

УДК 517.974+534.14+534.2

АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА ВБЛИЗИ ВЛОЖЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ В КАНАЛЕ

Н. А. Хасанов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: nail_khasanov@mail.ru

С помощью математической модели, описывающей собственные колебания газа вблизи нескольких тонкостенных цилиндрических препятствий в канале, для случая осесимметричного расположения препятствий найдены зависимости частот собственных колебаний от длины препятствий и их расположения. Для первых мод собственных колебаний найдены поле скоростей и распределение плотности газа в канале.

Ключевые слова: собственные колебания, резонансные явления, спектральные свойства оператора Лапласа, тонкостенные препятствия в каналах и трубах.

Введение. Первые исследования аэроакустических резонансных явлений вблизи тонкостенных препятствий в потоке газа в однородном прямоугольном канале были проведены для случая плоскопараллельного движения газа. В [1, 2] показано, что колебания газа могут являться чисто акустическими, не зависеть от упругих колебаний пластин и быть обусловленными наличием упорядоченных структур в следах за пластинами. Проведена классификация мод резонансных колебаний, экспериментально и численно исследована зависимость резонансных частот от геометрических параметров пластин в прямоугольном канале. Обычно такие колебания называются вихревым звуком, или эоловыми тонами [3].

Собственные акустические колебания вблизи тонкостенных цилиндрических препятствий в канале изучены в [4, 5]. В этих работах исследованы вопросы существования собственных колебаний в бесконечных цилиндрических областях, содержащих тонкое цилиндрическое препятствие. Получены критерии существования собственных колебаний. Для случая осесимметричного расположения препятствий исследована зависимость частот собственных колебаний от размеров препятствия. Для первых мод исследована форма собственных колебаний. Первые результаты экспериментальных исследований эоловых тонов при наличии в канале цилиндрических тонкостенных препятствий приведены в работе [6].

Основной трудностью, возникающей при описании собственных колебаний в неограниченных областях, является то, что собственные частоты акустических колебаний погружены в непрерывный спектр частот, соответствующих обобщенным собственным колебаниям [3, 4]. В [5] эта трудность преодолена путем сужения класса допускаемых решений. В настоящей работе исследованы собственные колебания газа вблизи нескольких вложенных цилиндрических препятствий, найдены зависимости частот собственных колебаний от длины препятствий и их расположения.

Актуальность проводимого исследования обусловлена использованием в аэроакустике летательных аппаратов, каналов и труб с препятствиями и спрямляющими элементами. Цилиндрический канал, содержащий тонкостенные препятствия, широко применяется в технике (турбины, вентиляторы, трубопроводы).

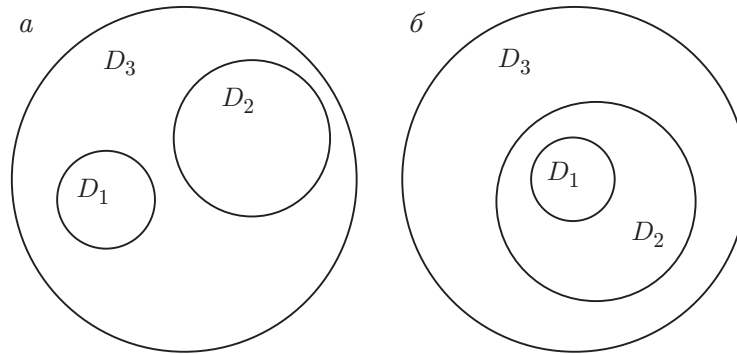


Рис. 1. Примеры расположения направляющих цилиндрического канала и препятствия:

a — невложенные цилиндрические препятствия; *б* — вложенные цилиндрические препятствия

1. Уравнения, описывающие акустические колебания. Пусть (x, y, z) — декартова система координат трехмерного пространства \mathbb{R}^3 . Бесконечный цилиндрический канал описывается с помощью направляющей $\Gamma = \{(x, y): G(x, y) = 0\}$ и образующей, параллельной оси Oz . Направляющая цилиндрического канала предполагается достаточно гладкой, связной и ограниченной на плоскости (x, y) . Для описания поверхности цилиндрического канала используется обозначение $Z_\Gamma = \Gamma \times \mathbb{R}$. Препятствия, находящиеся в канале, предполагаются ограниченными, бесконечно тонкими, цилиндрическими, с образующими, параллельными оси Oz , и описываются с помощью направляющих $\gamma_i = \{(x, y): g_i(x, y) = 0\}$ на плоскости (x, y) и систем неравенств $-\infty < a_i(x, y) \leq z \leq b_i(x, y) < +\infty$, $(x, y) \in \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Для описания поверхностей препятствий используются обозначения $Z_\gamma = \bigcup_{i=1}^N Z_{\gamma_i}$, $Z_{\gamma_i} = \{(x, y, z): g_i(x, y) = 0, a_i(x, y) \leq z \leq b_i(x, y)\}$. Предполагается, что направляющие цилиндрических препятствий находятся внутри направляющей канала и делят область $D = \text{Int}(\Gamma)$, ограниченную Γ , на несколько связных подобластей $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots$ (рис. 1).

Потенциал $u(x, y, z, t)$ акустического возмущения скорости предполагается периодически зависящим от времени: $u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp(i\omega t)$, поэтому можно считать, что уравнения для потенциала акустического возмущения скорости $u(x, y, z)$ имеют вид

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega = D \times \mathbb{R} \setminus Z_\gamma. \quad (1.1)$$

Здесь $\lambda = \omega H/c$, $x = \tilde{x}/H$, $y = \tilde{y}/H$ — безразмерные частота и пространственные переменные соответственно; c — скорость звука; H — характерный радиус цилиндрического канала; ω — круговая частота акустических колебаний. Предполагается, что в безразмерных переменных характерный радиус канала равен единице. На препятствиях Z_γ и стенках канала Z_Γ должны быть выполнены условия непротекания:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad Z_\Gamma \cup Z_\gamma. \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к соответствующей поверхности. Согласно физическому содержанию задачи для ее решения $u(x, y, z)$ должно выполняться условие конечности энергии во всей области колебаний

$$E(u) = \int_{\Omega} [|u|^2 + |\nabla u|^2] d\Omega < \infty. \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega = D \times \mathbb{R} \setminus Z_\gamma$ — область колебаний; $E(u)$ имеет смысл энергии колебаний.

Решение уравнения (1.1) удовлетворяет условию излучения, если для некоторого достаточно малого ε ($\varepsilon > 0$, $-1/\varepsilon < a \leq z \leq b < 1/\varepsilon$, $a = \min_{i=1}^N \inf_{(x,y)} a_i(x,y)$, $b = \max_{i=1}^N \sup_{(x,y)} b_i(x,y)$), справедливы представления

$$u(x, y) = \begin{cases} c_0^{(+)} \exp(i\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(+)} Y_k(x, y) \exp(-z\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}), & z \geq 1/\varepsilon, \\ c_0^{(-)} \exp(-i\lambda z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(-)} Y_k(x, y) \exp(z\sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}), & z \leq -1/\varepsilon \end{cases} \quad (1.4)$$

($Y_k(x, y)$ и β_k^2 ($k = 0, 1, 2, \dots$) — собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в области D с условиями Неймана на границе Γ , пронумерованные в порядке возрастания собственных значений).

Если $\lambda^2 \geq \beta_k^2$, то функции $Y_k(x, y) \exp(\pm iz\sqrt{\lambda^2 - \beta_k^2})$ ($k = 0, 1, \dots$) описывают обобщенные собственные волны в канале без препятствия. Если $k = 0$, то эти волны существуют при всех вещественных значениях безразмерной частоты λ . Это означает, что соответствующее задаче (1.1), (1.2) самосопряженное расширение оператора Лапласа Δ имеет непрерывный спектр, который заполняет всю неотрицательную часть вещественной прямой. Точечный спектр этого оператора погружен в непрерывный спектр и соответствует значениям λ^2 , для которых существует нетривиальное решение задачи (1.1)–(1.3).

Далее обобщенные собственные волны в канале, описываемые с помощью функций $W_0 = \exp(i\lambda z)$, будем называть поршневыми модами [3, 5].

Так как функция, описывающая поршневую моду, не зависит от переменных x, y , то поршневая мода является обобщенной собственной функцией канала как с тонкостенными цилиндрическими препятствиями, так и без них.

2. Сужение класса решений. В соответствующем пространстве функций $H^1(\Omega)$ (пространстве Соболева) собственные функции имеют нулевую проекцию на поршневую моду, которая является обобщенной собственной функцией [7]. Поэтому если собственная функция u^* существует, то при всех значениях λ она должна удовлетворять необходимому условию

$$\int_{\Omega} \exp(i\lambda z) u^*(x, y, z) d\Omega = 0.$$

Это условие выполняется при всех λ тогда и только тогда, когда для всех z справедливо тождество

$$\int_D u^*(x, y, z) dx dy \equiv 0. \quad (2.1)$$

Соотношения (1.1)–(1.3), (2.1) представляют собой задачу Неймана для уравнения Гельмгольца, которая в [5] называется задачей СКО (задачей о собственных колебаниях, ортогональных поршневой моде). Непрерывный спектр σ_1 задачи СКО имеет вид $\sigma_1 = [\beta_1^2, \infty)$, поэтому собственные значения ищутся в интервале $(0, \beta_1^2)$.

Если при надлежащем выборе начала координат $z = 0$ задача инвариантна относительно замены переменных $z \rightarrow -z$, то любое решение u этой задачи можно представить в виде $u = u_s + u_a$, где $u_s(x, y, z) = u_s(x, y, -z)$, $u_a(x, y, z) = -u_a(x, y, -z)$ — симметричная

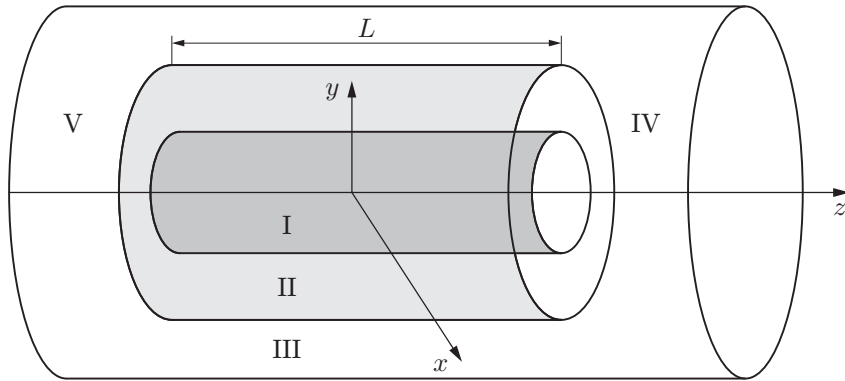


Рис. 2. Схема двух вложенных цилиндрических препятствий:
I-V — подобласти области Ω

(четная) и антисимметричная (нечетная) по z составляющие u соответственно. В силу линейности задача СКО разбивается на две независимые задачи для четных и нечетных по z функций [5].

3. Задача СКО1. Задачу о собственных колебаниях, ортогональных поршневой моде, в круглом канале вблизи двух соосных вложенных круглых тонкостенных цилиндрических препятствий одинаковой длины, оси которых совпадают с осью канала (рис. 2), далее будем называть задачей СКО1.

Пусть (r, φ, z) — цилиндрическая система координат, ось z которой проходит через центр направляющих препятствия и канала, являющихся концентрическими окружностями в некоторой плоскости $z = \text{const}$. Направляющие $Z_\Gamma, Z_{\gamma_1}, Z_{\gamma_2}$ имеют вид $\Gamma = \{(r, \varphi, z): r = 1, z = \text{const}\}$, $\gamma_1 = \{(r, \varphi, z): r = h_1, z = \text{const}\}$, $\gamma_2 = \{(r, \varphi, z): r = h_2, z = \text{const}\}$ ($h_1 < h_2 < 1$). Кромки Z_{γ_1} и Z_{γ_2} находятся в плоскостях $z = -L/2$ и $z = L/2$, начало координат расположено в центре канала.

Так как задача СКО1 обладает осью симметрии z , то можно считать, что решения этой задачи не зависят от угловой координаты φ и являются функциями только r, z . Область колебаний Ω целесообразно разбить на подобласти [5, 8]: I — $\{(r, \varphi, z): r < h_1, -L/2 < z < L/2\}$; II — $\{(r, \varphi, z): h_1 < r < h_2, -L/2 < z < L/2\}$; III — $\{(r, \varphi, z): h_2 < r < 1, -L/2 < z < L/2\}$; IV — $\{(r, \varphi, z): r < 1, L/2 < z\}$; V — $\{(r, \varphi, z): r < 1, z < -L/2\}$ (см. рис. 2). Пусть u_j ($j = 1, \dots, 5$) — сужения решения u задачи СКО1 на подобласти I–V соответственно. Приближенные собственные функции $v(r, z)$ задачи СКО1 в областях I–III (окрестностях препятствий) можно искать (для симметричных и антисимметричных по z функций) в виде [5, 8]

$$\begin{aligned}
 v_1(r, z) &= a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M a_m J_0\left(\frac{r\beta_m}{h_1}\right) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\beta_m^2/h_1^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\beta_m^2/h_1^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix}, \\
 v_2(r, z) &= b_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M b_m R_{1m}(r) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\sigma_{1m}^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\sigma_{1m}^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix}, \\
 v_3(r, z) &= c_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda z) \\ \sin(\lambda z) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M c_m R_{2m}(r) \begin{Bmatrix} \text{ch}(z\sqrt{\sigma_{2m}^2 - \lambda^2}) \\ \text{sh}(z\sqrt{\sigma_{2m}^2 - \lambda^2}) \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$u_4(r, z) = d_0 \exp(i\lambda z) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m J_0(r\beta_k) \exp(-z\sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}),$$

$$u_5(r, z) = \left\{ \begin{array}{l} +u_4(r, -z) \\ -u_4(r, -z) \end{array} \right\}.$$

Функция $u_5(r, z)$ выражается через $u_4(r, z)$ с помощью условий симметрии или антисимметрии для четных и нечетных по z мод колебаний. Здесь и далее β_m^2, σ_{im}^2 ($m = 1, 2, \dots, i = 1, 2$) — собственные значения оператора Лапласа в областях D (круге) и D_2, D_3 (кольцах) с граничными условиями Неймана (β_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) являются нулями функции $J_1(\beta)$, а σ_{im}^2 ($m = 1, 2, \dots, i = 1, 2$) — нулями функций $J_1(\sigma h_2)Y_1(\sigma h_1) - J_1(\sigma h_1)Y_1(\sigma h_2)$ и $J_1(\sigma)Y_1(\sigma h_2) - J_1(\sigma h_2)Y_1(\sigma)$, пронумерованными в порядке возрастания); функции $R_{im}(r)$ ($m = 1, 2, \dots, i = 1, 2$) представляют собой собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа в областях D_2, D_3 и имеют вид $R_{im}(r) = c_{im}^{(1)}J_0(\sigma_{im}r) + c_{im}^{(2)}Y_0(\sigma_{im}r)$; коэффициенты $c_{im}^{(1)}, c_{im}^{(2)}$ находятся численно из условий непротекания на границах D_2, D_3 для всех σ_{im} . Условия (2.1) выполняются, если

$$d_0 = 0, \quad a_0 h_1^2 + b_0(h_2^2 - h_1^2) + c_0(1 - h_2^2) = 0. \quad (3.2)$$

Для того чтобы функция вида (3.1) с условиями (3.2) являлась решением задачи СКО1, на границах областей I–IV, I–V, II–IV, II–V, III–IV и III–V должны быть выполнены условия непрерывности решения и его нормальной производной (условия сшивания). В силу симметрии задачи по z достаточно выполнения условий сшивания на границах областей I–IV, II–IV и III–IV. Пусть G_{14} обозначает границу между областями I и IV, G_{24} — границу между областями II и IV, а G_{34} — границу между областями III и IV. В пространстве переменных (r, z) эти границы представляют собой отрезки прямых. Условия склейки (сшивания) имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= u_4, & \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \frac{\partial u_4}{\partial z} & \text{на } G_{14}, \\ u_2 &= u_4, & \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \frac{\partial u_4}{\partial z} & \text{на } G_{24}, \\ u_3 &= u_4, & \frac{\partial u_3}{\partial z} &= \frac{\partial u_4}{\partial z} & \text{на } G_{34}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя ортогональность в области D функций Бесселя $J_0(\beta_m r)$ и $J_0(\beta_k r)$ ($k \neq m$) и исключая d_k , соотношения (3.3) можно записать в дискретизованном виде [5]

$$\begin{aligned} \int_0^{h_1} \left(\alpha_k v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) J_0(\beta_k r) r dr + \int_{h_1}^{h_2} \left(\alpha_k v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) J_0(\beta_k r) r dr + \\ + \int_{h_2}^1 \left(\alpha_k v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) J_0(\beta_k r) dr = 0 \quad (z = L/2, \quad k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\alpha_k = \sqrt{\beta_k^2 - \lambda^2}$.

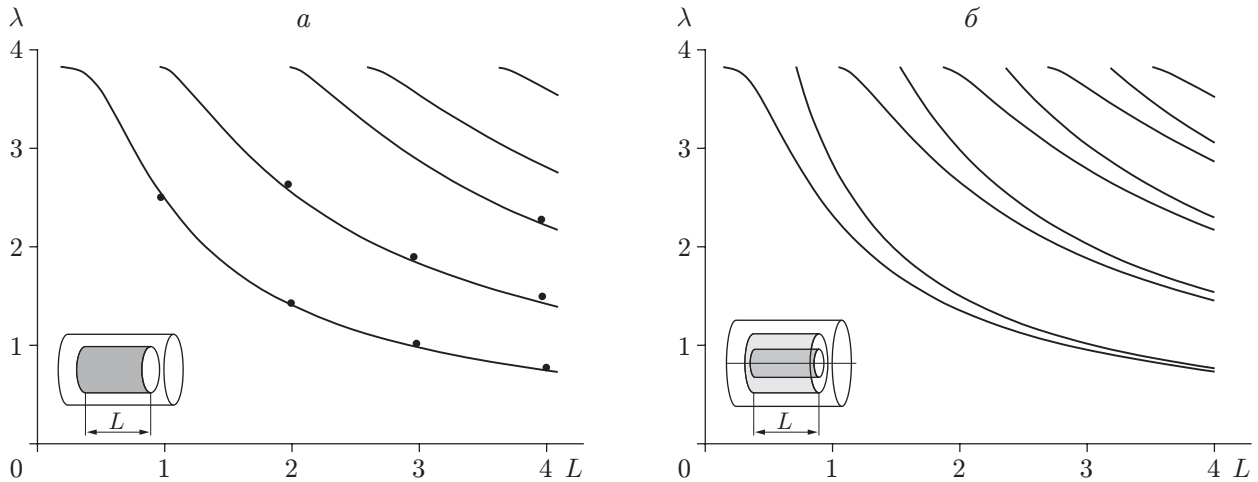


Рис. 3. Зависимость собственных частот от длины препятствий:
a — одно препятствие, *б* — два вложенных препятствия; точки — экспериментальные данные [6], линии — результаты численного расчета собственных частот

В [5] на кромках $z = -L/2$, $z = L/2$ препятствий $Z_{\gamma 1}$ и $Z_{\gamma 2}$ для четных и нечетных мод колебаний вводились дополнительные условия, которые являются следствием (1.3):

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 = 0, & \quad z = L/2, \quad r = h_1, \\ v_2 - v_3 = 0, & \quad z = L/2, \quad r = h_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения (3.5), второе уравнение в (3.2) и $3M$ первых уравнений в (3.4) образуют однородную систему $3M + 3$ уравнений для неизвестных a_m, b_m, c_m ($m = 0, 1, \dots, M$), описывающую приближенные собственные функции задачи СКО1. Приближенные собственные значения задачи СКО1 находились из условия равенства нулю определителя этой системы. Данный способ расчета нетрудно обобщить на N цилиндрических препятствий.

В [6] описаны результаты экспериментальных исследований золотых тонов цилиндрических препятствий радиусом $r = 0,42$ и длиной $L/H = 1, 2, 3, 4$ в канале. Исследования аэроакустических резонансных явлений проводились в аэродинамической трубе Института теоретической и прикладной механики СО РАН. На рис. 3, *a* приведены экспериментальные данные [6] и результаты численных расчетов.

Для фиксированных радиусов препятствий зависимость собственных частот от длины препятствий исследовалась численно при $N = 1, 2, 3$. Собственные частоты колебаний для первой моды существуют для всех длин цилиндров [5, 9], первая собственная частота стремится к $\beta_1 = 3,831$ при $L \rightarrow 0$. Все последующие моды собственных колебаний вблизи тонкостенных цилиндрических препятствий в канале появляются при достижении некоторой критической длины препятствия $L_*^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$ — номер моды; $L_*^{(k)} < \infty$ — некоторое максимальное значение длины препятствия, для которого соответствующей моды собственных колебаний не существует, например для $N = 1$ $L_*^{(k)} = \pi(k-1)/\beta_1$ [5, 9]).

С увеличением длины препятствия L значения резонансных частот уменьшаются. Кроме того, при наличии двух и более вложенных препятствий количество собственных частот увеличивается.

В данной работе зависимость собственных частот от радиусов препятствий исследовалась при $L = 1$. В случае одного препятствия собственные частоты имеют минимум при $h = \sqrt{2}/2$ (при этом значении h объемы подобластей равны). В случае двух препятствий зависимость сложнее.

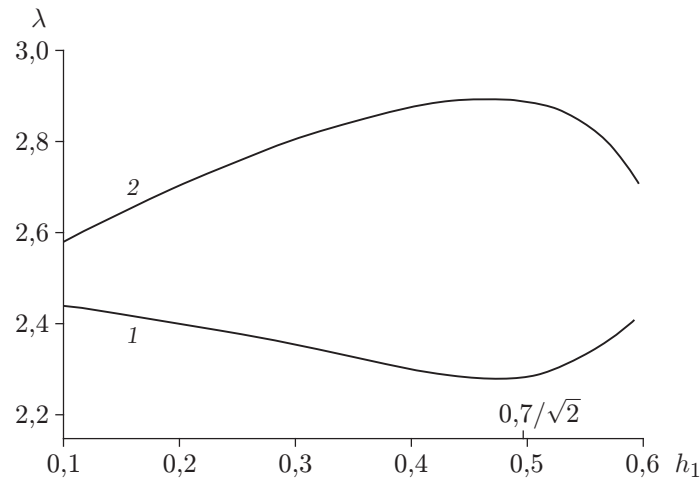


Рис. 4. Зависимость первых двух мод собственных частот от радиуса внутреннего препятствия:

1 — первая мода, 2 — вторая мода

При $h_2 = 0,7$ с увеличением h_1 в каждой паре двоянных мод собственных частот (см. рис. 3, б) вторая мода достигает максимума, а первая — минимума (рис. 4). Эти значения достигаются в точке $h_1 = 0,7\sqrt{2}/2$. При $h_1 \rightarrow 0$ или $h_1 \rightarrow h_2$ для каждой пары двоянных мод собственные частоты акустических колебаний вблизи двух цилиндрических препятствий стремятся друг к другу. Тот же эффект имеет место при фиксированном значении h_1 с увеличением h_2 .

Для исследования собственных колебаний вблизи препятствий в канале проведены расчеты при $L = 2$, $h_i = i/(N + 1)$. На рис. 5 приведена зависимость потенциала скоростей от пространственных координат для первой моды в случае двух и трех препятствий. Так как в случае установившихся акустических колебаний потенциал скоростей соответствует акустическому полю давления, то можно считать, что на рис. 5 показано поле акустического давления, обусловленного собственными колебаниями. Нетрудно заметить, что на препятствиях потенциал акустических скоростей претерпевает разрыв, а колебания внутри первого препятствия и снаружи последнего находятся в противофазе.

На рис. 6 представлено поле акустических скоростей вблизи двух препятствий для первой моды собственных колебаний в фазе разрежения внутри первого препятствия и в фазе сжатия между вторым препятствием и цилиндрическим каналом. Следует отметить, что наибольшая интенсивность колебаний первой моды наблюдается в середине препятствий [6].

Анализ результатов, представленных на рис. 5, 6, позволяет сделать следующие выводы. После достижения фазы наибольшего сжатия в одном из каналов (или в нескольких каналах) наступает фаза разрежения. Газ перетекает в соседнюю область, в которой под действием перепада давления и сил инерции достигает состояния наибольшего сжатия. Вследствие собственных колебаний, соответствующих первой моде, происходит перетекание газа из области III в область II и из области II в область I через области IV и V. Колебания в областях I и III находятся в противофазе (см. рис. 6). Аналогичные результаты имеют место при любом количестве вложенных тонкостенных цилиндрических препятствий: в каждый момент времени поле давления, обусловленного собственными колебаниями, содержит области сжатия и разрежения. Амплитуды собственных колебаний в этих областях удовлетворяют условию ортогональности поршневой моде канала (см. (2.1)).

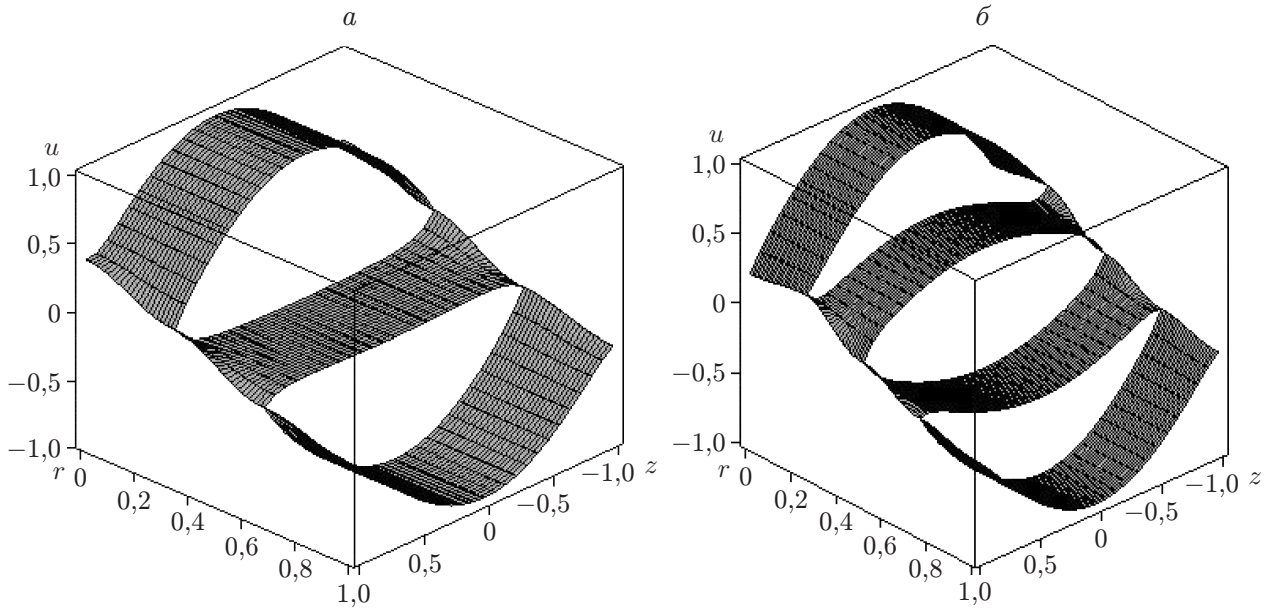


Рис. 5. Зависимость амплитуды собственных колебаний, соответствующих первой моде, от пространственных координат:

a — два вложенных препятствия; *b* — три вложенных препятствия

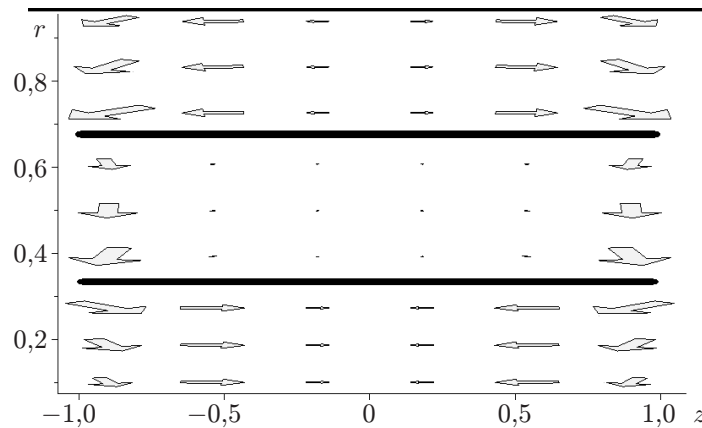


Рис. 6. Поле скоростей вблизи двух вложенных препятствий для первой моды собственных колебаний

В силу условий излучения (1.4) собственные функции локализованы в окрестности препятствий и по мере удаления от них затухают по экспоненциальному закону. Это означает, что все результаты, приведенные в настоящей работе, с высокой точностью справедливы для тонкостенных препятствий в конечном, но достаточно длинном канале.

Заключение. В данной работе проведены численные исследования собственных колебаний вблизи нескольких тонкостенных вложенных цилиндрических препятствий в канале. Численно найдена зависимость частоты собственных колебаний от геометрических параметров препятствий и их расположения. Для случая одного цилиндрического препятствия проведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными. Исследованы акустические собственные колебания вблизи препятствий. Для первых мод

собственных колебаний найдены зависимость амплитуды колебаний от пространственных координат, поле скоростей и распределение плотности газа в канале.

Автор выражает благодарность С. В. Сухину за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Parker R.** Resonance effects in wake shedding from parallel plates: some experimental observation // J. Sound Vibration. 1966. V. 4, N 1. P. 62–72.
2. **Parker R.** Resonance effects in wake shedding from parallel plates: calculation of resonant frequencies // J. Sound Vibration. 1967. V. 5, N 2. P. 330–343.
3. **Сухинин С. В., Бардаханов С. П.** Эоловы тона пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 69–77.
4. **Сухинин С. В.** Собственные колебания в открытых цилиндрических областях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1995. Вып. 110. С. 139–152.
5. **Сухинин С. В.** Акустические колебания около тонкостенных цилиндрических препятствий в канале // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 133–142.
6. **Бардаханов С. П., Белай О. В.** Возбуждение субгармонических возмущений в осесимметричном течении с когерентными структурами в режиме аэроакустического резонанса // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 59–68.
7. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. С. 327–374.
8. **Миттра Р.** Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. М.: Мир, 1974.
9. **Рид М.** Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. М.: Мир, 1982. Т. 4. С. 285–303.

*Поступила в редакцию 12/III 2010 г.,
в окончательном варианте — 29/III 2011 г.*
