

УДК 519.2

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СПЛАЙНОВЫХ ФУНКЦИЙ С УЧЁТОМ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПОЛОЖЕНИЯ СПЛАЙНОВЫХ УЗЛОВ

В. Г. Гетманов

*Геофизический центр РАН,
119926, Москва, ул. Молодёжная, 3
E-mail: v.getmanov@gcras.ru*

Рассмотрена задача вычисления аппроксимационных сплайновых функций, учитывающая возможность оптимизации расположения сплайновых узлов. Разработаны алгоритмы вычисления аппроксимационных сплайновых функций со свободными условиями на концах интервалов наблюдений, с регулированием сплайнов по нулевым и первым производным на концах интервалов наблюдений и с обеспечением оптимального расположения сплайновых узлов. Представлены результаты математического моделирования работы алгоритмов вычисления аппроксимационных сплайновых функций.

Ключевые слова: цифровая фильтрация, аппроксимация, оптимизация, сплайновые функции, сплайновые узлы.

Введение. Аппроксимационные сплайновые функции (АСФ) применяются в основном для цифровой фильтрации экспериментальных данных. Эти функции целесообразно использовать для многочисленных задач устранения шумов и сглаживания, возможной неравномерной дискретизации, ограниченных интервалов времени наблюдений и значительных нестационарностей в исходных данных.

Как правило, применение традиционных цифровых фильтров [1], например из программных комплексов Filter Design Toolbox или Signal Processing Toolbox [2, 3], для фильтрации (сглаживания) наблюдений с отмеченными особенностями сопряжено с определёнными проблемами и в ряде случаев может быть неэффективным. Цифровые фильтры рассчитываются при условии постоянного шага дискретизации. Ограниченные интервалы наблюдений при осуществлении цифровой фильтрации приводят к большим переходным процессам в отфильтрованных последовательностях, если начальные условия подобраны неточно. Значительные нестационарности в исходных данных обуславливают возникновение динамических погрешностей.

В данной работе предлагаются три варианта алгоритмов вычисления аппроксимационных сплайновых функций, которые ориентированы на задачи фильтрации наблюдений с вышеперечисленными особенностями:

- 1) со свободными условиями на концах интервалов наблюдений,
- 2) с регулированием для них нулевых и первых производных на концах интервалов наблюдений,
- 3) с оптимальным расположением сплайновых узлов.

Все три варианта алгоритмов взаимосвязаны и едины методически. Из первого алгоритма следует второй, первый или второй алгоритм положен в основу третьего. Первые два алгоритма можно рассматривать как вспомогательные, фактически третий алгоритм является основным в данной работе.

Определения для предлагаемых сплайновых конструкций базируются на работах [4–6]. Представленные в данном исследовании результаты могут быть интерпретированы как в некоторой степени альтернативные результатам работы [5], в которой для задачи фильтрации используются приспособленные кубические сплайны и специальный функционал в виде взвешенной суммы двух составляющих: первой — суммы квадратов невязок наблюдений и значений сплайновой функции в узлах и второй — интеграла от квадратов вторых производных для кубических сплайнов. Необходимо отметить, что указанная задача из [5] рассмотрена с более общих позиций в работе [7] на случай второй составляющей функционала, учитывающей регулируемую обобщённую гладкость аппроксимирующей функции. Предлагаемая работа является развитием [8, 9]. Отдельные результаты, касающиеся в основном первых двух алгоритмов, приведены в [10–13]. Следует отметить работы [14–21], посвящённые главным образом практической реализации сплайновой фильтрации. Представленные в данном исследовании сплайны могут служить дополнением к программному комплексу Spline Toolbox [22].

Вычисление предлагаемых здесь АСФ сводится к решению систем линейных уравнений иногда достаточно большой размерности. По сравнению, например, с вычислением среднеквадратичных B -сплайнов [6] в ряде случаев нахождение АСФ может быть сопряжено с некоторыми вычислительными затратами. Однако существенные особенности разработанного подхода состоят в том, что помимо собственно постановки задачи вычисления АСФ, отличной от постановки задачи с B -сплайнами, в качестве сплайнов могут использоваться в достаточной степени произвольные функции, а также реализовываться возможности для регулирования сплайновых производных на концах интервалов и обеспечиваться расположения сплайновых узлов произвольным образом.

Существенное внимание уделено рассмотрению особенностей вычисления АСФ с оптимальным расположением сплайновых узлов.

1. Алгоритм построения аппроксимационных сплайновых функций со свободными условиями на концах интервала наблюдения и фиксированными сплайновыми узлами. В данном разделе представлена общая постановка задачи вычисления аппроксимационных сплайновых функций. Описываются наблюдения, вводятся определения для сплайновых узлов, модельных функций, условий гладкости сплайновых функций и формируется аппроксимационный функционал. Рассмотрим составляющие основной задачи, участвующие в вычислении АСФ со свободными условиями на концах интервала.

Построение АСФ предполагает задание наблюдений $y(t_i)$ в виде конечной последовательности экспериментальных данных с помощью линейной аддитивной модели:

$$y(t_i) = x(t_i) + w(t_i), \quad (1)$$

где t_i — моменты времени, определяющие неравномерную дискретизацию данных, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$, N_f — число данных на ограниченном интервале времени $(t_0, t_{N_f - 1})$.

Будем считать, что исходная последовательность данных $x(t_i)$ из (1) порождается функциями $x(t) \in C^{L_0}(t_0, t_{N_f - 1})$, где $C^{L_0}(t_0, t_{N_f - 1})$ — множество непрерывных на $(t_0, t_{N_f - 1})$ функций с непрерывными производными до L_0 -й включительно. Погрешности $w(t_i)$ моделируются в (1) независимыми случайными нормально распределёнными числами с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией σ^2 .

Основная постановка задачи аппроксимации, реализуемая в рамках данного исследования, состоит в том, что по наблюдениям $y(t_i)$ требуется сформировать такую последовательность $x^\circ(t_i)$, которая была бы близка в заданном смысле к исходной последовательности $x(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$.

Сплайновые узлы на интервале времени наблюдения (t_0, t_{N_f-1}) задаются числами τ_k , $k = 1, \dots, n-1$, которые должны удовлетворять неравенствам

$$t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} \leq t_{N_f-1}, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_n = t_{N_f-1}. \quad (2)$$

Соответствующие сплайновые интервалы $\tau_{k-1} < t \leq \tau_k$, $k = 1, \dots, n$, в общем случае являются произвольными по величине, n — задаваемое число сплайновых интервалов, $n-1$ — число сплайновых узлов. Вводятся векторы сплайновых узлов $\tau^T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ размера $(n-1, 1)$. Совершенно очевидно, что векторы τ ограничены: $\tau \in A_1$, где A_1 — ограничивающее множество. Примем, что векторы τ фиксированны.

Обозначим граничные номера неравномерно расположенных данных $y(t_i)$ на сплайновом интервале с номером k числами $N_{1,k}, N_{2,k}$. На k -м интервале находятся $y(t_i)$ с номерами, которые удовлетворяют соотношениям

$$N_{1,k} \leq i \leq N_{2,k}; \quad N_{1,k+1} = N_{2,k} + 1; \quad N_{1,1} = 0; \quad N_{2,n} = N_f - 1. \quad (3)$$

Решение задачи аппроксимации будем связывать с модельными функциями известного вида:

$$f(\alpha, t) \in C_0^{L_0}(t_0, t_{N-1}) \subset C^{L_0}(t_0, t_{N-1}),$$

определёнными на (t_0, t_{N_f-1}) и зависящими от вектора параметров α . В остальном функции $f(\alpha, t)$ являются в достаточной степени произвольными.

Модельные базисные функции $f_k(\alpha_k, t, \tau_{k-1}, \tau_k)$ на k -м сплайновом интервале $\tau_{k-1} < t \leq \tau_k$ будем задавать в виде взвешенных сумм базисных функций $f_{k,l}(t, \tau_{k-1}, \tau_k)$, $l = 0, 1, \dots, L$ (l — номер базисной функции, L — задаваемое число базисных функций); вне k -го сплайнового интервала $t \leq \tau_{k-1}$, $t > \tau_k$ базисные функции должны быть равны нулю: $f_{k,l}(t, \tau_{k-1}, \tau_k) = 0$. Будем принимать, что $f_{k,l}(t, \tau_{k-1}, \tau_k) \in C_0^{L_0}(\tau_{k-1}, \tau_k)$. Достаточно часто в качестве базисных функций задаются полиномы, в этом случае параметр L является порядком полинома. Модельная базисная функция $f_k(\alpha_k, t, \tau_{k-1}, \tau_k)$ для k -го интервала записывается в виде

$$f_k(\alpha_k, t, \tau_{k-1}, \tau_k) = \sum_{l=0}^L \alpha_{l,k} f_{k,l}(t, \tau_{k-1}, \tau_k),$$

где $\alpha_k^T = (\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{L,k})$ — вектор весовых коэффициентов для k -го сплайнового интервала; $f_k^T(t, \tau_k, \tau_{k-1}) = (f_{k,0}(t, \tau_{k-1}, \tau_k), f_{k,1}(t, \tau_{k-1}, \tau_k), \dots, f_{k,L}(t, \tau_{k-1}, \tau_k))$ — вектор базисных функций. Возможно представление данной функции в виде скалярного произведения:

$$f_k(\alpha_k, t, \tau_{k-1}, \tau_k) = f_k^T(t, \tau_{k-1}, \tau_k) \alpha_k.$$

Модельная функция $f(\alpha, t, \tau)$, определённая для (t_0, t_{N_f-1}) и вектора τ , представится в виде суммы:

$$f(\alpha, t, \tau) = \sum_{k=1}^n f_k(\alpha_k, t, \tau_{k-1}, \tau_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^L \alpha_{l,k} f_{k,l}(t, \tau_{k-1}, \tau_k), \quad (4)$$

где вектор параметров α размера $(n(L+1), 1)$ может быть сформирован как блочный вектор $\alpha^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_n^T)$. В общем случае очевидно, что $f(\alpha, t, \tau)$ (4) представляет

собой последовательность кусочно-непрерывных функций с разрывами в точках τ_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Для удобства записи формул введём обозначение $f_k(t, \tau)$, заменив τ_{k-1}, τ_k вектором τ , что вполне допустимо. Гладкость модельных функций (4) по нулевой и первой производным в узлах τ_k обеспечивается системой из $2(n-1)$ линейных равенств:

$$\begin{aligned} h_0(\alpha, \tau_k, \tau) &= 0, \quad h_1(\alpha, \tau_k, \tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \\ h_0(\alpha, \tau_k, \tau) &= f_k^T(\tau_k, \tau)\alpha_k - f_{k+1}^T(\tau_k, \tau)\alpha_{k+1} = 0; \\ h_1(\alpha, \tau_k, \tau) &= f_k^{(1)T}(\tau_k, \tau)\alpha_k - f_{k+1}^{(1)T}(\tau_k, \tau)\alpha_{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Введём допустимое множество $A_2(\tau)$, зависящее от векторов τ , к которому должны принадлежать векторы α , удовлетворяющие равенствам (5):

$$A_2(\tau) = \{\alpha: (h_{0,k}(\alpha, \tau_k, \tau) = 0, h_{1,k}(\alpha, \tau_k, \tau) = 0, k = 1, 2, \dots, n-1)\}. \quad (6)$$

Модельные функции (4), сформированные с учётом $\alpha \in A_2(\tau)$, составляют множество сплайновых функций.

Требование свободных условий для функций $f(\alpha, t, \tau)$ на концах интервала наблюдения (t_0, t_{N_f-1}) означает, что значения нулевых и первых производных $f(\alpha, t_0, \tau)$, $f^{(1)}(\alpha, t_0, \tau)$, $f(\alpha, t_{N_f-1}, \tau)$, $f^{(1)}(\alpha, t_{N_f-1}, \tau)$ могут быть любыми.

Для наблюдений $y(t_i)$ и сплайновой функции $f(\alpha, t_i, \tau)$, заданной для моментов t_i , $i = 0, 1, \dots, N_f-1$, определяется сплайновый функционал

$$S_2(y, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} (y(t_i) - f_k^T(t_i, \tau)\alpha_k)^2.$$

Для данного функционала произведём операцию возведения в квадрат и выполним двойное суммирование:

$$\begin{aligned} S_2(y, \alpha, \tau) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y^2(t_i) - \\ &- 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y(t_i) f_k^T(t_i, \tau)\alpha_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^T \left(\sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} f_k(t_i, \tau) f_k^T(t_i, \tau) \right) \alpha_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Минимизация функционала (7) с помощью подбора оптимального вектора $\alpha^\circ(\tau)$ обеспечивает аппроксимацию $y(t_i)$ значениями модельной функции $f(\alpha^\circ(\tau), t_i, \tau)$:

$$\alpha^\circ(\tau) = \arg \left\{ \min_{\alpha \in A_2(\tau)} S_2(y, \alpha, \tau) \right\}; \quad x^\circ(t_i, \tau) = f(\alpha^\circ(\tau), t_i, \tau). \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет собой запись решения задачи условной оптимизации. Так как множество $A_2(\tau)$ образовано ограничениями-равенствами, то для её решения

вводятся множители Лагранжа: $\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, k = 1, 2, \dots, n-1$, $\lambda_0^T = (\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,n-1})$, $\lambda_1^T = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n-1})$, $\lambda^T = (\lambda_0^T, \lambda_1^T)$, на основе которых записывается функция Лагранжа

$$L_2(y, \alpha, \lambda, \tau) = S_2(y, \alpha, \tau) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{0,k} h_{0,k}(\alpha, \tau_k, \tau) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{1,k} h_{1,k}(\alpha, \tau_k, \tau).$$

Задача условной оптимизации (8) сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа по переменным α, λ . Для этой цели записываются необходимые условия экстремума в виде равенств нулю производных $L_2(y, \alpha, \lambda, \tau)$:

$$\frac{\partial L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \quad (9)$$

Вследствие того что функционал (7) квадратичный и ограничивающие равенства (5) линейные по α , условия (9) представляют собой систему линейных уравнений.

Для удобства записи необходимых условий (9) используем векторно-матричные обозначения. Для функционала (7) определим матрицы Q_k и векторы P_k размера $(L+1, L+1)$ и $(L+1, 1)$, зависящие от расположения сплайновых узлов:

$$Q_k(\tau) = \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} f(t_i, \tau) f_k^T(t_i, \tau); \quad P_k^T(\tau) = \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y(t_i) f_k^T(t_i, \tau), \quad (10)$$

на основе которых $S_2(y, \alpha, \tau)$ запишем в матрично-векторных обозначениях:

$$S_2(y, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y^2(t_i) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^T Q_k(\tau) \alpha_k - 2 \sum_{k=1}^n P_k^T(\tau) \alpha_k.$$

С использованием $Q_k(\tau)$ и $P_k(\tau)$ составим блочные матрицу $Q(\tau)$ и вектор $P(\tau)$:

$$Q(\tau) = \begin{vmatrix} Q_1(\tau), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & Q_2(\tau), & \dots & 0 \\ 0, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 0, & \dots & Q_n(\tau) \end{vmatrix}; \quad P(\tau) = \begin{vmatrix} P_1(\tau) \\ P_2(\tau) \\ \dots \\ P_n(\tau) \end{vmatrix}, \quad (11)$$

позволяющие сформировать функционал $S_2(y, \alpha, \tau)$ в компактной форме:

$$S_2(y, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y^2(t_i) + \alpha^T Q(\tau) \alpha - 2P^T(\tau) \alpha.$$

Запишем введённые ограничения-равенства (5) в матрично-векторном виде. Составим блочную матрицу $C_0(\tau)$ для условий по нулевым производным:

$$C_0(\tau) = \begin{vmatrix} f_1^T(\tau_1, \tau), & -f_2^T(\tau_1, \tau), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & f_2^T(\tau_2, \tau), & -f_3^T(\tau_2, \tau), & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & f_{n-2}^T(\tau_{n-2}, \tau), & -f_{n-1}^T(\tau_{n-2}, \tau), & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_{n-1}^T(\tau_{n-1}, \tau), & -f_n^T(\tau_{n-1}, \tau) \end{vmatrix} \quad (12)$$

и блочную матрицу $C_1(\tau)$ для условий по первым производным:

$$C_1(\tau) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)T}(\tau_1, \tau), & -f_2^{(1)T}(\tau_1, \tau), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & f_2^{(1)T}(\tau_2, \tau), & -f_3^{(1)T}(\tau_2, \tau), & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & f_{n-2}^{(1)T}(\tau_{n-2}, \tau), & -f_{n-1}^{(1)T}(\tau_{n-2}, \tau), & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_{n-1}^{(1)T}(\tau_{n-1}, \tau), & -f_n^{(1)T}(\tau_{n-1}, \tau) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

С использованием матриц $C_0(\tau)$, $C_1(\tau)$ размера $((n-1), (L+1)n)$ можно представить условия в сплайновых узлах матричными равенствами

$$C_0(\tau)\alpha = 0, \quad C_1(\tau)\alpha = 0.$$

С помощью матрично-векторных обозначений функция Лагранжа $L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)$ запишется в виде

$$L_2(y, \alpha, \tau, \lambda) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y^2(t_i) + \alpha^T Q(\tau)\alpha - 2P^T(\tau)\alpha + \lambda_0^T C_0(\tau)\alpha + \lambda_1^T C_1(\tau)\alpha.$$

Продифференцируем $L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)$ по векторным переменным α , λ_0 , λ_1 , приравняем производные к нулю и получим необходимые условия экстремума в форме системы линейных уравнений размерности $(L+1)n + 2(n-1)$. Указанные системы линейных уравнений позволяют определить параметры аппроксимационной сплайновой функции и дополнительно найти множители Лагранжа:

$$\frac{\partial L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \alpha} = 2Q(\tau)\alpha - 2P(\tau) + C_0^T(\tau)\lambda_0 + C_1^T(\tau)\lambda_1 = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda_0} = C_0(\tau)\alpha = 0; \quad \frac{\partial L_2(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda_1} = C_1(\tau)\alpha = 0.$$

Основываясь на необходимых условиях (2), (14), матрицах $Q(\tau)$, $C_0(\tau)$, $C_1(\tau)$ и векторе $P(\tau)$, составим блочные матрицу $D_2(\tau)$ и векторы $b_2(\tau)$ и z_2 :

$$D_2(\tau) = \begin{pmatrix} 2Q(\tau), & C_0^T(\tau), & C_1^T(\tau) \\ C_0(\tau), & 0, & 0 \\ C_1(\tau), & 0, & 0 \end{pmatrix}; \quad b_2(\tau) = \begin{pmatrix} 2P(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

с помощью которых найдём решение системы

$$D_2(\tau)z_2 = b_2(\tau). \quad (16)$$

Первые $(L + 1)n$ параметров вектора $z_2^T = (\alpha^T, \lambda_0^T, \lambda_1^T)$ размера $(L + 1)n + 2(n - 1)$, полученного из (16) и составленного в виде блочного решения, позволяют вычислить значения оптимальных параметров вектора $\alpha^\circ(\tau)$ и записать выражение для АСФ отфильтрованной последовательности $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$:

$$x^\circ(t_i, \tau) = f(\alpha^\circ(\tau), t_i, \tau) = \sum_{k=1}^n (\alpha_{0,k}^\circ(\tau) f_{0,k}(t_i, \tau + \dots + \alpha_{L,k}^\circ(\tau) f_{L,k}(t_i, \tau)). \quad (17)$$

Оптимальное значение функционала (МНК) $S_2^\circ(\tau)$ можно найти очевидным образом:

$$S_2^\circ(\tau) = S_2(y, \alpha^\circ(\tau), \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} (y(t_i) - f(\alpha^\circ(\tau), t_i, \tau))^2. \quad (18)$$

Алгоритм разд. 1 вычисляет аппроксимационные сплайновые функции со свободными условиями на концах интервала наблюдения. Этот алгоритм базируется на формулах (2)–(5), реализующих назначение сплайновых узлов, вычислениях граничных точек, назначении базисных функций и систем равенств в узлах; на формулах (1), (10)–(13), формирующих исходную фильтруемую последовательность, вычислениях необходимых матриц и векторов для функции Лагранжа и на формулах (15)–(17), формирующих блочные матрицы и векторы для линейной системы, обеспечивающей нахождение её решения и образование отфильтрованной последовательности.

Для рассматриваемого алгоритма в случае полиномиальных базисных функций выбор порядка L связан с учётом двух обстоятельств. Во-первых, увеличение порядка полиномов приводит к решению плохообусловленных линейных систем уравнений (16). Для того чтобы избежать этого, в качестве базисных функций применяются ортогональные полиномы, как описано в [12]. Во-вторых, при увеличении L аппроксимирующая функция достаточно часто становится осциллирующей и при этом минимизируемый функционал не всегда монотонно убывает. На практике обычно производят построения АСФ для значений L , ограниченных сверху.

2. Алгоритм вычисления аппроксимационных сплайновых функций с регулируемыми условиями на концах интервала наблюдения и фиксированными сплайновыми узлами. Рассмотрим возможность регулирования положения и наклона модельных АСФ (4) на концах интервала наблюдения. Будем задавать значения нулевых и первых производных для сплайновых функций в точках $t = t_0, t = t_{N_f - 1}$. Пусть нулевая и первая производные на левом конце интервала наблюдения определяются заданием значений g_1, g_2 , на правом конце — заданием значений g_3, g_4 ; сформируем вектор $g^T = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ размера $(4, 1)$. Указанное регулирование эквивалентно введению следующих четырёх линейных по α равенств $h_{2r}(\alpha, g) = 0, r = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} h_{21}(\alpha, g, \tau) &= \alpha_1^T f_1(t_0, \tau) - g_1 = 0; \\ h_{22}(\alpha, g, \tau) &= \alpha_1^T f_1^{(1)}(t_0, \tau) - g_2 = 0; \\ h_{23}(\alpha, g, \tau) &= \alpha_n^T f_n(t_{N_f - 1}, \tau) - g_3 = 0; \\ h_{24}(\alpha, g, \tau) &= \alpha_n^T f_n^{(1)}(t_{N_f - 1}, \tau) - g_4 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

По-прежнему определение α° сводится к задаче условной оптимизации. Множество $A_3(\tau)$, к которому должны принадлежать векторы α , удовлетворяющие равенствам (3), (19), образовано системой линейных равенств

$$A_3(\tau) = \{ \alpha: (h_{0,k}(\alpha, \tau_k, \tau) = 0, h_{1,k}(\alpha, \tau_k, \tau) = 0, k = 1, 2, \dots, n-1, \\ h_{2r}(\alpha, g, \tau) = 0, r = 1, \dots, 4) \}.$$

Для данной задачи основной функционал совпадает с функционалом (7) из разд. 1. Однако его оптимизация должна производиться с учётом множества $A_3(\tau)$:

$$\alpha^\circ(\tau) = \arg \left\{ \min_{\alpha \in A_3(\tau)} S_2(y, \alpha, \tau) \right\}.$$

Для решения оптимизационной задачи введём множители Лагранжа $\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, k = 1, 2, \dots, n-1$, и $\lambda_{2,s}, s = 1, \dots, 4$, $\lambda_0^T = (\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,n-1})$, $\lambda_1^T = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n-1})$, $\lambda_2^T = (\lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,4})$ и $\lambda^T = (\lambda_0^T, \lambda_1^T, \lambda_2^T)$, на основе которых функция Лагранжа будет иметь вид

$$L_3(y, \alpha, \tau, \lambda) = S_2(y, \alpha, \tau) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{0,k} h_{0,k}(\alpha, \tau_k, \tau) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{1,k} h_{1,k}(\alpha, \tau_k, \tau) + \sum_{r=1}^4 \lambda_{2r} h_{2r}(\alpha, g, \tau).$$

Запишем необходимые условия экстремума в виде равенств нулю производных для $L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)$:

$$\frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \quad (20)$$

Условия (20) представляют собой систему линейных уравнений.

Запишем ограничения-равенства (19), которые управляют значениями нулевой и первой производных сплайновых функций на концах интервала наблюдения, в матрично-векторном виде. Введём матрицу C_2 размера $(4, (L+1)n)$:

$$C_2(\tau) = \begin{pmatrix} f_1^T(t_0, \tau), & 0, & \dots & 0 \\ f_1^{(1)T}(t_0, \tau), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_n^T(t_{N_f-1}, \tau) \\ 0, & \dots & 0, & f_n^{(1)T}(t_{N_f-1}, \tau) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

На основе матрицы (21) и вектора g указанные ограничения-равенства представляются следующим соотношением:

$$C_2(\tau)\alpha - g = 0.$$

С использованием матрично-векторных обозначений функция Лагранжа запишется очевидным компактным выражением

$$L_3(y, \alpha, \tau, \lambda) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_{1,k}}^{N_{2,k}} y^2(t_i) + \alpha^T Q(\tau) \alpha - 2P^T(\tau) \alpha + \\ + \lambda_0^T C_0(\tau) \alpha + \lambda_1^T C_1(\tau) \alpha + \lambda_2^T (C_2(\tau) \alpha - g).$$

Продифференцируем функцию Лагранжа по векторам α , λ_0 , λ_1 , λ_2 , приравняем производные к нулю и получим необходимые условия экстремума в форме системы линейных уравнений размерности $(L+1)n + 2(n-1) + 4$. Указанная система позволяет определить параметры АСФ и дополнительно вычислить множители Лагранжа:

$$\frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \alpha} = 2Q(\tau) \alpha - 2P(\tau) + C_0^T(\tau) \lambda_0 + C_1^T(\tau) \lambda_1 + C_2^T(\tau) \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda_0} = C_0(\tau) \alpha = 0; \quad \frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda_1} = C_1(\tau) \alpha = 0; \quad (22) \\ \frac{\partial L_3(y, \alpha, \tau, \lambda)}{\partial \lambda_2} = C_2(\tau) \alpha - g = 0.$$

Основываясь на необходимых условиях в виде (22), сформированных матрицах $Q(\tau)$, $C_0(\tau)$, $C_1(\tau)$, C_2 и векторе $P(\tau)$, составим блочные матрицу $D_3(\tau)$ и векторы $b_3(\tau)$ и z_3 :

$$D_3(\tau) = \begin{vmatrix} 2Q(\tau), & C_0^T(\tau), & C_1^T(\tau), & C_2^T(\tau) \\ C_0(\tau), & 0, & 0, & 0 \\ C_1(\tau), & 0, & 0, & 0 \\ C_2(\tau), & 0, & 0, & -E \end{vmatrix}; \quad b_3(\tau) = \begin{vmatrix} 2P(\tau) \\ 0 \\ 0 \\ g \end{vmatrix}; \quad z_3 = \begin{vmatrix} \alpha \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

с помощью которых найдём решение расширенной системы

$$D_3(\tau) z_3 = b_3(\tau). \quad (24)$$

Первые $(L+1)n$ параметров блочного вектора $z_3^T = (\alpha^T, \lambda_0^T, \lambda_1^T, \lambda_2^T)$ размера $((L+1)n + 2(n-1) + 4, 1)$ позволяют получить значения оптимальных параметров вектора $\alpha^\circ(\tau)$ и записать выражение для АСФ и отфильтрованной последовательности, аналогичное (17).

Алгоритм разд. 2 построения параболических АСФ с регулируемыми условиями на концах интервала реализуется по формулам (2)–(5), (1), (10)–(13), которые используются в алгоритме разд. 1. Отличия алгоритма разд. 2 заключаются в задании условий в виде равенств на концах интервала наблюдения и соответствующей матрицы в виде формул (19), (21) и в формулах (23), (24), формирующих блочные матрицы и векторы для расширенной линейной системы.

3. Алгоритм вычисления аппроксимационных сплайновых функций со свободными условиями на концах интервала наблюдения и оптимальным расположением сплайновых узлов. Выбор числа сплайновых узлов и их оптимального расположения представляет собой определённый резерв повышения точности при осуществлении сплайновой аппроксимации. Алгоритмы вычисления АСФ разд. 1, 2 с фиксированными сплайновыми узлами являются исходными для задачи данного раздела. Для определённости воспользуемся алгоритмом разд. 1 вычисления АСФ со свободными концами интервала наблюдения при фиксированных узлах. Рассмотрим на его основе алгоритм вычисления АСФ с оптимальным расположением сплайновых узлов.

Общий подход к решению предлагаемой оптимизационной задачи определения расположения узлов состоит в реализации двух последовательных оптимизационных этапов.

На первом оптимизационном этапе решается задача (8) минимизации функционала $S_2(y, \alpha, \tau)$ по α с учётом $A_2(\tau)$. Фиксируется вектор узлов τ и находятся частично оптимальные параметры сплайновой функции

$$\alpha^\circ(\tau) = \arg \left\{ \min_{\alpha \in A_2(\tau)} S_2(y, \alpha, \tau) \right\}.$$

На основе $\alpha^\circ(\tau)$ вычисляется частично оптимальный функционал $S_2(y, \alpha^\circ(\tau), \tau)$. Для любого вектора τ численное значение этого функционала может быть всегда определено.

На втором оптимизационном этапе решается задача минимизации частично оптимального функционала $S_2(y, \alpha^\circ(\tau), \tau)$ по вектору τ с учётом ограничения A_1 , образованного неравенствами (2):

$$\tau^\circ = \arg \left\{ \min_{\tau \in A_1} S_2(y, \alpha^\circ(\tau), \tau) \right\}. \quad (25)$$

В результате определяется искомый оптимальный вектор узлов τ° , оптимальный вектор параметров $\alpha^\circ(\tau^\circ)$ и соответствующая АСФ $x^\circ(t_i, \tau^\circ) = f(\alpha^\circ(\tau^\circ), t_i, \tau^\circ)$ с оптимальным расположением узлов.

Рассмотрим возможность уменьшения размеров множества A_1 . Вектор узлов $\tau^T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ для удобства переобозначим: сделаем замену $n-1 = m$ и введём нижние индексы для обозначения векторов $\tau_m^T = (\tau_{m,1}, \tau_{m,2}, \dots, \tau_{m,m})$. Из физических соображений вполне можно принять, что множество A_1 для векторов сплайновых узлов может быть представлено в виде суммы составляющих множеств, представляющих собой m -мерные параллелепипеды

$$A_1 = \sum_{m=1}^{m_0} A_{1,m},$$

где $m = 1, \dots, m_0$, m_0 — максимальная размерность составляющих параллелепипедов, $A_{1,m}$ — множество точек m -мерного параллелепипеда для векторов τ_m размера m . Множество A_1 состоит из векторов различных размеров: $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m_0}$ и $\tau_1 \in A_{1,1}$, $\tau_2 \in A_{1,2}, \dots, \tau_{m_0} \in A_{1,m_0}$.

Уменьшим размеры исходного допустимого множества $A_{1,m}$, как это предложено в [9], чтобы повысить эффективность поисковых процедур минимизации. Для векторов τ_m будем рассматривать координаты узлов, которые удовлетворяют неравенствам $t_0 \leq \tau_{m,1} < \tau_{m,2} < \dots < \tau_{m,m} \leq t_{N_f} - 1$ и принадлежат к новому допустимому множеству

$$\bar{A}_{1,m} = \{(\tau_{m,1}, \dots, \tau_{m,m}): t_0 \leq \tau_{m,1} < \tau_{m,2} < \dots < \tau_{m,m} \leq t_f\}, \quad \bar{A}_{1,m} \subset A_{1,m}. \quad (26)$$

Совершенно очевидно, что размер нового ограничивающего множества $\bar{A}_{1,m}$ существенно меньше, чем размер множества $A_{1,m}$ [9]. Справедливо соотношение

$$\bar{A}_1 = \sum_{m=1}^{m_0} \bar{A}_{1,m}, \quad \bar{A}_1 \subset A_1.$$

Задача оптимизации второго этапа (25) сводится к решению m_0 оптимизационных задач отыскания оптимального τ_m° среди векторов τ_m из $\bar{A}_{1,m}$:

$$\tau_m^\circ = \arg \left\{ \min_{\tau_m \in \bar{A}_{1,m}} S_2(y, \alpha^\circ(\tau_m), \tau_m) \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, m_0. \quad (27)$$

Рассмотрим конкретную реализацию поискового метода прямого перебора для минимизации по τ_m частично оптимального функционала $S_2(y, \alpha^\circ(\tau_m), \tau_m)$ (27), полученного на первом оптимизационном этапе.

Для алгоритма поиска минимума для $S_2(y, \alpha^\circ(\tau_m), \tau_m)$ по m -мерным векторам $\tau_m \in \bar{A}_{1,m}$ (27) положим, что каждая из координат τ_k , $k = 1, \dots, m$, вектора узлов принимает дискретные значения. Зададимся равномерной сеткой дискретных значений координат узлов τ_l в диапазоне (t_0, t_{N_f-1}) из l_f значений, расположенных равномерно с шагом

$$\Delta\tau = (t_{N_f-1} - t_0)/(l_f - 1), \quad \tau_l = t_0 + \Delta\tau(l - 1), \quad l = 1, \dots, l_f. \quad (28)$$

Величина шага $\Delta\tau$, как и целочисленного значения l_f , определяет временные затраты и точность решения исходной поисковой задачи. Видно, что при увеличении l_f шаг $\Delta\tau$ уменьшается. Существует, однако, естественный предел уменьшения шага $\Delta\tau$.

Выберем m значений узлов $\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \dots, \tau_{l_m}$ из сетки сформированных дискретных координат узлов. Заметим, что все выбранные узлы должны быть различными и удовлетворять неравенствам (26). Чтобы обеспечить различие узлов, сформируем векторы индексов $l^T = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли системе из следующих m неравенств:

$$1 \leq l_1 \leq l_f - m + 1; \quad (29)$$

$$l_1 + 1 \leq l_2 \leq l_f - m + 2, \dots, l_{m-2} + 1 \leq l_{m-1} \leq l_f - 1; \quad l_{m-1} + 1 \leq l_m \leq l_f.$$

Для $m = 2$ система неравенств (29) примет вид

$$1 \leq l_1 \leq l_f - 1, \quad l_1 + 1 \leq l_2 \leq l_f;$$

для $m = 3$ она запишется как

$$1 \leq l_1 \leq l_f - 2, \quad l_1 + 1 \leq l_2 \leq l_f - 1, \quad l_2 + 1 \leq l_3 \leq l_f.$$

Пронумеруем последовательность векторов индексов $l_{1s}, l_{2s}, \dots, l_{ms}$, $s = 1, \dots, s_f$, воспользовавшись методом формирования индексов на основе вложенных циклов, известным из программирования. Такая последовательность векторов индексов будет определять алгоритм поиска, сводящийся к вычислениям векторов узлов $\tau_m^s = (\tau_{l_{1s}}, \tau_{l_{2s}}, \dots, \tau_{l_{ms}})$ и функционала $S_{2,ms}^\circ = S_2(y, \alpha^\circ(\tau_m^s), \tau_m^s)$, на базе которых возможно решение задачи нахождения оптимального расположения узлов для задачи (27):

$$s^\circ = \arg \left\{ \min_{1 \leq s \leq s_f} S_{1,ms}^\circ \right\}, \quad \tau_m^\circ = \tau_m^{s^\circ}, \quad \alpha_m^\circ = \alpha^\circ(\tau_m^\circ). \quad (30)$$

На основе решений задач (30) вычисляются m_0 значений остаточных сумм $S_{2,m}^\circ$ по формуле (18):

$$S_{2,m}^\circ = S_2(y, \alpha_m^\circ, \tau_m^\circ), \quad m = 1, 2, \dots, m_0. \quad (31)$$

Благодаря последовательности $S_{2,m}^\circ$ находятся: оптимальный номер параллелепипеда m° , оптимальное число сплайновых узлов $n^\circ - 1 = m^\circ$, оптимальный вектор координат узлов τ° и АСФ вида (17):

$$m^\circ = \arg \left\{ \min_{1 \leq m \leq m_0} S_{2,m}^\circ \right\}, \quad \tau^\circ = \tau_{m^\circ}^\circ, \quad x^\circ(t_i, \tau^\circ) = f(\alpha^\circ(\tau_{m^\circ}^\circ), t_i, \tau^\circ). \quad (32)$$

Алгоритм разд. 3 построения АСФ со свободными условиями на концах интервала наблюдения и оптимально расположенными сплайновыми узлами реализуется по формулам (2)–(5), (1), (10)–(13), (15)–(17), которые совпадают с формулами алгоритма разд. 1. Далее применяются формулы: назначения величины шага перебора узлов $\Delta\tau$ и сетки узлов (28), формирования индексов $l^T = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ по методу вложенных циклов (29), формирования векторов узлов τ_m (30); последующие шаги решения производятся по формулам (31), (32).

4. Математическое моделирование алгоритмов вычисления аппроксимационных сплайновых функций. Рассматривалось математическое моделирование предложенных вариантов алгоритмов вычисления АСФ. Для всех алгоритмов использовались базисные параболические функции: $f_k^T(t) = (f_{k,0}(t), f_{k,1}(t), f_{k,2}(t))$, $f_{k,0}(t) = 1$, $f_{k,1}(t) = t$, $f_{k,2}(t) = t^2$.

Наблюдения $y(t_i)$ для всех алгоритмов формировались на основе модельного неравномерно дискретизованного зашумлённого синусоидального сигнала:

$$y(t_i) = x(t_i) + w(t_i); \quad x(t_i) = E_0 \cos(2\pi f_0 t_i + \varphi_0), \quad i = 0, 1, \dots, N_f - 1. \quad (33)$$

Последовательность неравномерных моментов времени дискретизации t_i для (33) образовывалась с помощью рекуррентного соотношения

$$t_{i+1} = t_i + dt_i, \quad i = 0, 1, \dots, N_f - 1,$$

где t_0 — начальный момент времени, dt_i — равномерно распределённые случайные числа в диапазоне $(d\bar{t}_0, d\bar{t}_f)$, которые имитировали случайный шаг дискретизации. Помехи $w(t_i)$ в (33) выбирались в соответствии с моделью (1).

Для наблюдений $y(t_i)$ по формулам (33) приняты следующие численные значения параметров: $N_f = 128$, $E_0 = 0,92$, $f_0 = 0,4$ Гц, $\varphi_0 = 1,2$. Для последовательности моментов времени дискретизации t_i принимались $d\bar{t}_0 = 0,005$, $d\bar{t}_f = 0,035$, $t_0 = 0$; длительность реализации последовательности (времени наблюдения) при этом составила величину $t_{N_f-1} - t_0 = 2,3781$ с. На данном времени наблюдения укладывался примерно один период колебаний исходного сигнала $x(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$.

На рис. 1 изображены результаты вычислений по алгоритму разд. 1 АСФ со свободными условиями на концах интервала, наблюдения производились без шумов с $\sigma = 0$. Кривая 1 соответствует наблюдениям $y(t_i)$ модели (33). Принималось фиксированное расположение двух сплайновых узлов $\tau^T = [0,5, 1,5]$. Сплайновая функция $x^\circ(t_i, \tau)$ (кривая 2) реализует аппроксимацию $y(t_i)$.

На рис. 2 представлены результаты вычислений по алгоритму разд. 2 АСФ с регулируемыми условиями на концах интервала. Наблюдения $y(t_i)$ (кривая 1) соответствовали

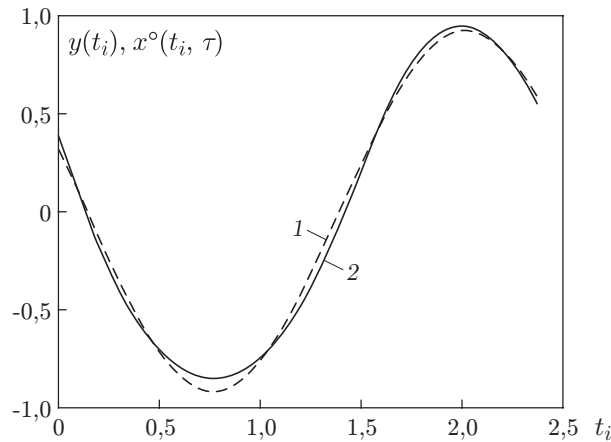


Рис. 1. Аппроксимационная сплайновая параболическая функция со свободными условиями на концах интервала наблюдения и с фиксированными узлами

модели сигнала (33) с $\sigma = 0$. Фиксировались два сплайновых узла $\tau^T = [0,5, 1,5]$. Кривые 2, 3 представляют собой построенные параболические АСФ $x^\circ(t_i, \tau)$: 2 определяет сплайновую кривую с условиями на концах интервала, которые соответствовали вектору $g = (0,15, -1,5, 0,68, -0,91)$, 3 — вектору $g = (0,33, -2,85, 0,57, -2,0)$. Отметим, что значения условий на концах интервала совпадают для кривой 3 на рис. 2 и для кривой 2 на рис. 1.

На рис. 3 показаны результаты вычислений по алгоритму разд. 3 аппроксимационной сплайновой функции с оптимальными узлами: кривая 1 — функция наблюдения, 2 — аппроксимационная сплайновая функция. Поисковые процедуры производились для $l_f = 30$. Кривая 2 соответствует случаю АСФ $x^\circ(t_i, \tau^\circ)$ с тремя оптимальными узлами: $\tau_3^{\circ T} = [0,3857, 1,1538, 1,6147]$. Были проведены расчёты функционала МНК $S_{2,m}^\circ$ по формуле (18) для $m = 1, 2, 3, 4$ — случаев одного–четырёх оптимальных узлов: $S_{2,1}^\circ = 0,1144$, $S_{2,2}^\circ = 0,0564$, $S_{2,3}^\circ = 0,0046$, $S_{2,4}^\circ = 0,0013$. Анализ показывает, что четыре оптимальных сплайновых узла в данной задаче обеспечивают почти нулевую погрешность сплайновой аппроксимации.

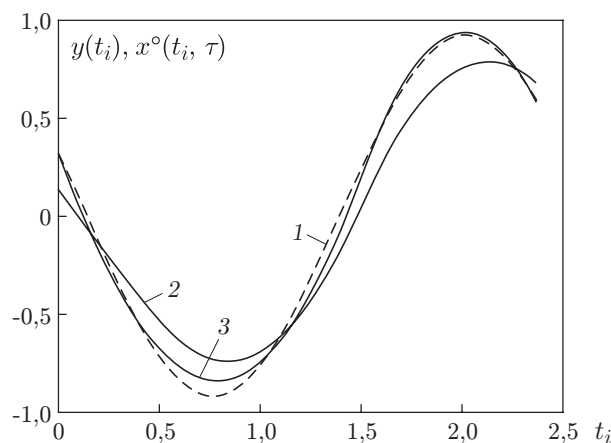


Рис. 2. Аппроксимационные сплайновые параболические функции с регулируемые условиями на концах интервала наблюдения и с фиксированными узлами

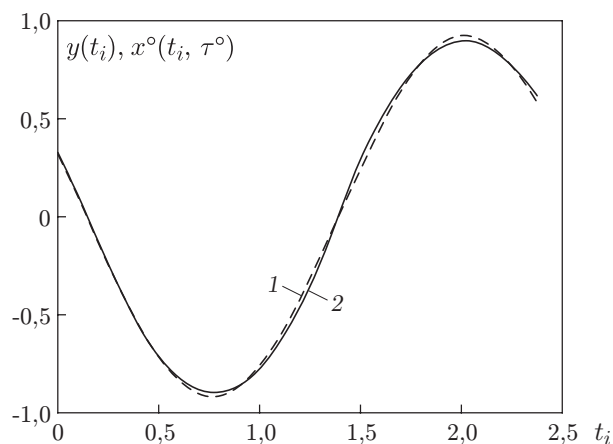


Рис. 3. Аппроксимационная сплайновая параболическая функция с тремя оптимальными узлами (наблюдения без шумов)

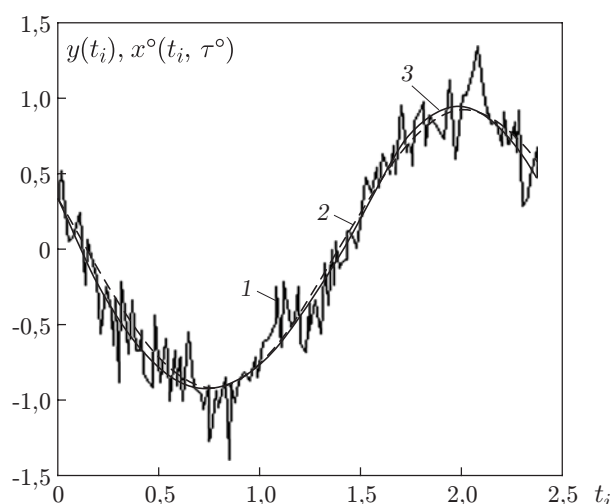


Рис. 4. Аппроксимационная сплайновая параболическая функция с двумя оптимальными узлами (наблюдения в шумах)

На рис. 4 изображён результат работы алгоритма разд. 3 построения параболической АСФ с выбором оптимальных узлов для наблюдений, в которых присутствовали шумы с $\sigma = 0,2$. Поисковая процедура производилась для $l_f = 30$. Показан случай с двумя оптимальными сплайновыми узлами $\tau_2^{\circ T} = [1,0002, 1,5379]$. Кривая 1 представляет собой реализацию зашумлённых наблюдений $y(t_i)$, кривая 2 соответствует исходной синусоиде $x(t_i)$, а кривая 3 — результат сплайновой аппроксимации $x^\circ(t_i, \tau^\circ)$.

Заключение. В данной работе предложена система из трёх методически взаимосвязанных алгоритмов вычисления аппроксимационных сплайновых функций.

Разработанные алгоритмы вычисления аппроксимационных сплайновых функций со свободными условиями и с регулированием условий по нулевым и первым производным на концах интервалов наблюдений показали себя работоспособными.

Алгоритм вычисления аппроксимационных сплайновых функций с определением оптимального расположения сплайновых узлов оказался эффективным. Оптимизация расположения сплайновых узлов представляет собой резерв снижения погрешностей сплайновой аппроксимации.

Применение предлагаемых аппроксимационных сплайновых функций, как показало математическое моделирование, позволило осуществить цифровую фильтрацию наблюдений с неравномерной дискретизацией на ограниченных временных интервалах наблюдений и для нестационарных данных.

Данные аппроксимационные сплайновые функции с оптимальным расположением узлов ориентированы на многие приложения [8, 11, 12]. Возможно дальнейшее усовершенствование алгоритмов сплайновой аппроксимации, например в части повышения быстродействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Солонина А. И., Арбузов С. М.** Цифровая обработка сигналов. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2008. 811 с.
2. **Filter Design Toolbox.** URL: <http://matlab.exponenta.ru/filterdesign/index.php> (дата обращения: 24.03.2012).
3. **Signal Processing Toolbox.** URL: <http://matlab.exponenta.ru/signalprocess/index.php> (дата обращения: 24.03.2012).
4. **Алберт Дж., Нильсен Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее применения. М.: Мир, 1972. 316 с.
5. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
6. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985. 305 с.
7. **Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Каган А. И.** Гравитационное сглаживание временных рядов // Тр. Ин-та мех. и мат. УрО РАН. 2011. **17**, № 2. С. 62–70.
8. **Буров В. В., Гетманов В. Г., Орлов С. Е., Петроневич В. В.** Метод цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных с использованием аппроксимационных сплайновых функций // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 37–49.
9. **Гетманов В. Г.** Об алгоритме поиска по частоте в задаче оценивания параметров моделей полигармонических сигналов // Автометрия. 2009. **45**, № 3. С. 83–89.
10. **Гетманов В. Г.** Восстановление нестационарных зависимостей с использованием аппроксимационных сплайнов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1991. № 6. С. 46–53.
11. **Гетманов В. Г.** Цифровая обработка неравномерно дискретизованных сигналов на основе аппроксимационных сплайнов // Измер. техника. 2003. № 6. С. 24–28.
12. **Гетманов В. Г.** Цифровая обработка нестационарных колебательных сигналов на основе локальных и сплайновых моделей. М.: Изд-во НИЯУ МИФИ, 2010. 292 с.
13. **Гетманов В. Г., Орлов С. Е.** Применение аппроксимационных сплайнов для цифровой фильтрации звуковых сигналов // Радиотехника. 2010. № 3. С. 32–38.
14. **Unser M.** Splines: a perfect fit for signal and image processing // IEEE Signal Process. Magazine. 1999. **16**, N 6. P. 22–38.
15. **Unser M., Aldroubi A., Eden M.** Polynomial spline signal approximation: filter design and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. **38**, N 1. P. 95–103.
16. **Unser M., Aldroubi A., Eden M.** B-spline signal processing // IEEE Trans. Signal Process. Pt. 1. Theory. 1993. **41**, N 2. P. 821–833.
17. **Идрисов Ф. Ф., Терпугов А. Ф.** Фильтрация случайных процессов сплайнами первого порядка // Изв. вузов. Сер. Физика. 2004. **47**, № 2. С. 22–25.

-
18. **Хуторцев В. В., Федоренко О. С.** Использование метода сплайн-функций при синтезе цифровых алгоритмов фильтрации с группированием наблюдений // Радиотехника. 2010. № 2. С. 4–15.
 19. **Королев М. Д.** Применение сплайн-функций для обработки результатов измерений // Приборы и системы управления. 1998. № 6. С. 58–59.
 20. **Спиридонов А. В., Тиме И. В.** Применение сглаживающих сплайнов для фильтрации сильно зашумленных сигналов // АиТ. 1998. № 7. С. 38–44.
 21. **Бутырский Е. Ю.** Основы теории сплайн-фильтрации сигналов // Информация и космос. 2010. № 1. С. 34–39.
 22. **Обзор** возможностей и средств Spline Toolbox 3.2. URL: <http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/1.php> (дата обращения: 24.03.2012).

Поступила в редакцию 24 марта 2012 г.
