

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

С. Л. Гавриленко, С. В. Шилько, Р. А. Васин*

Институт механики металлополимерных систем НАНБ, 246050 Гомель, Беларусь

* Институт механики Московского государственного университета, 119899 Москва

Представлена модель установившегося течения вязкопластического материала между коаксиальными цилиндрами. Учитывается нелинейность скоростной чувствительности, типичная для сверхпластичных материалов. Разработан алгоритм расчета характеристик материала на основе экспериментальных данных о моментах и угловых скоростях вращения коаксиальных цилиндров, дана оценка устойчивости алгоритма при наличии погрешности исходных данных.

Введение. В ряде технологий обработки материалов давлением, в частности при получении изделий методом глубокой вытяжки, имеет место развитое пластическое течение. Вязкопластическое течение наблюдается также при получении полимерных сплавов путем механической активации в смесителях и экструдерах; подобное течение имеет место в сопряжениях машин в слое консистентной смазки или краски (в печатающих устройствах). Режим вязкого течения характерен и для большинства технологических процессов, основанных на использовании явления сверхпластичности [1, 2].

Математическое моделирование и оптимизация названных технологических процессов предполагает знание вязкопластических характеристик материала. С этой целью проводятся эксперименты, в которых реализуется состояние сдвига, например в условиях течения материала в зазоре между вращающимися коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта) [3, 4]. При этом регистрируются угловые скорости и моменты вращения цилиндров, а константы материала определяются путем обработки экспериментальных данных.

В расчетах обычно используется модель вязкопластичности с нелинейной вязкостью и нулевым пределом текучести. Однако учет порогового напряжения имеет принципиальное значение, поэтому необходимо разработать методики определения характеристик вязкопластического материала с учетом как порогового напряжения, так и нелинейной скоростной чувствительности. В настоящей работе предложена одна из таких методик.

Формулировка задачи. Рассмотрим процесс установившегося течения вязкопластического материала в зазоре между недеформируемыми коаксиальными цилиндрами бесконечной длины с радиусами a и b ($b > a$), вращающимися вокруг общей оси с угловыми скоростями ω_a и ω_b под действием моментов M_a и M_b соответственно (рис. 1).

Примем, что во всей области, занятой материалом, окружная скорость течения является непрерывной и монотонной функцией радиуса, а на границах заданы условия адгезии (прилипания). В работе [5] указаны условия отсутствия зон застоя при движении вязкопластической среды между коаксиальными цилиндрами. Значения параметров, использованные для приведенных ниже численных экспериментов, удовлетворяют этим условиям.

Вводя цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z , совпадающей с осью вращения цилиндров, запишем уравнения движения среды в зазоре [4]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho F_r = \rho a_r,$$

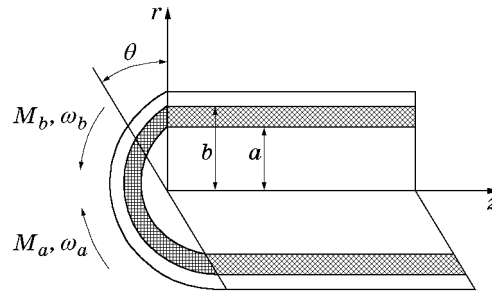


Рис. 1. Схема взаимодействия коаксиальных цилиндров с вязкопластическим материалом в зазоре

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} + \rho F_{\varphi} &= \rho a_{\varphi}, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho a_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений; ρ — плотность среды; F_i — массовые силы; a_i — компоненты вектора ускорения частицы материала.

Примем следующие определяющие соотношения для несжимаемого материала:

$$\begin{aligned} S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= (2\tau/H)\xi_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk}/3, \\ \tau = \tau_0 + K(H/\dot{\varepsilon}_0)^m &\text{ при } \tau \geq \tau_0, \quad H = 0 \text{ при } \tau < \tau_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ξ_{ij} — компоненты девиатора тензора скоростей деформации; S_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; $\dot{\varepsilon}_0$ — характерная скорость деформации; τ_0 — предел текучести (пороговое напряжение); τ — интенсивность сдвиговых напряжений; H — интенсивность сдвиговых скоростей деформации; m, K — константы материала.

Граничные условия. Будем считать, что выполняются кинематические граничные условия прилипания. Таким образом, краевые условия для поля скоростей U_r, U_{φ}, U_z имеют вид $U_{\varphi}(a) = \omega_a a, U_{\varphi}(b) = \omega_b b$.

Целью работы является определение параметров математической модели вязкопластического материала τ_0, K, m по известным значениям $\omega_a, \omega_b, M_a, M_b$.

Метод решения. Из постановки задачи следует, что $U_z = U_r = 0, U_{\varphi} = U_{\varphi}(r)$. Тогда единственной отличной от нуля компонентой ускорения является $a_r = -U_{\varphi}^2/r$, а единственной отличной от нуля компонентой тензора скоростей деформации — $\xi_{r\varphi} = (dU_{\varphi}/dr - U_{\varphi}/r)/2$. В силу (2) тензор напряжений записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & \sigma_{r\varphi} & 0 \\ \sigma_{r\varphi} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (3)$$

С учетом (1), (3) имеем следующие уравнения движения сплошной среды:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{U_{\varphi}^2}{r}, \quad \frac{d\sigma_{r\varphi}}{dr} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0,$$

где p — давление. Интегрируя последнее уравнение, получим, что независимо от определяющего соотношения материала имеет место соотношение $\sigma_{r\varphi} = C_1/r^2$, где C_1 — постоянная интегрирования, вообще говоря, зависящая от времени.

Вычислим интенсивность сдвиговых напряжений $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/2} = |\sigma_{r\varphi}| = |C_1|/r^2$. Интенсивность сдвиговых скоростей деформации $H = \sqrt{2\xi_{ij}\xi_{ij}} = r|d(U_\varphi/r)/dr|$.

Решение прямой задачи. Рассмотрим решение прямой задачи (решения прямых задач для линейной и нелинейной вязкой жидкости, а также для пластика Шведова — Бингама приведены в работе [6]).

Из выражения для $\sigma_{r\varphi}$ с учетом (2) следует

$$\tau_0 + Kr^m \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0^m} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{U_\varphi}{r} \right) \right)^m = \frac{C_1}{r^2},$$

так как $H = r|d(U_\varphi/r)/dr|$, или

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{U_\varphi}{\dot{\varepsilon}_0 r} \right) = \left(\frac{1}{K} \right)^n \left(\frac{C_1}{r^2} - \tau_0 \right)^n, \quad (4)$$

где $n = 1/m$.

Интегрируя (4), получим

$$\frac{U_\varphi}{\dot{\varepsilon}_0} = \frac{r}{(K)^n} \int \frac{1}{r} \left(\frac{C_1}{r^2} - \tau_0 \right)^n dr. \quad (5)$$

Для численных расчетов выберем следующие значения параметров: $a = 10$ см, $\tau = 100$ кг/см², $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-1}$ с⁻¹. Введем безразмерные величины $K' = (K/\tau) \cdot 10^3$, $\tau'_0 = (\tau_0/\tau) \cdot 10^3$, $U'_\varphi = U_\varphi/(a\dot{\varepsilon}_0)$, $r' = r/a$, $H' = H/\dot{\varepsilon}_0$, $C'_1 = (C_1/(\tau a^2)) \cdot 10^3$.

В безразмерных переменных равенство (5) записывается в виде

$$\frac{U'_\varphi}{r'} = \left(\frac{C'_1}{K'} \right)^n \int \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1} \right)^n dr'. \quad (6)$$

Подставляя (6) в граничные условия

$$U'_\varphi(b/a)/r' = \omega_b/\dot{\varepsilon}_0; \quad (7)$$

$$U'_\varphi(1)/r' = \omega_a/\dot{\varepsilon}_0 \quad (8)$$

и вычитая (8) из (7), получим уравнение

$$\left(\frac{C'_1(1)}{K'} \right)^n \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1} \right)^n dr' = \frac{\Delta\omega ba}{\dot{\varepsilon}_0}, \quad (9)$$

где $\Delta\omega ba = \omega_b - \omega_a$; $C'_1(i)$ — значение константы, найденное в i -м эксперименте.

Проведя два дополнительных численных эксперимента, получим два аналогичных уравнения

$$\left(\frac{C'_1(2)}{K'} \right)^n \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1(2)} \right)^n dr' = \frac{\Delta\omega^{(2)} ba}{\dot{\varepsilon}_0}; \quad (10)$$

$$\left(\frac{C'_1(3)}{K'} \right)^n \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1(3)} \right)^n dr' = \frac{\Delta\omega^{(3)} ba}{\dot{\varepsilon}_0}. \quad (11)$$

Исключая K' путем деления (9) и (10) на (11), получим два уравнения с двумя неизвестными

$$\int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1(1)} \right)^n dr' - \frac{\Delta\omega^{(1)} ba}{\Delta\omega^{(3)} ba} \left(\frac{C'_1(3)}{C'_1(1)} \right)^n \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1(3)} \right)^n dr' = 0; \quad (12)$$

$$\int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C_1^{(2)}}\right)^n dr' - \frac{\Delta\omega^{(2)}ba}{\Delta\omega^{(3)}ba} \left(\frac{C_1^{(3)}}{C_1^{(2)}}\right)^n \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C_1^{(3)}}\right)^n dr' = 0, \quad (13)$$

где $C_1^{(i)}$ находятся из уравнений

$$\int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C_1^{(i)}}\right)^n dr' = \left(\frac{K'}{C_1^{(i)}}\right)^n \frac{\Delta\omega^{(i)}ba}{\dot{\varepsilon}_0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{1}{C_1^{(i)}} = \frac{1}{K'} \left[\left(\frac{\Delta\omega ba}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{-1} \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C_1^{(i)}}\right)^n dr' \right]^{1/n}. \quad (14)$$

Полученные уравнения с независимой переменной, входящей под знак интеграла, будем решать методом простой итерации. Используя итерационную схему $1/C_{1n+1}^{(i)} = \varphi(C_{1n}^{(i)})$, где $\varphi(C_{1n}^{(i)})$ — правая часть уравнения (14), находим $C_1^{(i)}$. Сделав замену $1/C_1^{(i)} = x$, получим

$$x_{n+1} = \frac{1}{K'} \left[\left(\frac{\Delta\omega ba}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{-1} \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} (1 - x_n \tau'_0(r')^2)^n dr' \right]^{1/n}.$$

Вводя новые переменные $K' = 10^{13/3} K_1$, $x = x_1/10^{13/3}$, получим

$$x_{1,n+1} = \frac{1}{K_1} \left[\left(\frac{\Delta\omega ba}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{-1} \int_1^{b/a} \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{x_{1,n} \tau'_0(r')^2}{10^{13/3}}\right)^n dr' \right]^{1/n}.$$

Из расчетов следует, что при $K_1 = 1$, $\Delta\omega ba/\dot{\varepsilon}_0 = 1; 0,5; 0,25$ и значениях $n = 1, 1 \div 4, 0$, $\tau'_0 = 100 \div 6000$ величина x_1 порядка единицы. Значения x_1 вычислялись с точностью до 10^{-9} . Для достижения указанной точности требовалось, как правило, 10 итераций при любых n и малых значениях τ'_0 ($\tau'_0 = 100 \div 1000$) и около 20 итераций при больших значениях τ'_0 .

Исследована также сходимость алгоритма в зависимости от точности задания начальных данных. Показано, что при отклонении начальных данных от их точных значений в пределах 10–30 % число итераций остается практически постоянным и равно 6–7 для малых значений $\tau'_0 = 100 \div 1000$ и 20–25 для $\tau'_0 = 3000 \div 6000$.

Решение обратной задачи. В [5] указан способ проверки модели линейно-вязкопластического материала. Рассматриваемая здесь задача является более сложной. Для ее решения предлагается следующая процедура. Вычисляем значения функций $F_1(\tau'_0, n)$, $F_2(\tau'_0, n)$, представляющих собой левые части уравнений (12), (13), и находим интервалы, в которых эти функции меняют знак. Методом половинного деления находим кривые пересечения плоскости $z = 0$ с поверхностями $z = F_1$ и $z = F_2$. Затем определяем точки пересечения указанных кривых. Для решения этой задачи вычислены значения левых частей уравнений (12), (13) для различных значений τ'_0 и n . Для конкретных значений x_1 вычислялись значения функции $F_1(\tau'_0, n)$, определяемой зависимостью (12), и $F_2(\tau'_0, n)$ в соответствии с (13) с шагом по τ'_0 , равным 100. В частности, расчеты проводились для пяти пар значений: 1) $\tau'_0 = 400$; $n = 1,3$; 2) $\tau'_0 = 800$; $n = 1,6$; 3) $\tau'_0 = 1000$; $n = 1,9$; 4) $\tau'_0 = 400$; $n = 2,3$; 5) $\tau'_0 = 700$; $n = 3,4$.

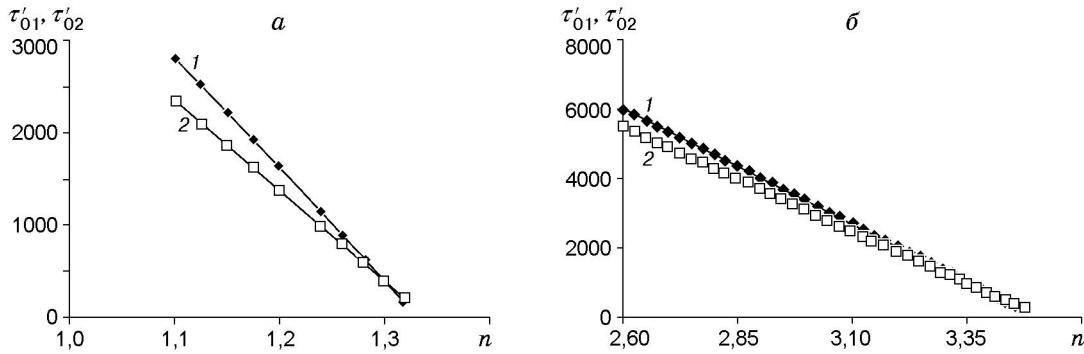


Рис. 2. Графики зависимостей порогового напряжения τ'_{01}, τ'_{02} от параметра n в окрестности их точек пересечения (τ'_0, n) :
 1 — τ'_{01} , 2 — τ'_{02} ; а — $\tau'_0 = 400, n = 1,3$; б — $\tau'_0 = 700, n = 3,4$

Определены области параметров, в которых функции F_1 и F_2 меняют знак, и методом половинного деления найдены корни уравнений $F_1(\tau'_0, n) = 0$ и $F_2(\tau'_0, n) = 0$. Показано, что каждая из линий пересечения $z = F_i$ ($i = 1, 2$) с плоскостью $z = 0$ близка к прямой и представляет собой график однозначной функции $\tau'_0(n)$, причем решение получается с высокой точностью. Во всех случаях при фиксированном n функции $F_1(\tau'_0, n)$ и $F_2(\tau'_0, n)$ убывают с увеличением τ'_0 и возрастают с увеличением n .

Для нахождения общих точек функций $F_1(\tau'_0, n) = 0$ и $F_2(\tau'_0, n) = 0$ построены их графики в координатах τ'_0, n .

Исследовалось также поведение функций $\tau'_{01} = f_1(n)$ и $\tau'_{02} = f_2(n)$ в окрестности найденных точек пересечения их графиков. Показано, что в точках пересечения кривых $\tau'_{01}(n)$ и $\tau'_{02}(n)$ производные функций различаются примерно в 1,5 раза. Таким образом, эти кривые не совпадают в окрестности точек пересечения. Других точек пересечения кривые $F_1(\tau'_0, n) = 0$ и $F_2(\tau'_0, n) = 0$ при $n = 1,1 \div 4,0, \tau'_0 = 100 \div 6000$ не имеют.

На рис. 2 показаны графики зависимостей $\tau'_{01}(n), \tau'_{02}(n)$ ($F_1(\tau'_0, n) = 0, F_2(\tau'_0, n) = 0$) в окрестности их точек пересечения.

Рассмотрим вариант приближенного решения уравнения

$$\frac{U'_\varphi}{r'} = \left(\frac{C'_1}{K'}\right)^n \int \frac{1}{(r')^{2n+1}} \left(1 - \frac{\tau'_0(r')^2}{C'_1}\right)^n dr'. \tag{15}$$

Следует отметить, что интеграл в (15) при произвольном n аналитически не берется. Учитывая, что $\tau'_0(r')^2/C'_1 < 1$ и выполняя разложение по биному Ньютона с сохранением двух членов ряда, можно получить приближенное выражение для $U'_\varphi(r')$

$$\frac{U'_\varphi}{r'} = \left(\frac{C'_1}{K'}\right)^n \left[\int \frac{dr'}{(r')^{2n+1}} - \frac{n\tau'_0}{C'_1} \int \frac{dr'}{(r')^{2n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{\tau'_0}{C'_1}\right)^2 \int \frac{dr'}{(r')^{2n-3}} \right]. \tag{16}$$

После интегрирования и умножения обеих частей (16) на r' имеем

$$U'_\varphi(r') = \left(\frac{C'_1}{K'}\right)^n \left[-\frac{1}{2n} \frac{1}{(r')^{2n-1}} + \frac{n\tau'_0}{C'_1} \frac{1}{2n-2} \frac{1}{(r')^{2n-3}} - \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} \left(\frac{\tau'_0}{C'_1}\right)^2 \frac{1}{(r')^{2n-5}} + C'_2 r' \right].$$

Константы C'_1 и C'_2 находим из кинематических граничных условий $U_\varphi(a) = \omega_a a, U_\varphi(b) = \omega_b b$ или $U'_\varphi(1) = \omega_a / \dot{\varepsilon}_0, U_\varphi(b/a) = \omega_b b / (a \dot{\varepsilon}_0)$. Из граничного условия следует

$$U'_\varphi(1) = \left(\frac{C'_2}{K'}\right)^n \left[-\frac{1}{2n} + \frac{n\tau'_0}{C'_1} \frac{1}{2n-2} - \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} \left(\frac{\tau'_0}{C'_1}\right)^2 + C'_2 \right] = \frac{\omega_a}{\dot{\varepsilon}_0}; \tag{16a}$$

$$U'_\varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{C'_1}{K}\right)^n \left[-\frac{1}{2n} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-1} + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \frac{1}{C'_1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-3} - \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} \left(\frac{\tau'_0}{C'_1}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-5} + C'_2 \frac{b}{a} \right] = \frac{\omega_b}{\dot{\varepsilon}_0} \frac{b}{a}. \quad (16\text{б})$$

После деления (16б) на b/a и вычитания (16а) из (16б) получим уравнение для определения C'_1

$$\left(\frac{C'_1}{K}\right)^n \left[\frac{1}{2n} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right) + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \frac{1}{C'_2} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-2} - 1\right) + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} \left(\frac{\tau'_0}{C'_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-4}\right) \right] = \frac{\omega'_b - \omega'_a}{\dot{\varepsilon}_0} = \frac{\Delta\omega'ba}{\dot{\varepsilon}_0}. \quad (17)$$

Введем следующие величины: $\tilde{x} = 1 - (a/b)^{2n}$, $\tilde{y} = (a/b)^{2n-2} - 1$, $\tilde{z} = 1 - (a/b)^{2n-4}$. Тогда уравнение (17) примет вид

$$\frac{(C'_1)^n}{2n} \tilde{x} + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \tilde{y}(C'_1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 (C'_1)^{n-2} \tilde{z} = (K')^n \Delta\omega'ba.$$

Поскольку по данным одного эксперимента можно получить только одно уравнение для неизвестных n , τ'_0 , K' , для определения параметров модели необходимо иметь результаты трех экспериментов для различных относительных угловых скоростей вращения коаксиальных цилиндров. Тогда получим систему трех уравнений

$$\frac{(C'_1)^{n(1)}}{2n} \tilde{x} + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \tilde{y}(C'_1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 (C'_1)^{n-2} \tilde{z} = (K')^n \Delta\omega^{(1)}ba, \\ \frac{(C'_1)^{n(2)}}{2n} \tilde{x} + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \tilde{y}(C'_1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 (C'_1)^{n-2} \tilde{z} = (K')^n \Delta\omega^{(2)}ba, \quad (18) \\ \frac{(C'_1)^{n(3)}}{2n} \tilde{x} + \frac{n\tau'_0}{2n-2} \tilde{y}(C'_1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 (C'_1)^{n-2} \tilde{z} = (K')^n \Delta\omega^{(3)}ba.$$

Из трех уравнений (18) путем деления первого уравнения на второе и третье получаются два уравнения, содержащие лишь n_1 , τ'_0 . Если принять $\Delta\omega^{(1)}ba/(\Delta\omega^{(2)}ba) = 2$ и $\Delta\omega^{(1)}ba/(\Delta\omega^{(3)}ba) = 4$, $C_1^{(i)} = 10^{13/3}x_i$, то эти уравнения примут вид

$$10^{-13/3} \frac{\tilde{x}}{2n} ((x_1)^n - 2(x_2)^n) + \frac{n\tau'_0\tilde{y}}{2n-2} ((x_1)^{n-1} - 2(x_2)^{n-1}) + \\ + 10^{-26/3} \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 \tilde{z} ((x_1)^{n-2} - 2(x_2)^{n-2}) = 0; \quad (19)$$

$$10^{-13/3} \frac{\tilde{x}}{2n} ((x_1)^n - 4(x_3)^n) + \frac{n\tau'_0\tilde{y}}{2n-2} ((x_1)^{n-1} - 4(x_3)^{n-1}) + \\ + 10^{-26/3} \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} (\tau'_0)^2 \tilde{z} ((x_1)^{n-2} - 4(x_3)^{n-2}) = 0. \quad (20)$$

Выражая τ'_0 через n из уравнения (19) и подставляя в уравнение (20), получим уравнение с одной переменной n . Тогда, применяя итерационную схему вида $n_{m+1} = n_m + F(n_m, \tau'_0(n_m))$, можно найти корень n .

Далее данный алгоритм проверялся на устойчивость. Для всех $n = 1,05 \div 4$ с шагом 0,05 вычислялись средние арифметические значения, равные отклонению n , τ'_0 , K' от истинных значений. С этой целью проведено 100 экспериментов со случайным отклонением x_i на 1, 2 и 3 %.

Вычисления показали, что во всем диапазоне n при малых τ'_0 точность определения τ'_0 неудовлетворительна (погрешность превышает 1000 %), но слабо влияет на результат вычисления n и K' . Сопоставимые с K значения τ'_0 определяются с более высокой точностью. Это можно объяснить тем, что в уравнении для τ'_0 члены, содержащие τ'_0 , малы по сравнению с первым членом, не содержащим этого параметра.

При отклонении моментов от точных значений менее чем на 1 %, погрешность измерения не превышает 10 %. При отклонениях на 2 и 3 % погрешность менее 20 и 30 % соответственно. Предложенный алгоритм можно использовать при $\tau'_0 = 11\,000 \div 22\,000$ при условии, что остальные константы n и K' соответствуют сверхпластичным материалам.

Тестирование методики с использованием экспериментальных данных. С целью проверки предложенной методики проведены эксперименты на ротационном вискозиметре Rheotest 2.1, реализующем течение Куэтта. В качестве испытываемого вязкопластического материала использовалась консистентная смазка на основе индустриального масла И-40А с введенными поверхностно-активными веществами и загустителями. Испытания проводились при температуре $t = 25$ °С в диапазоне напряжений сдвига 30–170 Па. Отношение радиусов внутреннего и внешнего коаксиальных цилиндров составляло 0,98.

Проведено три эксперимента с различными угловыми скоростями: $\Delta\omega_{ba}^1 = -25,434$ с⁻¹, $\Delta\omega_{ba}^2 = -8,378$ с⁻¹, $\Delta\omega_{ba}^3 = -4,71$ с⁻¹. При указанных угловых скоростях регистрировались следующие значения касательных напряжений: $\sigma_{r\varphi}^1|_{r=a} = c_1/a^2 = 169,4$ Па, $\sigma_{r\varphi}^2|_{r=a} = 72,6$ Па, $\sigma_{r\varphi}^3|_{r=a} = 49,7$ Па. По описанной выше приближенной методике, основанной на решении системы нелинейных алгебраических уравнений, найдены безразмерные константы материала n , τ_0 , K' . Для расчета были взяты характерные значения параметров $\tau = 10$ Па, $\dot{\varepsilon} = 1$ с⁻¹, $a = 1$ см, которым соответствуют значения безразмерных параметров $\tau'_0 = 100\tau_0$, $c'_1 = 100c_1$, $K' = 100K$. Получены следующие константы материала: $\tau'_0 = 79,3$, $n = 3,73$, $K' = 19,51$. Поскольку τ_0 имеет тот же порядок, что и параметр K , решение должно быть устойчивым, что следует из проведенных выше расчетов.

Установлено, что погрешность измерения касательных напряжений, равная 1 %, вызывает погрешность определения параметров n , τ'_0 , K' 3, 2 ÷ 6 и 3 ÷ 10 % соответственно. Поскольку константы материала были неизвестны, проводился четвертый эксперимент для решения прямой задачи и сравнения полученного касательного напряжения с экспериментальным значением. Так, в случае $\Delta\omega_{ba}^4 = -2,926$ с⁻¹ касательные напряжения $\sigma_{r\varphi}|_{r=a} = 36,3$ Па. При решении прямой задачи получено значение касательного напряжения с относительной погрешностью 5 %, что свидетельствует о достаточно высокой точности разработанной методики.

Расчет с использованием точных уравнений при тех же угловых скоростях и касательных напряжениях дает значения констант, отличающиеся от приближенных значений менее чем на 10 %. Таким образом, приближенная методика может быть использована для ориентировочной оценки значений характеристик вязкопластического материала.

Выводы. Предложен и исследован алгоритм идентификации модели вязкопластического материала в экспериментах, реализующих течение Куэтта.

Установлено, что алгоритм определения момента вращения коаксиальных цилиндров $C_1^{(i)}$ при решении прямой задачи устойчив и обладает удовлетворительной сходимостью в исследуемом диапазоне τ'_0 . Для отыскания решения с точностью до 10^{-9} достаточно

25 итераций. Уравнения для нахождения τ'_0 и n таковы, что в предполагаемом диапазоне τ'_0 и n существует единственный корень, хотя каждая кривая функции $z_i = F_i(x, y)$ при пересечении с плоскостью $z_i = 0$ близка к прямой линии.

Экспериментальная проверка предложенной методики путем реализации на ротационном вискозиметре течения Куэтта вязкопластической смазки показала достаточно высокую для практики точность определения констант материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Смирнов О. М.** Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1979.
2. **Кайбышев О. А.** Сверхпластичность промышленных сплавов. М.: Металлургия, 1984.
3. **Малкин А. Я., Чалых А. Е.** Диффузия и вязкость полимеров: Методы измерения. М.: Химия, 1979.
4. **Огibalов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.** Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
5. **Леонова Э. А.** Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязкопластической среды // ПМТФ. 1966. № 4. С. 3–19.
6. **Enikeev F. U.** Plastic behaviour of super plastic material moving between two coaxial rotating cylinders // Intern. J. Mech. Sci. 1993. V. 35, N 2. P. 81–88.

*Поступила в редакцию 13/VI 2001 г.,
в окончательном варианте — 22/I 2002 г.*
