, y)$; p — давление; T — температура; C — концентрация пара; ρ — плотность (некоторое относительное значение плотности); ν — кинематическая вязкость; χ — температуропроводность; D — коэффициент диффузии пара в газе; β — коэффициент теплового расширения; γ — концентрационный коэффициент плотности; δ — коэффициент, характеризующий эффект Дюфура.

Пусть решение системы уравнений (1)–(4) для жидкости в нижнем слое и системы уравнений (1)–(5) для смеси газа и пара в верхнем слое имеет вид

$$u_i = u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), \quad C = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y). \quad (6)$$

Здесь a_j^i, b_j ($i = 1, 2$) — постоянные, определяемые с помощью граничных условий, причем искомые функции или параметры, имеющие индекс $i = 1$, характеризуют нижний слой, а имеющие индекс $i = 2$ — верхний слой.

При выполнении условия непрерывности температуры на границе $y = 0$ имеем $a_1^i = A = \text{const}$. Тогда выражение для температуры записывается следующим образом:

$$T_i = (A + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

В ходе решения задачи (1)–(5) с учетом формул (6), (7) получаем соотношения, определяющие скорость u_1 жидкости, ее температуру T_1 и давление p_1 :

$$u_1 = \frac{y^4}{24} \frac{g\beta_1 a_2^1}{\nu_1} + \frac{y^3}{6} \frac{g\beta_1 A}{\nu_1} + \frac{y^2}{2} c_1 + y c_2 + c_3; \quad (8)$$

$$T_1 = (A + a_2^1 y)x + \frac{y^7}{1008} \frac{g\beta_1 (a_2^1)^2}{\nu_1 \chi_1} + \frac{y^6}{144} \frac{g\beta_1 a_2^1 A}{\nu_1 \chi_1} + \frac{y^5}{40} \left(\frac{g\beta_1 A^2}{3\nu_1 \chi_1} + \frac{c_1 a_2^1}{\chi_1} \right) + \frac{y^4}{12} \left(\frac{c_1 A}{2\chi_1} + \frac{c_2 a_2^1}{\chi_1} \right) + \frac{y^3}{6} \left(\frac{c_2 A}{\chi_1} + \frac{c_3 a_2^1}{\chi_1} \right) + \frac{y^2}{2} \frac{c_3 A}{\chi_1} + y c_4 + c_5; \quad (9)$$

$$p_1' = \rho_1 \nu_1 \left[\frac{g\beta_1}{\nu_1} \left(Ay + a_2^1 \frac{y^2}{2} \right) + c_1 \right] x + \frac{y^8}{8} k_7 + \frac{y^7}{7} k_6 + \frac{y^6}{6} k_5 + \frac{y^5}{5} k_4 + \frac{y^4}{4} k_3 + \frac{y^3}{3} k_2 + \frac{y^2}{2} k_1 + y k_0 + \tilde{c}_3, \quad (10)$$

где коэффициенты k_i ($i = 0, \dots, 7$) вычисляются следующим образом:

$$k_0 = g\rho_1\beta_1 c_5, \quad k_1 = g\rho_1\beta_1 c_4, \quad k_2 = \frac{g\rho_1\beta_1 A}{2\chi_1} c_3, \quad k_3 = \frac{g\rho_1\beta_1}{6\chi_1} (Ac_2 + a_2^1 c_3),$$

$$k_4 = \frac{g\rho_1\beta_1}{24\chi_1} (Ac_1 + 2a_2^1 c_2), \quad k_5 = \frac{g\rho_1\beta_1}{120\chi_1} \left(\frac{g\beta_1 A^2}{\nu_1} + 3a_2^1 c_1 \right),$$

$$k_6 = \frac{\rho_1 g^2 \beta_1^2 a_2^1 A}{144 \nu_1 \chi_1}, \quad k_7 = \frac{g^2 \beta_1^2 (a_2^1)^2 \rho_1}{1008 \nu_1 \chi_1}.$$

Здесь $p'_1 = p_1 + \rho_1 g y$ — модифицированное давление.

Система соотношений, определяющих скорость u_2 , концентрацию пара C в верхнем слое, распределение температуры T_2 и давление p_2 , имеет вид

$$u_2 = \frac{y^4}{24} \frac{g}{\nu_2} (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \frac{y^3}{6} \frac{g}{\nu_2} (\beta_2 A + \gamma b_1) + \frac{y^2}{2} \bar{c}_1 + y \bar{c}_2 + \bar{c}_3; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C = & (b_1 + b_2 y)x + \frac{y^7}{1008} \frac{g b_2}{D \nu_2} (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \\ & + \frac{y^6}{720} \frac{g}{D \nu_2} [b_1 (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + 4 b_2 (\beta_2 A + \gamma b_1)] + \frac{y^5}{120} \frac{1}{D} \left[\frac{g b_1}{\nu_2} (\beta_2 A + \gamma b_1) + 3 b_2 \bar{c}_1 \right] + \\ & + \frac{y^4}{24} \frac{1}{D} (b_1 \bar{c}_1 + 2 b_2 \bar{c}_2) + \frac{y^3}{6} \frac{1}{D} (b_1 \bar{c}_2 + b_2 \bar{c}_3) + \frac{y^2}{2} \frac{b_1}{D} \bar{c}_3 + \bar{c}_6 y + \bar{c}_7; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 = & (A + a_2^2 y)x + \frac{y^7}{1008} \frac{g}{\nu_2} \left(\frac{a_2^2}{\chi_2} - \frac{\delta b_2}{D} \right) (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \\ & + \frac{y^6}{720} \frac{g}{\nu_2} \left[\left(\frac{A}{\chi_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \left(\frac{a_2^2}{4 \chi_2} - \frac{4 \delta b_2}{D} \right) (\beta_2 A + \gamma b_1) \right] + \\ & + \frac{y^5}{120} \left[\frac{g}{\nu_2} \left(\frac{A}{\chi_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) (\beta_2 A + \gamma b_1) + \left(\frac{g a_2^2}{3 \chi_2 \nu_2} - \frac{3 \delta b_2}{D} \right) \bar{c}_1 \right] + \\ & + \frac{y^4}{24} \left[\left(\frac{g A}{\chi_2 \nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_1 + \left(\frac{g A}{2 \chi_2 \nu_2} - \frac{2 \delta b_2}{D} \right) \bar{c}_2 \right] + \\ & + \frac{y^3}{6} \left[\left(\frac{g A}{\chi_2 \nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_2 + \left(\frac{g a_2^2}{\chi_2 \nu_2} - \frac{\delta b_2}{D} \right) \bar{c}_3 \right] + \frac{y^2}{2} \left(\frac{g A}{\chi_2 \nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_3 + y \bar{c}_4 + \bar{c}_5; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'_2 = & \rho_2 \nu_2 \left\{ \frac{g}{\nu_2} \left[\beta_2 \left(A y + a_2^2 \frac{y^2}{2} \right) + \gamma \left(b_1 y + b_2 \frac{y^2}{2} \right) \right] + \bar{c}_1 \right\} x + \\ & + \frac{y^8}{8} \bar{k}_7 + \frac{y^7}{7} \bar{k}_6 + \frac{y^6}{6} \bar{k}_5 + \frac{y^5}{5} \bar{k}_4 + \frac{y^4}{4} \bar{k}_3 + \frac{y^3}{3} \bar{k}_2 + \frac{y^2}{2} \bar{k}_1 + y \bar{k}_0 + \tilde{c}_4. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{k}_0 = & g \rho_2 [\beta_2 \bar{c}_5 + \gamma \bar{c}_7], \quad \bar{k}_1 = \rho_2 g [\beta_2 \bar{c}_4 + \gamma \bar{c}_6], \quad \bar{k}_2 = \frac{\rho_2 g}{2} \left[\beta_2 \left(\frac{g A}{\chi_2 \nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) + \frac{\gamma b_1}{D} \right] \bar{c}_3, \\ \bar{k}_3 = & \frac{\rho_2 g}{6} \left[\left(\frac{g \beta_2 A}{\chi_2 \nu_2} + \frac{b_1}{D} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) \bar{c}_2 + \left(\frac{g \beta_2 a_2^2}{\chi_2 \nu_2} + \frac{b_2}{D} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) \bar{c}_3 \right], \\ \bar{k}_4 = & \frac{\rho_2 g}{24} \left[\left(\frac{\beta_2 g A}{\chi_2 \nu_2} + \frac{b_1}{D} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) \bar{c}_1 + \left(\frac{\beta_2 g A}{2 \chi_2 \nu_2} + \frac{2 b_2}{D} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) \bar{c}_2 \right], \\ \bar{k}_5 = & \frac{\rho_2 g}{120} \left[\left(\frac{\beta_2 g A}{\chi_2 \nu_2} + \frac{g b_1}{D \nu_2} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) (\beta_2 A + \gamma b_1) + \left(\frac{\beta_2 g a_2^2}{3 \chi_2 \nu_2} + \frac{3 b_2}{D} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) \bar{c}_1 \right], \\ \bar{k}_6 = & \frac{\rho_2 g}{720} \left[\left(\frac{\beta_2 g A}{\chi_2 \nu_2} + \frac{g b_1}{D \nu_2} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2) + \left(\frac{\beta_2 g a_2^2}{4 \chi_2 \nu_2} + \frac{4 g b_2}{D \nu_2} (\gamma - \delta \beta_2) \right) (\beta_2 A + \gamma b_1) \right], \end{aligned}$$

$$\bar{k}_7 = \frac{\rho_2 g}{1008} \left(\frac{\beta_2 g a_2^2}{\chi_2 \nu_2} + \frac{g b_2}{D \nu_2} (\gamma - \beta_2 \delta) \right) (\beta_2 a_2^2 + \gamma b_2),$$

$p'_2 = p_2 + \rho_2 g y$ — модифицированное давление. Константы интегрирования определяются с помощью граничных условий (см. п. 2).

2. Граничные условия в задаче о двухслойных течениях при наличии испарения. Сформулируем граничные условия, которым должны удовлетворять функции (8)–(14).

На нижней $y = -l$ и верхней $y = h$ твердых непроницаемых границах области течения должны быть выполнены условия прилипания для скорости

$$u_1|_{y=-l} = 0, \quad u_2|_{y=h} = 0. \quad (15)$$

Пусть на этих границах температура распределена линейно относительно продольной координаты:

$$T_1|_{y=-l} = A_1 x + \vartheta^-, \quad T_2|_{y=h} = A_2 x + \vartheta^+. \quad (16)$$

Полагая коэффициенты, определяющие постоянные продольные градиенты температуры A , A_1 , A_2 , заданными, находим a_2^1 , a_2^2 .

Пусть на верхней границе $y = h$ выполняется условие отсутствия потока пара на данной границе

$$\frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \quad (17)$$

либо условие, которое определяется способностью верхней границы впитывать пар (так называемая абсорбция пара):

$$C|_{y=h} = 0. \quad (18)$$

В реальных физических ситуациях в случае конденсации пара граничное значение C при $y = h$ может меняться и быть функцией температуры.

На термокапиллярной границе раздела $y = 0$, остающейся недеформированной, должны выполняться условия непрерывности скорости и температуры

$$u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0}, \quad T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}. \quad (19)$$

При этом условие переноса тепла должно учитывать диффузионный поток массы (пара) на границе:

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \delta \varkappa_2 \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\lambda M. \quad (20)$$

Здесь λ — количество тепла, выделяющегося при испарении; M — масса жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени; \varkappa_1 , \varkappa_2 — теплопроводности. Уравнение баланса масс на границе раздела имеет следующий вид:

$$M = -D \rho_2 \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (21)$$

Концентрация насыщенного пара может быть найдена с помощью соотношения

$$C|_{y=0} = C_* [1 + \varepsilon (T_2|_{y=0} - T_0)]. \quad (22)$$

Здесь $\varepsilon = \lambda \mu / (R T_0^2)$; μ — молекулярная масса испаряющейся жидкости; R — универсальная газовая постоянная; C_* — концентрация насыщенного пара при $T_2 = T_0$ (в [11] значение T_0 полагается равным 20 °C). Соотношение (22) является следствием уравнения Клапейрона — Клаузиуса [17] для давления насыщенного пара $P = P_0 \exp[(\lambda \mu / R)(1/T_0 - 1/T)]$

и уравнения Менделеева — Клапейрона для идеального газа $\rho_v RT = \mu P$. Здесь (P_0, T_0) — некоторое исходное состояние; $\rho_v = C\rho_2$. В результате линеаризации в предположении малости безразмерного параметра εT_* (T_* — характерное значение перепада температуры) имеет место линейная температурная зависимость концентрации пара на границе раздела (22) при умеренных перепадах температуры. Заметим, что подобный подход, в котором уравнение Клапейрона — Клаузиуса используется для вывода условия на границе раздела, рассматривается в [11] (см. также [18]).

Кинематическое условие на границе раздела выполняется автоматически (см. (6)). Проекция динамического условия [4] на касательный вектор к границе раздела $y = 0$ представляется в следующем виде:

$$\rho_1 \nu_1 u_{1y} = \rho_2 \nu_2 u_{2y} + \sigma_T \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{y=0} \quad (23)$$

(σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения). Для определения значения σ часто используется линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0)$, где $\sigma_T < 0$.

Из уравнения проекции динамического условия [4] на вектор нормали к границе раздела $y = 0$ следует соотношение

$$p_1 = p_2. \quad (24)$$

Условие

$$Q = \int_0^h \rho_2 u_2(y) dy \quad (25)$$

определяет расход газа в верхнем слое. Далее величина Q полагается заданной.

Граничные условия (15)–(25) позволяют определить константы c_i , \bar{c}_i ($i = 1, \dots, 7$), M и профили скорости, температуры для обеих сред и концентрации пара в газе (см. (8), (9), (11)–(13)).

Рассмотрим случай, когда на верхней твердой границе задано условие (17) для концентрации пара. Тогда $b_2 = 0$, $\varphi'(h) = 0$. Тепловой режим на твердых границах и границе раздела определяет связь $A_2 = A + (A - A_1)(h/l)(\varkappa_1/\varkappa_2)$, $c_5 = \bar{c}_5$, поэтому константы a_2^1 и a_2^2 вычисляются из соотношений $A_1 = A - a_2^1 l$, $A_2 = A + a_2^2 h$. Уравнение (22) показывает, что $b_1 = C_* \varepsilon A$ и $\bar{c}_7 = C_* + C_* \varepsilon (c_5 - T_0)$, а из условий на границе раздела (21), (20) следует, что \bar{c}_4 и \bar{c}_6 выражаются через M и c_4 : $\bar{c}_4 = c_4 \varkappa_1 / \varkappa_2 + M(\lambda / \varkappa_2 + \delta / (\rho_2 D))$, $\bar{c}_6 = -M / (D \rho_2)$. Из динамических условий (23), (24) и условия непрерывности касательных скоростей на границе раздела (см. (19)) получаем выражения $c_1 = \bar{c}_1 \rho_2 \nu_2 / (\rho_1 \nu_1)$, $c_2 = (\rho_2 \nu_2 \bar{c}_2 + \sigma_T A) / (\rho_1 \nu_1)$, $c_3 = \bar{c}_3$. Коэффициенты \bar{c}_i , а также c_i ($i = 1, 2, 3$) могут быть вычислены из системы соотношений, являющейся следствием условий прилипания (15) и заданного расхода газа (25):

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 \frac{l^2}{2} \frac{\rho_2 \nu_2}{\rho_1 \nu_1} - \bar{c}_2 l \frac{\rho_2 \nu_2}{\rho_1 \nu_1} + \bar{c}_3 &= -\frac{g \beta_1}{\nu_1} l^3 \left(-\frac{A}{6} + \frac{A - A_1}{24} \right) + l \frac{\sigma_T A}{\rho_1 \nu_1}, \\ \bar{c}_1 \frac{h^2}{2} + \bar{c}_2 h + \bar{c}_3 &= -\frac{g}{\nu_2} \left(\frac{h^3}{6} (\beta_2 A + \gamma C_* \varepsilon A) + \frac{h^4}{24} \frac{\beta_2 \varkappa_1 (A - A_1)}{\varkappa_2} \right), \\ \bar{c}_1 \frac{h^3}{6} + \bar{c}_2 \frac{h^2}{2} + \bar{c}_3 h &= \frac{Q}{\rho_2} - \frac{g}{\nu_2} \left(\frac{h^4}{24} (\beta_2 A + \gamma C_* \varepsilon A) + \frac{h^5}{120} \frac{\beta_2 \varkappa_1 (A - A_1)}{\varkappa_2} \right). \end{aligned}$$

При найденных значениях \bar{c}_i ($i = 1, 2, 3$) масса испаряющейся жидкости M определяется из выражения

$$M = \rho_2 b_1 \left(\frac{h^5}{120} \frac{g \beta_2 a_2^2}{\nu_2} + \frac{h^4}{24} \frac{g}{\nu_2} (\beta_2 A + \gamma b_1) + \frac{h^3}{6} \bar{c}_1 + \frac{h^2}{2} \bar{c}_2 + h \bar{c}_3 \right),$$

которое получается из (21) с учетом условия $\varphi'(h) = 0$. Для определения c_4 , c_5 используются условия (16) и как следствие система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & -\frac{g\beta_1}{24\nu_1\chi_1} \left(\frac{A^2}{5} l^5 - \frac{Aa_2^1}{6} l^6 + \frac{(a_2^1)^2}{42} l^7 \right) + \left(\frac{A}{24\chi_1} l^4 - \frac{a_2^1}{40\chi_1} l^5 \right) \frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1} \bar{c}_1 + \\ & + \left(\frac{a_2^1}{12\chi_1} l^4 - \frac{A}{6\chi_1} l^3 \right) \left(\frac{\rho_2\nu_2}{\rho_1\nu_1} \bar{c}_2 + \frac{\sigma_T A}{\rho_1\nu_1} \right) + \left(\frac{A}{2\chi_1} l^2 - \frac{a_2^1}{6\chi_1} l^3 \right) \bar{c}_3 - lc_4 + c_5 = \vartheta^-, \\ & \frac{h^7}{1008} \frac{g\beta_2(a_2^2)^2}{\chi_2\nu_2} + \frac{h^6}{720} \frac{ga_2^2}{\nu_2} \left(\frac{5\beta_2 A}{4\chi_2} + \frac{\gamma b_1}{4\chi_2} - \frac{\delta\beta_2 b_1}{D} \right) + \\ & + \frac{h^5}{120} \frac{g}{\nu_2} \left[\left(\frac{A}{\chi_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) (\beta_2 A + \gamma b_1) + \frac{a_2^2}{3\chi_2} \bar{c}_1 \right] + \frac{h^4}{24} \left[\left(\frac{gA}{\chi_2\nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_1 + \frac{gA}{2\chi_2\nu_2} \bar{c}_2 \right] + \\ & + \frac{h^3}{6} \left[\left(\frac{gA}{\chi_2\nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_2 + \frac{ga_2^2}{\chi_2\nu_2} \bar{c}_3 \right] + \frac{h^2}{2} \left(\frac{gA}{\chi_2\nu_2} - \frac{\delta b_1}{D} \right) \bar{c}_3 + h \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} c_4 + hM \left(\frac{\lambda}{\varkappa_2} + \frac{\delta}{\rho_2 D} \right) + c_5 = \vartheta^+. \end{aligned}$$

При этом должны быть учтены представленные выше соотношения для вычисления b_1 , a_2^1 , a_2^2 . Таким образом вычисляются все коэффициенты, определяющие зависимости (8)–(14) искомых функций от пространственных координат.

Заметим, что при моделировании двухслойных течений в случае использования условия (18) на границе $y = h$ следует вновь получить систему соотношений для определения констант интегрирования.

3. Примеры двухслойных течений системы этанол — азот. Рассмотрим двухслойную систему двух несмешивающихся жидкостей (жидкости и газа), состоящую из этанола и азота. Основные параметры задачи имеют следующие значения (см., например, [13, 19], а также [11]): плотность жидкости $\rho_1 = 0,79 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность газа $\rho_2 = 1,2$ кг/м³, кинематическая вязкость жидкости $\nu_1 = 0,15 \cdot 10^{-5}$ м²/с, кинематическая вязкость газа $\nu_2 = 0,15 \cdot 10^{-4}$ м²/с, коэффициент теплового расширения жидкости $\beta_1 = 0,108 \cdot 10^{-2}$ К⁻¹, коэффициент теплового расширения газа $\beta_2 = 0,367 \cdot 10^{-2}$ К⁻¹, концентрационный коэффициент плотности $\gamma = -0,62$, $\varepsilon = 0,059$ К⁻¹, концентрация насыщенного пара при $T_2 = T_0 = 20$ °С $C_* = 0,1$, теплопроводность жидкости $\varkappa_1 = 0,1672$ Вт/(м·К), теплопроводность газа $\varkappa_2 = 0,02717$ Вт/(м·К), температурный коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_T = -0,8 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К), коэффициент диффузии пара в верхнем слое $D = 0,135 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

Примеры двухслойных течений и их характеристики приводятся для случая, когда на верхней твердой границе задано условие (17) для концентрации пара. На рис. 2–8 представлены профили размерных скоростей ($l = 10^{-2}$ м).

На рис. 2 представлены профили скоростей для системы жидкость — газ (этанол — азот) в условиях нормальной ($g = 9,81$ м/с²) и пониженной ($g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с²) гравитации соответственно при различных значениях продольного градиента температуры A (см. (7)). Наблюдаются количественные различия характеристик течений в зависимости от значения g и некоторые качественные различия, обусловленные влиянием различных температурных градиентов. Если продольный градиент температуры A равен нулю, то скорость на границе раздела $y = 0$ двух сред в условиях нормальной гравитации (см. рис. 2,а) равна $U = 0,71 \cdot 10^{-2}$ м/с. При этом продольные градиенты температуры на нижней и верхней твердых границах должны поддерживаться равными $A_1 = 4$ К/м, $A_2 = -24,62$ К/м соответственно. Следует отметить, что если $A = 0$, то испарение практически отсутствует, если значения продольных градиентов температуры равны $A = 10$ К/м, $A_1 = 4$ К/м, $A_2 = 46,92$ К/м, то граничное значение скорости равно $U = 0,93 \cdot 10^{-2}$ м/с, а масса испаряющейся жидкости равна $M = 2,65 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с).

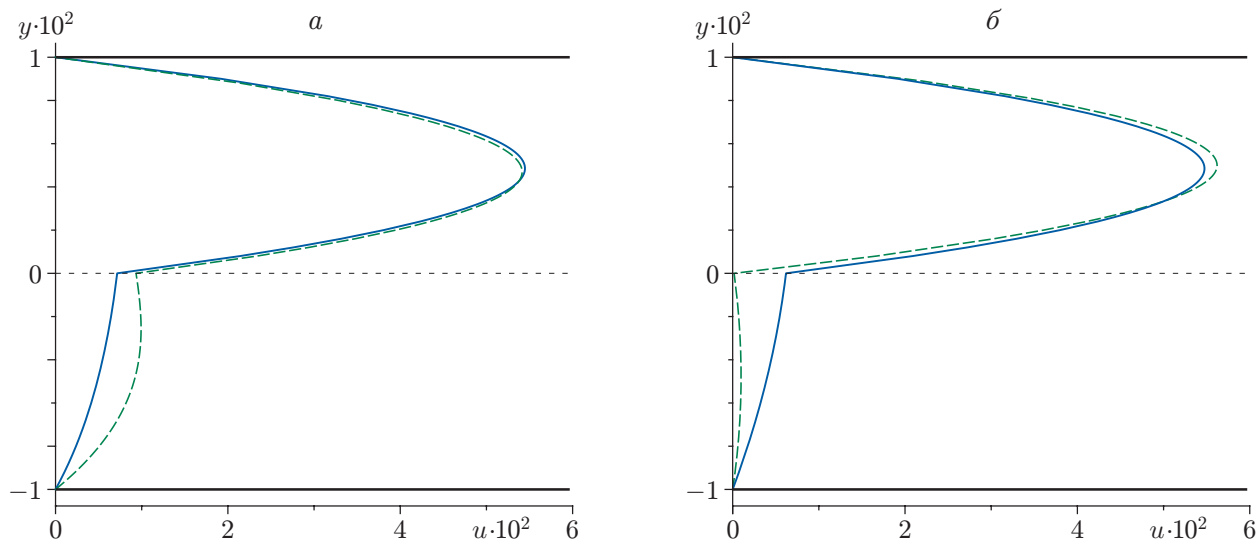


Рис. 2. Профили скорости в системе этанол — азот при $h = 10^{-2}$ м, $Q = 4,5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с), $A_1 = 4$ К/м и различных значениях продольного градиента температуры A :
 a — $g = 9,81$ м/с², b — $g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с²; сплошные линии — $A = 0$, штриховые — $A = 10$ К/м

В условиях слабой гравитации (см. рис. 2, b) при тех же значениях продольных градиентов температуры $U = 0,62 \cdot 10^{-2}$ м/с и испарение по-прежнему практически отсутствует ($M = 0$). При $A = 10$ К/м, $A_1 = 4$ К/м, $A_2 = 46,92$ К/м скорость течения уменьшается: $U = 0,16 \cdot 10^{-3}$ м/с, а испарение остается практически таким же, как и в условиях нормальной гравитации ($M = 2,65 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с)).

На рис. 3 показаны профили скоростей двухслойных течений при значениях продольных градиентов температуры $A = 10$ К/м, $A_1 = 4$ К/м, $A_2 = 46,92$ К/м в случае нормальной и слабой гравитации при различных значениях удельного расхода газа Q . В условиях нормальной гравитации ($g = 9,81$ м/с²) при $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) скорость на границе раздела ($y = 0$) принимает значение $U = 0,44 \cdot 10^{-2}$ м/с (пунктирная линия на рис. 3, a), масса испаряющейся жидкости равна $M = 5,31 \cdot 10^{-6}$ кг/(м²·с). При большем значении удельного массового расхода газа $Q = 4,5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с) наблюдается более интенсивное течение и увеличивается значение скорости на границе: $U = 0,93 \cdot 10^{-2}$ м/с (штриховая линия на рис. 3, a). Масса испаряющейся жидкости также увеличивается: $M = 2,65 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с). Тенденция к возрастанию интенсивности течения сохраняется при увеличении удельного расхода газа. Если $Q = 1,44 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), то значение скорости на границе $U = 2,29 \cdot 10^{-2}$ м/с, масса испаряющейся жидкости $M = 8,5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с) (сплошная линия на рис. 3, a). При пониженной гравитации ($g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с²) имеют место качественные отличия от течений в условиях нормальной гравитации (ср. пунктирные линии на рис. 3, a, b , а также рис. 4). Если значение расхода газа равно $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), то при $g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с² вблизи границы раздела возникает течение в противоположном направлении относительно направления потока газа. Скорость на границе равна $U = -0,48 \cdot 10^{-2}$ м/с, масса испаряющейся жидкости $M = 5,31 \cdot 10^{-6}$ кг/(м²·с). При значении расхода газа $Q = 4,5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с) скорость на границе раздела $U = 0,16 \cdot 10^{-3}$ м/с, а масса испаряющейся жидкости $M = 2,65 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с). Если $Q = 1,44 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), то $U = 1,38 \cdot 10^{-2}$ м/с, $M = 8,5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м²·с). Таким образом, понижение уровня гравитации со значения $g = 9,81$ м/с² до значения $g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с² не приводит к существенному изменению массы испаряющейся жидкости.

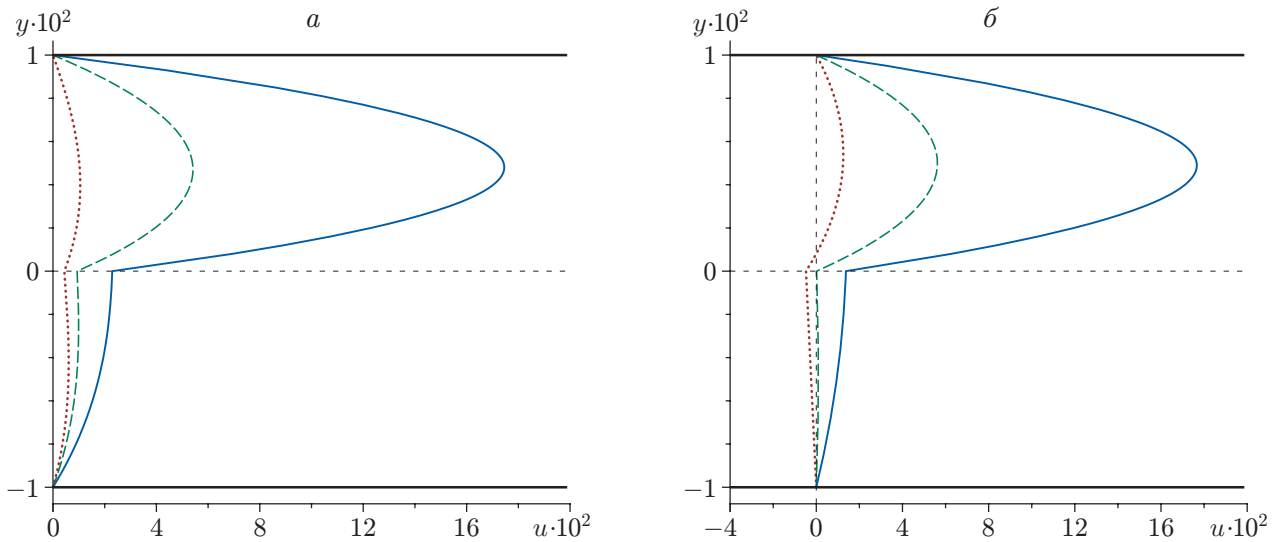


Рис. 3. Профили скорости в системе этанол — азот при $h = 10^{-2}$ м, $A = 10$ К/м, $A_1 = 4$ К/м и различных значениях расхода газа Q :
 $a - g = 9,81$ м/с², $b - g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с²; сплошные линии — $Q = 1,44 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с),
 штриховые — $Q = 4,5 \cdot 10^{-4}$ кг/(м·с), пунктирные — $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)

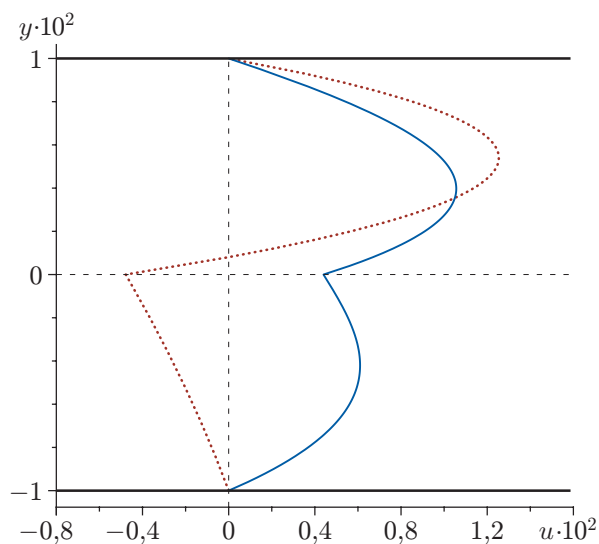


Рис. 4. Профили скорости в системе этанол — азот при $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $h = 10^{-2}$ м, $A = 10$ К/м, $A_1 = 4$ К/м и различных условиях гравитации:
 сплошная линия — $g = 9,81$ м/с², пунктирная — $g = 9,81 \cdot 10^{-2}$ м/с²

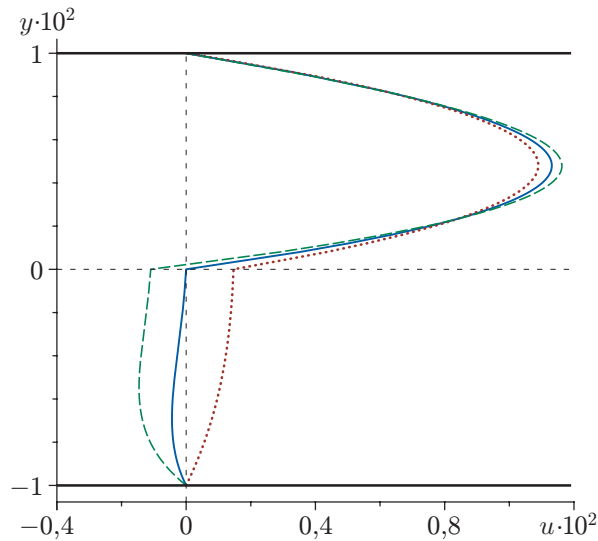


Рис. 5. Профили скорости в системе этанол — азот при $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с), $h = 10^{-2}$ м, $A = 0,5$ К/м, $g = 9,81$ м/с² и различных значениях продольного градиента температуры A_1 на нижней твердой границе $y = -1$: сплошная линия — $A_1 = -5,512$ К/м, пунктирная — $A_1 = 0,5$ К/м, штриховая — $A_1 = -10$ К/м

На рис. 5 представлены профили скорости при различных значениях продольных градиентов температуры A_1 и A_2 , заданных на твердых границах в случае нормальной гравитации ($g = 9,81$ м/с²). Рассматриваются как положительные, так и отрицательные значения градиента температуры A_1 , что соответствует различным положениям “нагревателя” на нижней твердой стенке. Если расход газа равен $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с), а продольный градиент температуры поддерживается равным $A = 0,5$ К/м, то при $A_1 = -5,512$ К/м скорость на границе раздела $y = 0$ имеет нулевое значение: $U = 0$ (сплошная линия на рис. 5). При этом $A_2 = 37,5$ К/м. При значении $A_1 = -10$ К/м наблюдается течение жидкости в противоположном направлении относительно направления потока газа. При этом $A = 0,5$ К/м, $A_2 = 65,1$ К/м, скорость на границе раздела равна $U = -0,11 \cdot 10^{-2}$ м/с. При $A_1 = 0,5$ К/м (при этом $A = 0,5$ К/м, $A_2 = 0,5$ К/м) значение скорости на границе раздела является положительным: $U = 0,14 \cdot 10^{-2}$ м/с (пунктирная линия на рис. 5). Для всех случаев, представленных на рис. 5, масса испаряющейся жидкости $M \approx 2,65 \cdot 10^{-7}$ кг/(м² · с).

Условие замкнутости потока в нижнем слое может быть также реализовано при определенных условиях, накладываемых на выбор значений расхода газа, толщины слоя газа, продольных градиентов температуры и ускорения свободного падения. Данный вывод следует из структуры решения типа решения Бириха [20] (см. также работу [13], в которой условие замкнутости потока в задаче о течении жидкости и спутного потока газа записано в аналитическом виде). Рассмотрим следующую модельную задачу. При значениях продольных градиентов температуры $A = 80$ К/м, $A_1 = -125$ К/м, $A_2 = 1341$ К/м условие замкнутости потока в нижнем слое двухслойной системы жидкость — газ в случае нормальной гравитации ($g = 9,81$ м/с²) будет выполняться при значении расхода газа $Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с) (рис. 6). При этом толщина слоя газа равна $h = 10^{-2}$ м, масса испаряющейся жидкости $M = 4,25 \cdot 10^{-5}$ кг/(м² · с), скорость на границе $U = -0,0117$ м/с.

Заключение. Точные решения, построенные для уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска, описывают стационарные двухслойные течения жидкости и газа с учетом испарения жидкости на границе раздела в условиях заданного расхода

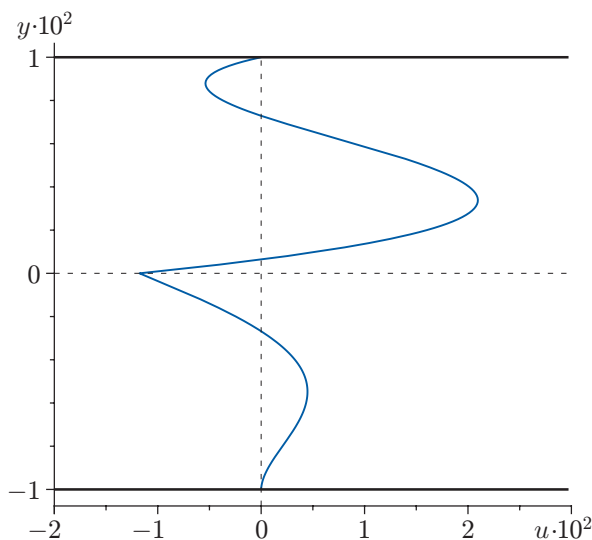


Рис. 6. Профиль скорости в системе этанол — азот в случае выполнения условия замкнутости потока в нижнем слое ($Q = 9 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $h = 10^{-2}$ м, $A = 80$ К/м, $g = 9,81$ м/с²)

газа. Граница раздела двух сред является термокапиллярной поверхностью, на которой выполняются кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, а также условия, определяющие поток тепла с учетом испаряющейся жидкости, баланс массы и концентрацию насыщенного пара. При этом на твердых непроницаемых границах выполнены условия прилипания, задано распределение температуры, линейное относительно продольной координаты. Проведено подробное моделирование течений в случае, когда на верхней твердой границе слоя, заполненного газом (смесью газа и паров жидкости), предполагается выполненным условие равенства нулю потока пара. Примеры стационарных течений представлены в виде профилей скорости для системы жидкость — газ (этанол — азот) в условиях нормальной и пониженной гравитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Iorio C. S., Goncharova O. N., Kabov O. A.** Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // *Microgravity Sci. Technol.* 2009. N 21. P. 313–320.
2. **Iorio C. S., Goncharova O. N., Kabov O. A.** Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // *Comput. Therm. Sci.* 2011. N 3. P. 333–342.
3. **Люлин Ю. В., Кабов О. А.** Измерение массовой скорости испарения в горизонтальном слое жидкости, частично открытом в движущийся газ // *Письма в ЖТФ.* 2013. Т. 39, вып. 17. С. 88–94.
4. **Андреев В. К.** Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Наука, 2008.
5. **Andreev V. K.** Mathematical models of convection (de Gruyter studies in mathematical physics) / V. K. Andreev, Yu. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachov. Berlin; Boston: De Gruyter, 2012.
6. **Гончарова О. Н.** Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // *Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики.* 1987. Вып. 82. С. 65–79.

7. **Гончарова О. Н.** Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Изв. Алт. гос. ун-та. 2012. № 73. С. 12–18.
8. **Margerit J., Colinet P., Lebon G., et al.** Interfacial nonequilibrium and Benard — Marangoni instability of a liquid-vapor system // Phys. Rev. 2003. V. E68. P. 041601-1–041601-14.
9. **Кузнецов В. В.** Условия переноса тепла и массы на границе раздела жидкость — газ при диффузионном испарении // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. мат. и физ. 2010. Т. 3, № 2. С. 216–227.
10. **Братухин Ю. К., Макаров С. О.** К вопросу о граничных условиях на поверхности двух несмешивающихся жидкостей // Термо- и концентрационно-капиллярные эффекты в сложных системах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. С. 156–177.
11. **Шлиомис М. И., Якушин В. И.** Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Учен. зап. Перм. гос. ун-та. Сер. Гидродинамика. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1972. № 4. С. 129–140.
12. **Гончарова О. Н., Кабов О. А.** Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 2. С. 183–188.
13. **Goncharova O. N., Kabov O. A.** Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2795–2807.
14. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
15. **Андреев В. К.** Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2010.
16. **Гончарова О. Н., Резанова Е. В.** Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений. Ч. 1 // Изв. Алт. гос. ун-та. 2013. № 77. С. 31–33.
17. **Пригожин И.** Химическая термодинамика / И. Пригожин, Р. Дефэй. Новосибирск: Наука, 1966.
18. **Ghezzehei T. A., Trautz R. C., Finsterle S., et al.** Modeling coupled evaporation and seepage in ventilated cavities // Vadose Zone J. 2004. N 3. P. 806–818.
19. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
20. **Бекежанова В. Б., Андреев В. К.** Об однонаправленном двухслойном течении в условиях микрогравитации // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 639–640.

*Поступила в редакцию 17/VI 2013 г.,
в окончательном варианте — 11/IX 2013 г.*
