Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В РЕЛАКСАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ

УДК 532.546

О. Ю. Динариев

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 123810 Москва

Микроскопические релаксационные процессы в системе порода — насыщающий флюид проявляются в нестационарных процессах фильтрации, когда характерное время протекания макроскопического процесса сравнимо по величине с внутренними временами релаксации. Их следует учитывать при интерпретации соответствующих промысловых исследований.

Ранее были получены асимптотики для кривой восстановления давления (КВД) в релаксационной теории фильтрации при малых временах [1] и при больших временах для дискретного спектра внутренних времен релаксации [2]. В настоящей работе выведена асимптотика КВД при больших временах для непрерывного спектра чисто диссипативных внутренних релаксационных процессов.

Для произвольной функции времени $f = f(t)$ обозначим через $f_F = f_F(\omega)$ ее преобразование Фурье:

$$f_F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} f(t)\,dt.$$

Приведем в краткой форме основные положения теории релаксационной изотермической фильтрации в однородном изотропном коллекторе [2–7].

В релаксационной теории фильтрации принимается обобщенный закон Дарси

$$u^i(t_0, x^j) = -k\mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\,\frac{\partial G}{\partial x^i}\,(t, x^j)\,dt. \tag{1}$$

Здесь $G = p + \rho U$; u^i — скорость фильтрации; k — проницаемость; μ — сдвиговая вязкость флюида; p — давление; ρ — массовая плотность; U — гравитационный потенциал; латинские индексы i, j пробегают значения 1, 2, 3, соответствующие декартовым координатам x^i.

Ядро $K = K(t)$ характеризует внутренние релаксационные процессы в системе пористая среда — насыщающий флюид. Оно подчиняется ряду условий, вытекающих из физических и термодинамических соображений:

1. $K(t)$ — неотрицательная монотонно убывающая функция, имеющая размерность t^{-1} (t — время).

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ — условие редукции (1) к обычному закону Дарси для медленных процессов.

3. $K(t) = 0$ при $t < 0$ (причинность); $K(0) < +\infty$ — условие конечности скорости сигнала [8].

В силу последнего условия по теореме Пэли — Винера [9] функция $K_F = K_F(\omega)$ является голоморфной в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Ранее показано

[6, 7], что выполняется условие диссипативности.

4. $\operatorname{Re} K_F(\omega) > 0$ при $\operatorname{Im} \leqslant 0$.

Из условия 2 вытекает, что

$$K_F(0) = 1. \tag{2}$$

Из условия 3 следует, что в области голоморфности справедлива асимптотика

$$K_F(\omega) = k_1(i\omega)^{-1} + o(|\omega|^{-1}), \quad k_1 = K(0). \tag{3}$$

В настоящей работе рассматривается случай, когда в системе пористая среда — насыщающий флюид имеет место непрерывный спектр внутренних чисто диссипативных релаксационных процессов. Это означает, что ядро может быть представлено в функциональной форме

$$K(t) = \int_0^{+\infty} A(\tau)\,\tau^{-1} \exp\left(-t/\tau\right) d\tau, \tag{4}$$

где $A(\tau)$ — гладкая неотрицательная функция. В [2] для ядра был принят формально такой же функциональный вид (4), но весовая функция $A(\tau)$ представлялась в виде суммы δ-функций. В фурье-представлении выражение (4) принимает вид

$$K_F(\omega) = \int_0^{+\infty} A(\tau)(1 + i\tau\omega)^{-1} d\tau. \tag{5}$$

Из (2) и (5) получим нормировочное равенство

$$1 = \int_0^{+\infty} A(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Кроме того, из условия 3 вытекает сходимость интеграла

$$k_1 = \int_0^{+\infty} \tau^{-1} A(\tau)\,d\tau < +\infty. \tag{7}$$

Как легко убедиться, если принять (4)–(7), условия 1–4 для релаксационного ядра удовлетворяются. Из выражения (5) следует, что функция $K_F(\omega)$ голоморфна с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re}\omega = 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$. Используя формулу Сохоцкого — Племеля, несложно вычислить функцию $K_F(\omega)$ на берегах разреза:

$$\begin{gathered} K_{F+} = K_F(iy + \varepsilon) = L_1(y) - i\pi L_2(y), \quad K_{F-} = K_F(iy - \varepsilon) = L_1(y) + i\pi L_2(y), \\ L_1(y) = \text{V. p.} \int_0^{+\infty} z^{-1} A(z^{-1})(z - y)^{-1} dz, \quad L_2(y) = y^{-1} A(y^{-1}). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь и далее $y > 0$; ε — бесконечно малое положительное число.

Как и в [2], рассмотрим линейную задачу о КВД в цилиндрически-симметричной постановке. Динамика поля давления определяется интегродифференциальным уравнением [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t_0, r) = æ \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\,\Delta p(t, r)\,dt, \tag{9}$$

где $æ = kE/(m\mu)$; r — расстояние от оси скважины; $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r$ — оператор Лапласа; m — пористость; $E = (E_1^{-1} + (m^{-1} - 1)E_2^{-1})^{-1}$; E_1 и E_2 — соответственно объемные модули упругости флюида и твердой фазы (скелета породы). Параметр r изменяется в пределах $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ (r_1 — радиус скважины, r_2 — радиус контура питания).

Для уравнения (9) необходимо принять два граничных условия [2]:

$$q(t) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t) \frac{\partial}{\partial r} p(t, r_1)\, dt, \qquad \lambda = 2\pi r_1 \rho_0 \mu^{-1}; \tag{10}$$

$$p(t, r_2) = p_{\text{пл}}. \tag{11}$$

Здесь ρ_0 — массовая плотность пластового флюида; $q(t)$ — массовый дебит на единицу продуктивной толщи; $p_{\text{пл}}$ — пластовое давление.

Будем использовать систему единиц измерения, в которой выполняются равенства

$$æ = r_1 = 1. \tag{12}$$

Величина $æ$ имеет размерность l^2/t (l — длина), поэтому условие (12) фиксирует единицу длины и единицу времени.

Введем новую неизвестную функцию $P = P(t, r) = p(t, r) - p_{\text{пл}}$.

Осуществляя в (9)–(11) преобразование Фурье, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\Delta - \alpha^2)\, P_F = 0 \tag{13}$$

с граничными условиями

$$q_F = \lambda K_F \frac{\partial P_F}{\partial r}\Big|_{r=1}, \qquad P_F\Big|_{r=r_2} = 0. \tag{14}$$

В уравнении (13) появляется комплексная функция $\alpha = \alpha(\omega)$, которая определяется из соотношений

$$\alpha^2 = i\omega/K_F(\omega), \qquad \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0. \tag{15}$$

В [2] на основе общих условий 1–4 без использования явной формулы (5) показано, что функция $\alpha = \alpha(\omega)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\omega < 0$ и непрерывна вплоть до действительной оси. Формула (5) позволяет продолжить функцию $\alpha = \alpha(\omega)$ в верхнюю комплексную полуплоскость. Очевидно, что при этом она будет иметь особенности, связанные с нулями и особенностями функции $K_F(\omega)$, а также с процедурой извлечения корня в (15). Заметим, что

$$\operatorname{Im} K_F = -A_1 \operatorname{Re}\omega, \quad A_1 = \int\limits_0^{+\infty} \tau A(\tau) |1 + i\tau\omega|^{-2}\, d\tau > 0.$$

Поэтому функция $K_F(\omega)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Re}\omega \neq 0$, и, следовательно, функция $\alpha(\omega)$ голоморфна с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re}\omega = 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$. Несложно вычислить значения на берегах разреза:

$$\alpha_+ = \alpha(iy + \varepsilon) = iy^{1/2}(K_{F+})^{-1/2}. \tag{16}$$

$$\alpha_- = \alpha(iy - \varepsilon) = -iy^{1/2}(K_{F-})^{-1/2}. \tag{17}$$

Задача (13), (14) имеет решение

$$P_F = \frac{q_F(-I_0(\alpha r_2)K_0(\alpha r) + K_0(\alpha r_2)I_0(\alpha r))}{\lambda K_F \alpha (K_0(\alpha r_2)I_1(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha r_2))}, \tag{18}$$

где $K_n(z)$, $I_n(z)$ — функции Макдональда [10].

Если скважина работает с постоянным дебитом Q, то $P = P(r) = \lambda^{-1}Q\ln(r/r_2)$.

Для решения задачи КВД нужно положить в формуле (18) $q(t) = Q\theta(-t)$ ($\theta(t)$ — функция Хевисайда). Введем разность между текущим и начальным давлением: $\Phi = P - \lambda^{-1}Q\ln(r/r_2)$.

Функция Φ_F может быть вычислена по формуле (18), если сделать подстановку $q_F = iQ(\omega - i\varepsilon)^{-1}$, что в реальном времени формально соответствует дебиту $q(t) = -Q\theta(t)$. Как и в [2], будем искать промежуточную асимптотику КВД, когда можно пренебречь конечностью r_2. При переходе к пределу $r_2 \to +\infty$ выражение (18) приводится к виду $\Phi_F = -q_F K_0(\alpha r)/(\lambda K_F \alpha K_1(\alpha))$.

Задача определения КВД состоит в вычислении функции $\varphi(t) = \Phi\big|_{r=1}$. После выполнения обратного преобразования Фурье для этой функции получим выражение

$$\varphi(t) = -(2\pi\lambda)^{-1}Qi\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega - i\varepsilon)^{-1}f_1(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad \left(f_1(\omega) = \frac{K_0(\alpha)}{K_F\alpha K_1(\alpha)}\right). \tag{19}$$

Формула (19) представляет КВД в виде функционала от ядра K:

$$\varphi(t) = \Psi[t; K(t')]. \tag{20}$$

Как и в [2], будем искать асимптотику $\varphi(t)$ при больших t. Так как при значениях t, существенно превышающих внутренние времена релаксации, влияние релаксационного ядра становится незначительным, то, если просто перейти в формуле (19) к пределу $t \to +\infty$, получим обычную логарифмическую асимптотику [11], соответствующую случаю тривиального ядра $K_F = 1$. Чтобы найти асимптотику при больших t, сравнимых по порядку величины с внутренними временами релаксации, нужно сделать в функционале (19) подстановку

$$t = t_*\delta^{-1}, \qquad K(t') = K_*(t'_*) \tag{21}$$

и, считая t_*, K_* фиксированными, вычислить асимптотику при $\delta \to +0$. При $\delta \to +0$ функционал (20) неограниченно возрастает. Введем на пространстве функционалов вида (20) отношение эквивалентности: функционалы Ψ_1 и Ψ_2 эквивалентны ($\Psi_1 \sim \Psi_2$), если при подстановке (21) в выражения для функционалов при $\delta \to +0$

$$\Psi_1 - \Psi_2 = O(1).$$

Осуществляя переход к эквивалентным функционалам, упростим формулу (19). Для этого напомним, что функции Макдональда допускают представление [10]

$$K_0(z) = -J_0(z^2)\ln(z/2) + W_0(z^2), \quad K_1(z) = z^{-1}(J_1(z^2)\ln(z) + W_1(z^2)), \tag{22}$$

где $J_n(z)$, $W_n(z)$ — целые функции; $J_0(0) = W_1(0) = 1$; $J_1(0) = 0$; $W_0(0) = -\mathbf{C}$; $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера. Формулы (22) позволяют выделить асимптотику функции $f_1(\omega)$ при подстановке (21). При этом получим

$$\varphi(t) \sim (2\pi\lambda)^{-1}Qi\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega - i\varepsilon)^{-1}f_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad f_2(\omega) = \ln(\alpha/K_F). \tag{23}$$

Преобразуем интеграл вдоль действительной оси в формуле (23) к интегралу вдоль контура C (рис. 1). Раскрывая подынтегральные выражения с учетом (8), (16), (17), вы-

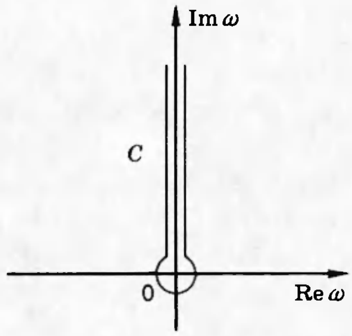

Рис. 1

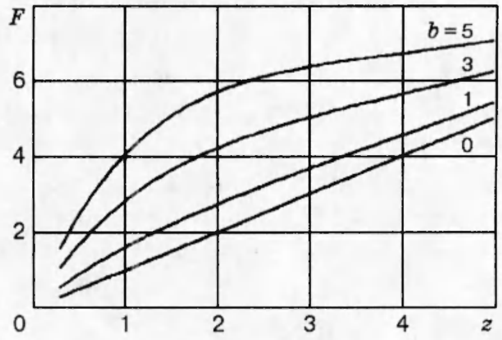

Рис. 2

водим

$$\varphi(t) \sim (2\pi\lambda)^{-1} Qi(i\pi \ln\varepsilon + I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon}), \qquad I_{1\varepsilon} = i\pi \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} y^{-1} \mathrm{e}^{-yt}\, dy,$$
$$I_{2\varepsilon} = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} y^{-1}((\ln\alpha_+/K_{F+}) - (\ln\alpha_-/K_{F-}) - i\pi)\mathrm{e}^{-yt} dy. \tag{24}$$

Здесь ε — радиус бесконечно малой окружности, вдоль которой обходится точка $\omega = 0$ (рис. 1). Для перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ в формуле (24) уместно привести две вспомогательные формулы из [12]:
формула № 3.352.4

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-bz)\, dz}{a+z} = -\exp(ab)\mathrm{Ei}(-ab) \qquad (a, b > 0); \tag{25}$$

формула № 8.214.1

$$\mathrm{Ei}(z) = \mathrm{C} + \ln(-z) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (nn!)^{-1} \quad (z < 0). \tag{26}$$

Отметим, что интеграл $I_{2\varepsilon}$ сходится при $\varepsilon \to 0$. Предел $I_{1\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ вычисляется на основе формул (25), (26). В результате выражение (24) преобразуется к форме, не содержащей параметра ε:

$$\varphi(t) \sim (2\pi\lambda)^{-1} Q(\pi \ln t + \pi \ln \mathrm{C} + iI_{20}). \tag{27}$$

К функционалу I_{20} можно опять применить подстановку (21) и вычислить главный член асимптотики при $\delta \to 0$:

$$I_{20} \sim (-i \ln t J(t)),$$
$$J(t) = (2i)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} y^{-1}(K_{F+}^{-1} - K_{F-}^{-1})\, \mathrm{e}^{-yt}\, dy. \tag{28}$$

Окончательно находим из (27) искомую асимптотику для КВД в виде

$$\varphi(t) \sim (2\lambda)^{-1} Q(1 + \pi^{-1} J(t)) \ln t. \tag{29}$$

Используя формулы (8), несложно убедиться, что $J(t)$ — положительная функция:

$$J(t) = \pi \int\limits_0^{+\infty} y^{-2} A(y^{-1}) |K_{F+}|^{-2} \mathrm{e}^{-yt} dy > 0. \tag{30}$$

С другой стороны, интерпретируя выражение (28) как интеграл в комплексной плоскости вдоль контура C (рис. 1), можно преобразовать его с учетом (3):

$$\pi^{-1} J(t) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ((i\omega - \varepsilon)^{-1} K_F^{-1} - k_1^{-1}) \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega.$$

Правая часть этого уравнения есть обратное преобразование Фурье от функции $((i\omega K_F)^{-1} - k_1^{-1})$.

Итак, внутренние релаксационные процессы приводят к появлению в выражении для КВД (29) функции $J(t)$, которая обращается в нуль для тривиального ядра $K_F = 1$. В силу неравенства (30) неучет релаксационных явлений при интерпретации экспериментальных КВД приводит к занижению проницаемости k.

Для возможности конструктивного использования формулы (29) при интерпретации КВД необходима конкретизация функции $J(t)$. Заметим, что асимптотика $J(t)$ при больших t определяется асимптотикой весовой функции $A(\tau)$ при больших временах релаксации τ. Пусть при больших τ имеет место степенной спектр

$$A(\tau) \approx a_0 \tau^{-1-\beta}, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{31}$$

Предположение (31) удовлетворяет условию сходимости интеграла (6). Из (30), (31) находим асимптотику $J(t)$ при больших t:

$$J(t) \approx \pi a_1 t^{-\beta}, \qquad a_1 = a_0 \Gamma(\beta). \tag{32}$$

Подставляя асимптотику (32) в (29), получим формулу для КВД для степенного спектра внутренних времен релаксации. По сравнению с классической формулой для КВД [11]

$$\Delta p = (2\lambda)^{-1} Q \ln(t/t_0), \tag{33}$$

где t_0 — постоянная с размерностью времени, новая формула содержит дополнительный множитель вида $(1 + a_1 t^{-\beta})$ и два дополнительных «подгоночных» параметра: β и a_1.

Для графической иллюстрации полученного результата на рис. 2 приведено семейство кривых $F = (1 + b(t/t_0)^{-\beta}) \ln(t/t_0)$ в зависимости от $z = \ln(t/t_0)$ для $\beta = 1/2$ при различных значениях параметра b. Случай $b = 0$ качественно соответствует классической КВД (33).

Отметим, что, как видно из полученных результатов, при произвольной спектральной функции $A(\tau)$ задача определения фильтрационно-емкостных свойств пласта по КВД становится некорректной. Для частного вида спектральной функции с конечным числом свободных параметров задача интерпретации КВД может быть корректной, однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Динариев О. Ю.** О некоторых особенностях кривой восстановления давления при релаксационной фильтрации жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 106–111.
2. **Динариев О. Ю.** Кривая восстановления давления в релаксационной теории фильтрации. Случай многих времен релаксации // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 119–125.

3. **Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В.** Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во КГУ, 1980.
4. **Молокович Ю. М., Осипов П. П.** Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во КГУ, 1987.
5. **Молокович Ю. М.** Основы теории релаксационной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 142–153.
6. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Релаксационные явления в насыщенных пористых средах. Линейная теория // Прикл. математика и механика. 1989. № 3. С. 469–475.
7. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Об обобщении закона Дарси для нестационарных режимов фильтрации // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 1. С. 31–36.
8. **Динариев О. Ю.** О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 1095–1097.
9. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
10. **Бейтман Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
11. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
12. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 21/VII 1995 г.,
в окончательном варианте — 6/III 1996 г.