

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРЫВА КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ФРИКЦИОННЫМ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЕМ

П. П. Краснюк

Львовский государственный финансово-экономический институт, 79000 Львов

E-mail: askp138@zhovkva.lviv.ua

Выполнена постановка и построено решение задачи термоупругого взаимодействия двух цилиндров, сопровождающегося отрывом их контактирующих поверхностей вследствие локализованной нагрузки боковых поверхностей. Показано существование эффекта многосвязности области контакта при определенном соотношении коэффициентов линейного теплового расширения тел.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, цилиндр, фрикционное тепловыделение, нестационарная температура, отрыв контактирующих поверхностей.

В работе [1] в осесимметричной постановке рассмотрена контактная задача о взаимодействии двух круглых пустотелых цилиндров, вставленных без зазора один в другой и обжатых нагрузкой, изменяющейся вдоль оси трибосистемы. Исследования решения этой задачи, проведенные в предположении полного контакта цилиндров, позволяют утверждать, что локализованная на некотором интервале нагрузка может вызвать изменение знака контактных напряжений, т. е. стать причиной образования зон отрыва, которые с увеличением интенсивности тепловыделения имеют тенденцию к росту при меньшем тепловом расширении внутреннего цилиндра. При уменьшении же теплового расширения внешнего цилиндра односвязность области приложения нагрузки не обеспечивает односвязности области нагруженного контакта.

Математическая постановка задачи и построение решения. Условие существования зон отрыва требует уточнения сделанной в работе [1] постановки задачи, а именно: поскольку на поверхности контакта можно выделить зоны нагруженного контакта, зоны отрыва и ненагруженного контакта, в каждой из этих областей должны задаваться свои теплофизические условия. В частности, при $r = a_0$ должны выполняться следующие условия:

в зоне нагруженного контакта — условия тепловыделения и неидеального теплового контакта

$$\lambda_1 \partial_r T_1 - \lambda_2 \partial_r T_2 = f\omega(\tau)a_0 p(z, \tau); \quad (1)$$

$$\lambda_1 \partial_r T_1 + \lambda_2 \partial_r T_2 + h_a(T_1 - T_2) = 0; \quad (2)$$

в зоне ненагруженного контакта — условия неидеального теплового контакта с другим коэффициентом термической проводимости

$$\lambda_1 \partial_r T_1 = \lambda_2 \partial_r T_2 = -h_c(T_1 - T_2); \quad (3)$$

в зоне отрыва — в зависимости от выбранной модели или условия теплоизоляции поверхностей

$$\partial_r T_1 = \partial_r T_2 = 0, \quad (4)$$

или условия неидеального теплового контакта через промежуточный слой

$$\lambda_1 \partial_r T_1 = \lambda_2 \partial_r T_2 = -h_b(T_1 - T_2). \quad (5)$$

Механические условия на поверхности $r = a_0$ в зоне нагруженного контакта сводятся к постулированию равенства радиальных напряжений и перемещений и условия отсутствия касательных напряжений

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = -p(z, \tau), \quad u_1 = u_2, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0. \quad (6)$$

В зонах отрыва и ненагруженного контакта ставятся условия отсутствия радиальных и касательных напряжений

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = 0, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0. \quad (7)$$

При этом границы между зонами изначально неизвестны, а определяются в процессе построения решения задачи.

В математическом плане задача сводится к интегрированию системы, включающей дифференциальные уравнения:

теплопроводности

$$\partial_r^2 T_j + r^{-1} \partial_r T_j + \partial_z^2 T_j = k_j^{-1} \partial_\tau T_j,$$

равновесия

$$\partial_r \sigma_r^{(j)} + r^{-1} (\sigma_r^{(j)} - \sigma_\theta^{(j)}) + \partial_z \tau_{rz}^{(j)} = 0, \quad \partial_r \tau_{rz}^{(j)} + r^{-1} \tau_{rz}^{(j)} + \partial_z \sigma_z^{(j)} = 0,$$

совместности деформаций

$$\partial_r \varepsilon_\theta^{(j)} + r^{-1} (\varepsilon_\theta^{(j)} - \varepsilon_r^{(j)}) = 0, \quad r \partial_z^2 \varepsilon_\theta^{(j)} + \partial_r \varepsilon_z^{(j)} = \partial_z \gamma_{rz}^{(j)}$$

и соотношения закона Гука

$$E_j \varepsilon_r^{(j)} = \sigma_r^{(j)} - \nu_j (\sigma_\theta^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, \quad E_j \varepsilon_\theta^{(j)} = \sigma_\theta^{(j)} - \nu_j (\sigma_r^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, \\ E_j \varepsilon_z^{(j)} = \sigma_z^{(j)} - \nu_j (\sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, \quad E_j \gamma_{rz}^{(j)} = 2(1 + \nu_j) \tau_{rz}^{(j)} \quad (j = 1, 2),$$

при начальных условиях

$$T_j(r, z, 0) = 0,$$

граничных

$$r = a_1: \quad \partial_r T_1 = \gamma_1 T_1, \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \\ r = a_2: \quad \partial_r T_2 = -\gamma_2 T_2, \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0$$

и контактных условиях (1)–(7).

Здесь и далее: r, z — радиальная и осевая координаты; τ — время; $p(z, \tau)$ — контактное давление; $q_j(z, \tau)$ — внешняя нагрузка на неконтактирующих поверхностях трибосистемы; $\omega(\tau)$ — относительная угловая скорость вращения; T_j — температура; $\sigma_r^{(j)}, \sigma_\theta^{(j)}, \sigma_z^{(j)}$ — радиальное, тангенциальное и осевое нормальные напряжения; $\tau_{rz}^{(j)}$ — касательное напряжение; $\varepsilon_r^{(j)}, \varepsilon_\theta^{(j)}, \varepsilon_z^{(j)}$ — радиальная, тангенциальная и осевая линейные деформации; $\gamma_{rz}^{(j)}$ — деформация сдвига; $u_r^{(j)}$ — радиальное перемещение; E_j — модуль Юнга; $\nu_j, \lambda_j, k_j, \alpha_j$ — коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности и линейного теплового расширения соответственно; $\gamma_j = \bar{\alpha}_j / \lambda_j$; $\bar{\alpha}_j$ — коэффициент теплообмена; f — коэффициент трения; h_a, h_b, h_c — термические проводности зон на поверхности контакта;

$r = a_1$ и $r = a_2$ — внешние поверхности соответственно внутреннего и внешнего цилиндров; $r = a_0$ — контактная поверхность при ненагруженном состоянии системы; $j = 1$ соответствует внутреннему цилиндру, $j = 2$ — внешнему.

Поставленную задачу приведем к системе интегральных уравнений относительно контактного давления $p(z, \tau)$ и двух функций $f_j(z, \tau)$ ($j = 1, 2$), пропорциональных тепловым потокам на поверхности контакта:

$$f_j(z, \tau) = (-1)^{j-1} \partial_r T_j(a_0, z, \tau).$$

Используя соотношения (2.2), (2.4), (2.7), (2.11) из работы [1], для температуры цилиндров запишем следующее выражение:

$$T_j(r, z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f_j(t, \eta) \Phi_j(r, t - z, \tau - \eta) dt d\eta,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_j(r, z, \tau) = & \int_0^\infty \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \cos(\xi z) d\xi \mp \frac{\pi}{2} a_0 \sum_{m=1}^\infty \frac{W_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{\mu_{j,m} N_{j,m}^2} \times \\ & \times \sum_{k=1}^2 \exp((-1)^k \mu_{j,m} z) \operatorname{erfc} \left(\mu_{j,m} \sqrt{k_j \tau} + (-1)^k \frac{z}{2\sqrt{k_j \tau}} \right); \\ \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) = & \pm \frac{1}{\xi} \frac{I_0(\xi r)(\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)) + K_0(\xi r)(\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j))}{I_1(\xi a_0)(\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)) - K_1(\xi a_0)(\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j))}; \\ W_0(x, y) = & J_0(x)Y_1(y) - Y_0(x)J_1(y); \quad W_1(x, y) = J_1(x)Y_1(y) - Y_1(x)J_1(y); \\ N_{j,m}^2 = & a_0^2 W_0^2(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0) - a_j^2 (1 + \gamma_j^2 \mu_{j,m}^{-2}) W_0^2(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0). \end{aligned}$$

Здесь $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν ; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка ν ; $\operatorname{erfc}(z)$ — функция ошибок [2]. Собственные значения $\mu_{j,m}$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\mu_j W_1(\mu_j a_j, \mu_j a_0) \pm \gamma_j W_0(\mu_j a_j, \mu_j a_0) = 0.$$

Верхний знак в сочетаниях “ \pm ” и “ \mp ” соответствует внутреннему цилиндру ($j = 1$), нижний — внешнему ($j = 2$).

Обратив трансформанту Фурье интегрального представления радиальных перемещений на поверхности контакта цилиндров (см. соотношение (2.15) в [1]), полученную при заданных на границах тел напряжениях, при $r = a_0$ запишем выражение

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(a_0, z, \tau) = & \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \left(\frac{a_0}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(t, \tau) \Delta_1(a_j, t - z) dt - \right. \\ & \left. - \frac{a_j}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty q_j(t, \tau) \exp(i\xi(t - z)) \bar{\Delta}_2(a_j, \xi) dt d\xi \right) + \\ & + \frac{\alpha_j}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f_j(t, \eta) H_j(t - z, \tau - \eta) dt d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1(a_j, z) &= \int_0^\infty \bar{\Delta}_1(a_j, \xi) \cos(\xi z) d\xi; & H_j(z, \tau) &= \int_0^\infty (\bar{H}_{j,st}(\xi) + \bar{H}_{j,0}(\xi, \tau)) \cos(\xi z) d\xi; \\ \bar{H}_{j,st}(\xi) &= (1 - \nu_j^2) \xi^{-2} [\bar{\Delta}_2(a_j, \xi) \partial_r \bar{\Phi}_{j,st}(a_j, \xi) \mp (\bar{\Delta}_1(a_j, \xi) - (1 - \nu_j)^{-1})]; \\ \bar{H}_{j,0}(\xi, \tau) &= \pm 2(1 + \nu_j) a_0 \sum_{m=1}^\infty \frac{W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{N_{j,m}^2 (\xi^2 + \mu_{j,m}^2)^2} [\xi^2 (\bar{\Delta}_1(a_j, \xi) a_0 W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0) - \\ &- \bar{\Delta}_2(a_j, \xi) a_j W_0(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0)) + \bar{\Delta}_3(a_j, \xi) \mu_{j,m} W_1(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0)] \exp(-k_j (\xi^2 + \mu_{j,m}^2) \tau); \\ \bar{\Delta}_j(a_j, \xi) &= \tilde{\Delta}_j(a_j, \xi) \tilde{\Delta}_0^{-1}(a_j, \xi); \\ \tilde{\Delta}_0(a_j, \xi) &= 4(1 - \nu_j) + a_j^2 \xi^2 + a_0^2 \xi^2 + (2(1 - \nu_j) + a_j^2 \xi^2)(2(1 - \nu_j) + a_0^2 \xi^2) \times \\ &\times [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 - a_j^2 \xi^2 (2(1 - \nu_j) + a_0^2 \xi^2) \times \\ &\times [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2 - a_0^2 \xi^2 (2(1 - \nu_j) + a_j^2 \xi^2) \times \\ &\times [I_1(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 + a_j^2 a_0^2 \xi^4 [I_0(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2; \\ \tilde{\Delta}_1(a_j, \xi) &= 2[1 + (2(1 - \nu_j) + a_j^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 - \\ &- a_j^2 \xi^2 [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2]; \\ \tilde{\Delta}_2(a_j, \xi) &= 2a_0 \xi [I_1(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)] - \\ &- 2a_j \xi [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]; \\ \tilde{\Delta}_3(a_j, \xi) &= 2[(2(1 - \nu_j) + a_j^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)] - \\ &- a_j a_0 \xi^2 [I_0(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]]; \end{aligned}$$

Чтобы найти неизвестное контактное давление $p(z, \tau)$ и функции $f_j(z, \tau)$, используем теплофизические контактные условия (1)–(5) и условие равенства перемещений в (6), при выполнении которых приходим к следующим системам уравнений:

в зоне нагруженного контакта —

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(z, \tau) + \lambda_2 f_2(z, \tau) &= f \omega(\tau) a_0 p(z, \tau), \\ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left[\lambda_k f_k(z, \tau) + \frac{h_a}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f_k(t, \eta) \Phi_k(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta \right] &= 0, \\ \frac{a_0 E_0}{\pi} \int_{-\infty}^\infty p(t, \tau) \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \Delta_1(a_k, t - z) \right] dt + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f_k(t, \eta) H_k(t - z, \tau - \eta) dt d\eta = \\ &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{a_k E_0}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty q_j(t, \tau) \exp(i\xi(t - z)) \bar{\Delta}_2(a_j, \xi) dt d\xi, \end{aligned}$$

где $E_0 = (2((1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2))^{-1}$;

в зоне ненагруженного контакта —

$$\lambda_j f_j(z, \tau) + h_c \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+j} \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f_k(t, \eta) \Phi_k(a_0, t - z, \tau - \eta) dt d\eta = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$p(z, \tau) = 0;$$
(8)

в зоне отрыва — в зависимости от выбранной модели или условия

$$f_1(z, \tau) = f_2(z, \tau) = p(z, \tau) = 0,$$

или условия вида (8), в которых h_c заменено на h_b . При этом, как отмечалось выше, границы между зонами контакта изначально неизвестны.

Определение и построение численного алгоритма. Для построения решения такой системы уравнений предлагается численный алгоритм, использующий результаты работы [1] и некоторые особенности поведения полученных выше функций (можно утверждать, что $\Phi_j(r, z, 0) = 0$, $H_j(z, 0) = 0$).

Разделим временной интервал $[0, \tau_*]$, на котором исследуется поведение трибосистемы, на N отрезков, выбрав моменты времени $\tau_i = i\tau_1$ ($i = 0, \dots, N$), где $\tau_N = \tau_*$, и проведем дискретизацию по времени интегралов

$$F(z, \tau) = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f(t, \eta) \Phi(t - z, \tau - \eta) dt d\eta \quad (\Phi(z, 0) = 0)$$

по следующей схеме:

$$F(z, 0) = 0, \quad F(z, \tau_1) = 0,5G(z, \tau_{1,1}) + 0,25G(z, \tau_{0,2}),$$

$$F(z, \tau_2) = 0,5G(z, \tau_{2,1}) + 0,5G(z, \tau_{1,2}) + 0,25(G(z, \tau_{0,3}) - G(z, \tau_{0,1})),$$

$$F(z, \tau_n) = 0,5G(z, \tau_{n,1}) + 0,5G(z, \tau_{n-1,2}) +$$

$$+ 0,5 \sum_{k=1}^{n-2} (G(z, \tau_{k,n+1-k}) - G(z, \tau_{k,n-1-k})) + 0,25(G(z, \tau_{0,n+1}) - G(z, \tau_{0,n-1})) \quad (n \geq 3),$$

где

$$G(z, \tau_{i,j}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t, \tau_i) \Phi(t - z, \tau_j) dt.$$

Тогда для каждого момента времени τ_i ($i = 0, \dots, N$) получим следующие системы уравнений:

в зоне нагруженного контакта —

$$\lambda_1 f_1(z, \tau_i) + \lambda_2 f_2(z, \tau_i) = f\omega(\tau_i) a_0 p(z, \tau_i),$$

$$\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left[\lambda_k f_k(z, \tau_i) + \frac{h_a}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f_k(t, \tau_i) \Phi_k(a_0, t - z, \tau_1) dt \right] = h_a \sum_{k=1}^2 (-1)^k R'_k(a_0, z, \tau_i), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 E_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \tau_i) \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \Delta_1(a_k, t - z) \right] dt + \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\alpha_k E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \tau_i) H_k(t - z, \tau_1) dt = \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{a_k E_0}{\pi} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_k(t, \tau_i) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \exp(i\xi(t - z)) dt d\xi + E_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \alpha_k R_k''(z, \tau_i); \end{aligned}$$

в зоне ненагруженного контакта —

$$\begin{aligned} \lambda_j f_j(z, \tau_i) + h_c \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \tau_i) \Phi_k(a_0, t - z, \tau_1) dt &= h_c \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+j-1} R_k'(a_0, z, \tau_i), \\ p(z, \tau_i) &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

в зоне отрыва —

$$f_1(z, \tau_i) = f_2(z, \tau_i) = p(z, \tau_i) = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} R_k'(r, z, 0) &= 0; \quad R_k'(r, z, \tau_1) = 0,25 G_k'(r, z, \tau_{0,2}); \\ R_k'(r, z, \tau_2) &= 0,5 G_k'(r, z, \tau_{1,2}) + 0,25 (G_k'(r, z, \tau_{0,3}) - G_k'(r, z, \tau_{0,1})); \\ R_k'(r, z, \tau_n) &= 0,5 G_k'(r, z, \tau_{n-1,2}) + 0,5 \sum_{\ell=1}^{n-2} (G_k'(r, z, \tau_{\ell, n+1-\ell}) - G_k'(r, z, \tau_{\ell, n-1-\ell})) + \\ & + 0,25 (G_k'(r, z, \tau_{0, n+1}) - G_k'(r, z, \tau_{0, n-1})) \quad (n \geq 3); \\ G_k'(r, z, \tau_{i,j}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \tau_i) \Phi_k(r, t - z, \tau_j) dt; \end{aligned}$$

функция R_k'' определяется по аналогии с R_k' при условии

$$G_k''(z, \tau_{i,j}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \tau_i) H_k(t - z, \tau_j) dt.$$

Для температуры имеем соотношение

$$T_j(r, z, \tau_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(t, \tau_i) \Phi_j(r, t - z, \tau_1) dt + R_j'(r, z, \tau_i).$$

Исследуем свойства ядер $\Delta(a_j, z)$, $H_j(z, \tau)$ и $\Phi_j(r, z, \tau)$. Поскольку

$$\bar{\Delta}_1(a_j, 0) = (1 - \nu_j^2)^{-1} \left(\frac{a_j^2 + a_0^2}{a_j^2 - a_0^2} + \nu_j \right),$$

$$\bar{\Phi}_j(r, 0, \tau) = a_0(\pm \ln(r/a_j) + (a_j\gamma_j)^{-1}) \mp 2a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_0(\mu_{j,m}r, \mu_{j,m}a_0)W_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0)}{\mu_{j,m}^2 N_{j,m}^2} \exp(-k_j\mu_{j,m}^2\tau),$$

$$\bar{H}_j(0, \tau) = \pm a_0^2 \left[\frac{a_0^2}{a_0^2 - a_j^2} \ln\left(\frac{a_0}{a_j}\right) - 0,5 \pm \frac{1}{a_j\gamma_j} + \frac{4a_j}{a_0^2 - a_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_1(\mu_{j,m}a_j, \mu_{j,m}a_0)W_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0)}{N_{j,m}^2\mu_{j,m}^3} \exp(-k_j\mu_{j,m}^2\tau) \right],$$

а при $\xi \rightarrow \infty$

$$\bar{\Delta}_1(a_j, \xi) \approx \mp 2(a_0\xi)^{-1}, \quad \bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau) \approx \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \approx \xi^{-1} \sqrt{a_0/r} \exp(\mp \xi(a_0 - r)),$$

$$\bar{H}_j(\xi, \tau) \approx \bar{H}_{j,st}(\xi) \approx \pm(1 + \nu_j)/\xi^2 \quad (\tau > 0),$$

на основании результатов работы [3] можно утверждать, что ядра

$$\Delta(z) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(\xi) \cos(\xi z) d\xi = a_0 E_0 \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \bar{\Delta}_1(a_k, \xi) \right] \cos(\xi z) d\xi$$

и $\Phi_{j,st}(a_0, z)$ имеют логарифмическую особенность, а ядра $H_j(\xi, \tau)$ и $\Phi_{j,st}(r, z)$ (при $r \neq a_0$) будут регулярными. Тогда

$$\Delta(z) = K_0(|z|) + \int_0^{\lambda_1} \bar{\Delta}(\xi) \cos(\xi z) d\xi - \ln(2\lambda_1) \quad (z = 0),$$

$$\Delta(z) = K_0(|z|) + \int_0^{\lambda_1} \bar{\Delta}(\xi) \cos(\xi z) d\xi - \text{Ci}(\lambda_1|z|) - K_0(|z|) \quad (z \neq 0),$$

$$H_j(z, \tau) = \int_0^{\lambda_{j,2}} \bar{H}_j(\xi, \tau) \cos(\xi z) d\xi \pm (1 + \nu_j) \left[\frac{\cos(\lambda_{j,2}z)}{\lambda_{j,2}} + |z| \left(\text{Si}(\lambda_{j,2}|z|) - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$\Phi_{j,st}(a_0, z) = K_0(|z|) + \int_0^{\lambda_{j,3}} \bar{\Phi}_{j,st}(a_0, \xi) \cos(\xi z) d\xi - \ln(2\lambda_{j,3}) \quad (z = 0),$$

$$\Phi_{j,st}(a_0, z) = K_0(|z|) + \int_0^{\lambda_{j,3}} \bar{\Phi}_{j,st}(a_0, \xi) \cos(\xi z) d\xi - \text{Ci}(\lambda_{j,3}|z|) - K_0(|z|) \quad (z \neq 0),$$

$$\Phi_{j,st}(r, z) = \int_0^{\lambda_{j,3}} \bar{\Phi}_{j,st}(r, \xi) \cos(\xi z) d\xi + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_0}{r}} \sum_{k=1}^2 E_1(\pm \lambda_{j,3}(a_0 - r + (-1)^{k-1}iz)) \quad (r \neq a_0),$$

где $i^2 = -1$; $\text{Si}(z)$, $\text{Ci}(z)$ — интегральные синус и косинус; $E_1(z)$ — интегральная показательная функция [2]. При этом учтено, что $K_0(z) \approx \ln(2/z) - \gamma$ при $z \rightarrow 0$ (γ — постоянная Эйлера) [2].

Границы интегрирования $\lambda_{j,k}$ выбирались так, чтобы на интервалах $(\lambda_{j,k}, \infty)$ подынтегральные функции в интегралах Фурье можно было заменить их асимптотическими выражениями. Значения интегралов на промежутках $[0, \lambda_{j,k}]$ найдем путем численного интегрирования, используя метод Филона [4].

Правую часть третьего интегрального уравнения в (9) представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{a_k E_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_k(t, \tau) \bar{\Delta}_2(a_k, \xi) \exp(i\xi(t - z)) dt d\xi = \\ = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \frac{2a_2 E_0}{\pi} q(\tau) (I_0(L + z) + I_0(L - z)), \\ I_0(z) = \int_0^{\lambda_4} \frac{\bar{\Delta}_2(a_2, \xi) - \bar{\Delta}_2(a_2, 0)}{\xi} \sin(\xi z) d\xi + \\ + \bar{\Delta}_2(a_2, 0) \text{Si}(\lambda_4 z) + \frac{2(a_2 - a_0)}{i\sqrt{a_2 a_0}} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} E_1(\lambda_4(a_2 - a_0 + (-1)^k iz)). \end{aligned}$$

Внутренняя поверхность трибосистемы свободна от напряжений, а нагрузка на внешней поверхности является симметричной функцией относительно сечения $z = 0$ и изменяется по закону

$$q_1(z, \tau) = 0, \quad q_2(z, \tau) = q(\tau) H(L - |z|)$$

($H(z)$ — функция Хевисайда). При этом учтено, что ядро $\bar{\Delta}_2(a_2, \xi)$ имеет следующие свойства:

$$\bar{\Delta}_2(a_2, 0) = \frac{1}{1 - \nu_2^2} \frac{2a_0 a_2}{a_2^2 - a_0^2}, \quad \bar{\Delta}_2(a_2, \xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \approx \frac{4(a_2 - a_0)}{\sqrt{a_2 a_0}} \exp(-\xi(a_2 - a_0)).$$

Из анализа системы уравнений (9)–(11) следует, что $p(z, \tau_k)$ в каждый момент времени τ_k ($k = 0, \dots, N$) является ограниченной и непрерывной функцией, а $f_j(z, \tau_k)$ — ограниченной функцией, имеющей конечное количество локальных экстремумов и точек разрыва первого рода, т. е. эти функции удовлетворяют условиям Дирихле [5]. Учитывая, что симметрия нагрузки обеспечивает симметрию решения задачи, в частности симметрию относительно сечения $z = 0$ контактного давления и функций $f_j(z, \tau_k)$, представим в области $z \in [0, \infty)$ эти функции отрезками ряда по обобщенным полиномам Лаггера [6]:

$$\begin{aligned} p(z, \tau_k) &= \frac{\exp(-z)}{\sqrt{z}} \sum_{m=0}^M B_m(\tau_k) L_m^{(-1/2)}(2z), \\ f_j(z, \tau_k) &= \frac{\exp(-z)}{\sqrt{z}} \sum_{m=0}^M C_{j,m}(\tau_k) L_m^{(-1/2)}(2z). \end{aligned} \tag{12}$$

Подставим выражения (12) в систему (9)–(11) и перейдем от интегралов по интервалу $(-\infty, \infty)$ к интегралам по $[0, \infty)$, используя следующую схему ($\psi(-z, \tau) = \psi(z, \tau)$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \tau_k) \Psi(t - z, \tau_k) dt = \int_0^{\infty} \psi(t, \tau_k) (\Psi(t - z, \tau_k) + \Psi(t + z, \tau_k)) dt.$$

Используя соотношения [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y)}{\sqrt{y}} K_0(|x-y|) L_m^{(-1/2)}(2y) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \exp(-x) L_m^{(-1/2)}(2x)$$

$$((-1)!! = 0!! = 1, \quad (2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1), \quad (2m)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m)),$$

интегралы с логарифмической особенностью вычислим точно, а регулярные интегралы найдем приближенно по квадратурной формуле [8]

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} f(x) dx = \sum_{i=1}^{M+1} w_i f(x_i),$$

где

$$w_i = \frac{\sqrt{\pi}(2M+1)!! x_i}{(2M+2)!!((M+2)L_{M+2}^{(-1/2)}(x_i))^2}$$

— весовые коэффициенты; x_i — нули многочлена Лаггера $L_{M+1}^{(-1/2)}(x)$; $i = 1, \dots, M+1$.

Для определения неизвестных коэффициентов $B_m(\tau_k)$, $C_{j,m}(\tau_k)$ применим в каждый момент времени τ_k метод коллокации [9], выбрав некоторое множество точек (вообще говоря, не равноудаленных) z_m ($m = 0, \dots, M$). Тогда систему уравнений приведем к системе линейных алгебраических уравнений размерности $[3(M+1) \times 3(M+1)]$ относительно неизвестных коэффициентов, определяющих распределение контактного давления и характер изменения вдоль оси z функций f_j в этот момент времени. При этом необходимо сделать следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вычисление коэффициентов разложения производится в несколько этапов.

Сначала на выбранном множестве точек рассматривается только система интегральных уравнений (9). Решается полученная система линейных алгебраических уравнений, ищется распределение контактного давления и проверяется выполнение условий $p(z_m, \tau_k) \geq 0$.

Далее, в точках z_m , где контактное давление меньше нуля, удовлетворяются условия (11) или условия вида (10), в которых h_c заменено на h_b . Начало зоны ненагруженного контакта (точка z_{m0}) определяется из условия $|p(z_m, \tau_k)| < \varepsilon$ ($\varepsilon \approx 10^{-5}$) для всех значений $m_0 \leq m \leq M$. В точках z_m этой зоны выполняются условия (10). Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока не изменится знак контактного давления.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пренебрежение решением системы на промежутке $[z_M, \infty)$ основано на том обстоятельстве, что контактное давление и температура достаточно быстро убывают [1]. На расстоянии приблизительно $10L$ (L — параметр, определяющий интервал приложения равномерно распределенной нагрузки) эти величины мало отличаются от нуля. Следует отметить, что аппроксимируются разрывные функции $f_j(z, \tau_k)$, поэтому количество точек разбиения z_m и как следствие количество членов в разложениях (12) необходимо взять достаточно большим. Как показали численные расчеты, при $M = 200$ в случае выбора на промежутке $z \in [0, 2L]$ равномерной сетки разбиения с шагом $L/40$ относительная погрешность вычислений не превышает 3 %. Шаг разбиения по времени выбирался равным $\tau_1 = 1$ с, а на промежутке $(2L, 10L)$ выбиралась равномерная сетка разбиения с шагом $L/15$. Проверка вычислений производилась дроблением разбиения по времени и по координате z , а также удвоением интервала интегрирования. Значения сумм (12) определялись методом Фейера [5].

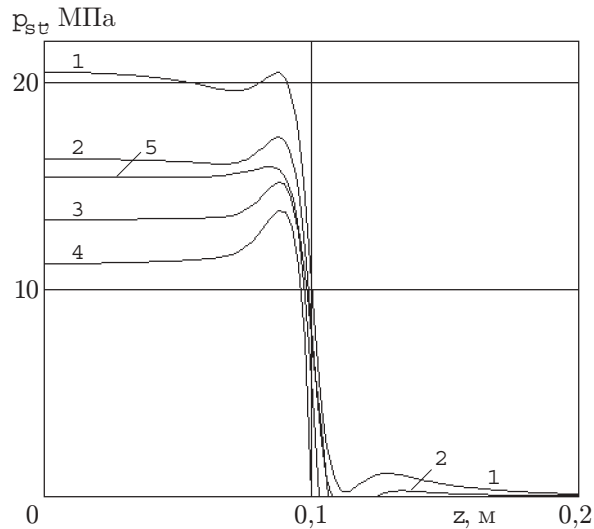


Рис. 1. Распределение стационарного контактного давления для различных значений α_1 ($\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\omega_0 = 1 \text{ рад/с}$):
 1 — $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 2 — $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 3 — $\alpha_1 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 4 — $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 5 — контактное давление при упругом взаимодействии ($\omega_0 = 0$)

Анализ результатов и выводы. Численный анализ задачи проведен для пары трения сталь — сталь ($E_j = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_j = 0,3$, $\lambda_j = 50 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $k_j = 0,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$) при следующих значениях основных параметров: $h_a = 10 \text{ кВт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $f = 0,1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 20 \text{ м}^{-1}$, $a_1 = 3,5 \text{ см}$, $a_0 = 5 \text{ см}$, $a_2 = 6 \text{ см}$, $\alpha_1 = (1 \div 15) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. При этом в зоне отрыва удовлетворяются условия (11), а коэффициент термической проводимости в зоне нагруженного контакта $h_c = 0,5h_a$. Нагрузка на поверхности $r = a_2$ и относительная угловая скорость вращения изменяются по следующим соотношениям:

$$q_2(z, \tau) = q_{st}(z)(1 - \exp(-\beta\tau)), \quad \omega(\tau) = \omega_0;$$

$$q_2(z, \tau) = q_{st}(z), \quad \omega(\tau) = \omega_0(1 - \exp(-\beta\tau))$$

($q_{st}(z) = q_0 H(L - |z|)$). Здесь $q_0 = 20 \text{ МПа}$; $\omega_0 = 0 \div 2 \text{ рад/с}$; $\beta = 0,01 \text{ с}^{-1}$; $L = 0,1 \text{ м}$. Поверхность $r = a_1$, как отмечалось выше, свободна от нагрузки.

Приведем некоторые результаты численного анализа задачи. На рис. 1 представлено распределение стационарного контактного давления. Как видно, в зависимости от отношения коэффициентов линейного теплового расширения цилиндров возможны три механизма взаимодействия:

- если $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то в случае односвязной области приложения нагрузки контакт цилиндров происходит в ограниченной области;
- если $\alpha_1 \approx \alpha_2$, то имеет место многосвязность области нагруженного контакта;
- при $\alpha_1 > \alpha_2$ имеем полный контакт между цилиндрами.

При этом следует отметить, что увеличение интенсивности тепловыделения за счет увеличения ω_0 ведет к уменьшению области контакта и контактного давления при $\alpha_1 < \alpha_2$. Если же $\alpha_1 > \alpha_2$, то увеличение ω_0 является причиной роста $p_{st}(z)$. Диапазон изменения $\omega_0 \geq 0$ ограничивается критическим значением ω_{cr} [1].

Для сравнения на рис. 2 штриховыми кривыми представлены распределения контактного давления, полученные в предположении полного контакта цилиндров [1]. Как и следовало ожидать, при $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ кривые распределения контактного давления, полученные в приближенной и уточненной (с учетом отрыва) постановках, не раз-

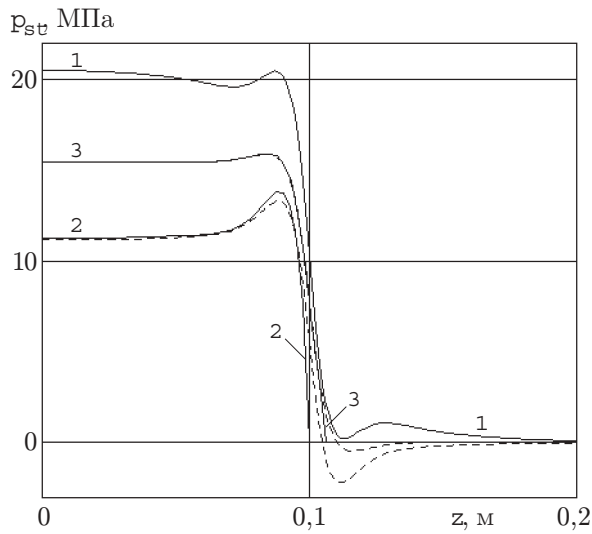


Рис. 2

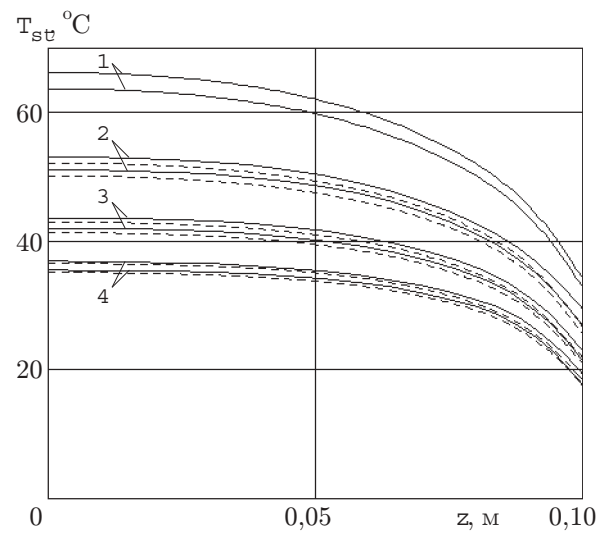


Рис. 3

Рис. 2. Распределение стационарного контактного давления в приближенной (штриховые кривые) и уточненной (сплошные кривые) постановках задачи: 1 — $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 2 — $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 3 — контактное давление при упругом взаимодействии

Рис. 3. Распределение стационарной температуры на поверхности $r = a_0$ для различных значений α_1 ($\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\omega_0 = 1 \text{ рад/с}$): 1 — $\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 2 — $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 3 — $\alpha_1 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; 4 — $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; сплошные кривые — уточненная постановка задачи, штриховые — приближенная постановка задачи

личаются. Незначительное различие распределений контактных напряжений при упругом взаимодействии, полученных в приближенной и уточненной постановках, объясняется самоуравновешенностью рассмотренной трибосистемы, т. е. в отличие от классических контактных задач здесь отсутствует интегральное условие равенства суммы контактных напряжений прижимающей силе. Различие распределений $p_{st}(z)$, полученных в приближенной и уточненной постановках при $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, объясняется изменением тепловых граничных условий в зоне отрыва.

Различием тепловых граничных условий в зоне отрыва объясняется и характер распределения температуры поверхности $r = a_0$, полученной в приближенной и уточненной постановках (рис. 3). Кривые 1–4 на рис. 3 построены для условий рис. 1, причем верхняя кривая в каждой группе линий соответствует внутреннему цилиндру, а нижняя — внешнему.

Исследование решения квазистатической задачи показывает, что при выполнении условия $\omega_0 < \omega_{cr}$ контактные напряжения монотонно выходят на соответствующее стационарное значение, а характер их изменения определяется выбором зависимостей нагрузки и угловой скорости вращения от времени. В первом случае (изменение нагрузки во времени) площадь контакта (при $\alpha_1 < \alpha_2$) остается постоянной (рис. 4,а), а во втором наблюдается монотонное уменьшение области контакта (рис. 4,б). Если же $\alpha_1 \gg \alpha_2$, то при выходе контактных напряжений на стационарное значение (полный контакт) проявляется эффект многосвязности области контакта.

На рис. 4, 5 приведено распределение контактного давления при нестационарном тепловыделении, вызванном изменением нагрузки и угловой скорости вращения во времени.

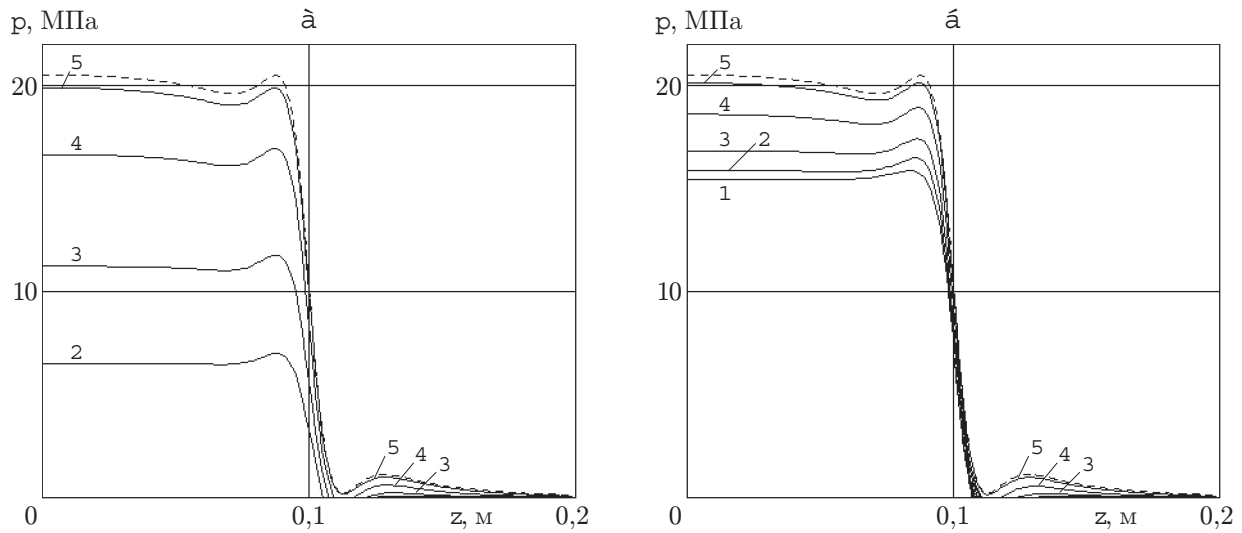


Рис. 4. Распределения давления в стационарной постановке задачи (штриховые кривые) и нестационарного контактного давления (сплошные кривые) в различные моменты времени τ ($\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\omega_0 = 1 \text{ рад/с}$):

1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 50 \text{ с}$; 3 — $\tau = 100 \text{ с}$; 4 — $\tau = 200 \text{ с}$; 5 — $\tau = 400 \text{ с}$; а — при изменении нагрузки во времени; б — при изменении угловой скорости вращения

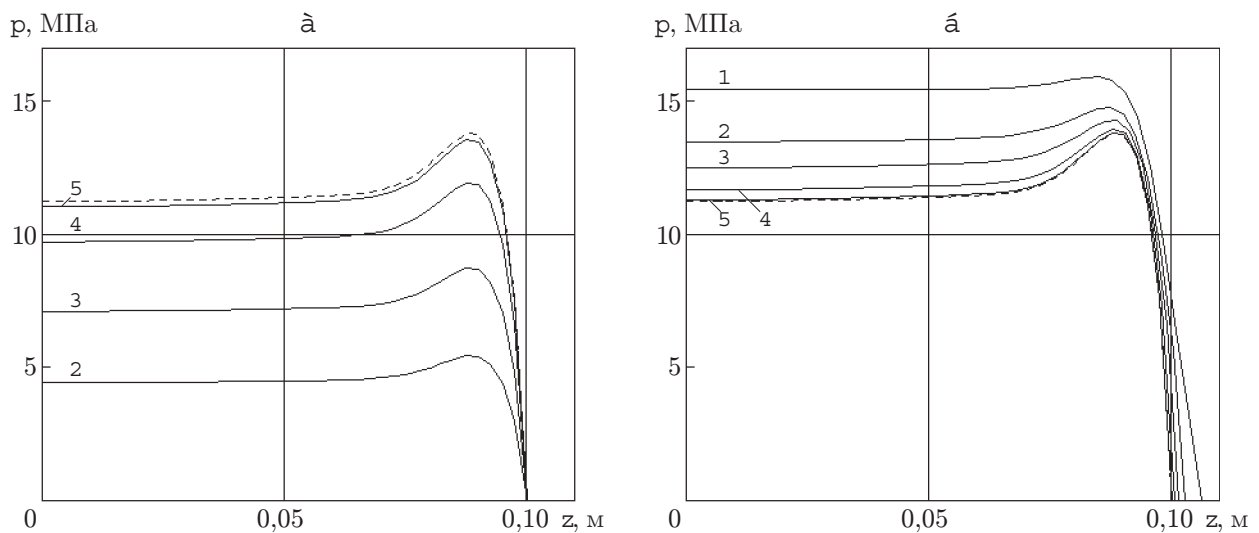


Рис. 5. Распределения давления в стационарной постановке задачи (штриховые кривые) и нестационарного контактного давления (сплошные кривые) в различные моменты времени τ при $\alpha_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ (обозначения те же, что на рис. 4)

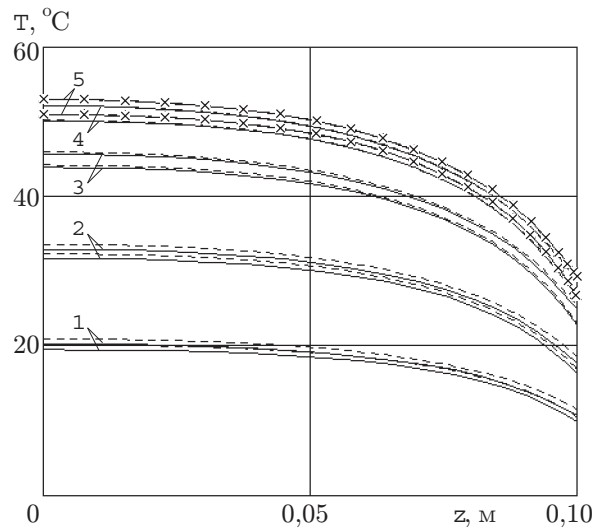


Рис. 6. Распределения стационарной температуры (кривые, отмеченные крестиком) и распределения нестационарной температуры в различные моменты времени τ ($\alpha_1 = \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$):

1 — $\tau = 50 \text{ с}$; 2 — $\tau = 100 \text{ с}$; 3 — $\tau = 200 \text{ с}$; 4 — $\tau = 400 \text{ с}$; 5 — $\tau = 600 \text{ с}$; сплошные кривые — при изменении ω во времени, штриховые — при изменении нагрузки

В обоих случаях нагрузка и угловая скорость вращения, выходящие на стационарное значение за время $\tau = 450 \text{ с}$, определяют длительность переходного процесса для контактных напряжений порядка $600 \div 700 \text{ с}$.

Температура поверхности контакта медленней выходит на стационарное значение (приблизительно за время 800 с), а с удалением от поверхности $r = a_0$ длительность переходного процесса увеличивается. На рис. 6 приведены распределения температуры поверхности $r = a_0$ для каждого цилиндра, полученные при условии равенства коэффициентов линейного теплового расширения. Верхняя кривая в каждой группе соответствует $j = 1$, нижняя — $j = 2$.

Вообще говоря, в задачах с возможным расслоением необходимо задавать на линии раздела слоев условия неидеального теплового контакта. При этом, учитывая сложность определения коэффициентов термической проводимости в каждой зоне, обоснованно введение одного осредненного коэффициента. То есть на линии раздела задаются смешанные механические условия, а для всей поверхности — одно тепловое условие. Проведенный в этом случае численный анализ задачи показал, что при условии, когда осредненный коэффициент термической проводимости поверхности контакта совпадает с коэффициентом термической проводимости зоны нагруженного контакта, отличие контактных напряжений от напряжений, полученных при смешанных тепловых условиях, не превышает 1 %, а характер различия термоупругих контактных напряжений, полученных в приближенной и уточненной постановках, аналогичен случаю упругого взаимодействия (кривая 3 на рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Грилицкий Д. В., Краснюк П. П. Термоупругий контакт двух цилиндров с нестационарным фрикционным теплообразованием // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 112–121.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

3. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
4. **Трантер К. Дж.** Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
6. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
7. **Попов Г. Я.** Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев: Вища шк., 1982.
8. **Крылов В. И., Шульгина Л. Т.** Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.
9. **Зенкевич О., Морган К.** Конечные элементы и аппроксимации. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 30/X 2003 г.
