

О ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМАХ СТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ

*Р. М. Зайдель, Я. Б. Зельдович*

(Москва)

В обычных условиях распространение пламени происходит таким образом, что основной причиной возбуждения реакции является теплопередача от уже сгоревших частиц, имеющих высокую температуру, к более холодным свежим порциям горючего, в которых реакция еще не началась. Однако в ряде современных технических устройств, например в реактивных двигателях, необходимо учитывать, что скорость реакции при начальной температуре горючей смеси не равна нулю. Поэтому воспламенение горючего может происходить за счет саморазогрева при отсутствии теплопроводности. Если в камеру сгорания, имеющую форму цилиндрической трубы, с торца подается горючая смесь, то в зависимости от скорости подачи и начальной температуры смеси возможны различные режимы горения.

Пусть при температуре  $T_0$  (начальной температуре смеси) скорость реакции мала настолько, что имеет смысл обычное понятие скорости распространения пламени  $w$ , которая зависит от свойств горючей смеси, ее начальной температуры, и при наличии теплоотдачи в торец от величины потерь  $Q$

$$w = w(T_0, Q)$$

Будем считать, как это часто имеет место на практике, что начальная температура и скорость подачи таковы, что за время самовозгорания (без подвода тепла) частица смеси пройдет путь, не превышающий длины камеры. Если скорость подачи смеси  $u$  меньше скорости пламени  $w(T_0, 0)$

$$u < w(T_0, 0)$$

то зона горения будет находиться непосредственно у торца камеры. Разность температур стенки и продуктов горения приводит к появлению теплового потока на стенку  $Q$ , что равносильно уменьшению калорийности горючей смеси. Вследствие этого скорость пламени также уменьшается. В стационарном режиме она будет в точности равна скорости подачи

$$w(T_0, Q) = u$$

Если скорость подачи смеси превышает скорость пламени

$$u > w(T_0, 0)$$

то стационарный режим (без учета самовозгорания) невозможен и фронт пламени уходит на бесконечность. На самом же деле этого не происходит, так как скорость реакции при температуре  $T_0$  не равна нулю; поэтому температура смеси даже при отсутствии подвода тепла извне медленно повышается до значения  $T_1$ , при котором скорость пламени, зависящая от подогрева смеси, вновь становится равной скорости подачи

$$w(T_1, 0) = u$$

Фронт горения при этом находится от торца на расстоянии  $L_1 = u\tau_1$ , где  $\tau_1$  — время, необходимое для того, чтобы температура смеси за счет собственного разогрева повысилась от значения  $T_0$  до  $T_1$ . Пусть  $x$  — расстояние вдоль оси трубы, отсчитываемое от торца. В области  $0 < x < L_1$  теплопроводность незначительна, так как саморазогрев при температурах, близких к  $T_0$ , происходит весьма медленно. К этой области саморазогрева примыкает довольно узкая зона горения, где на ход реакции существенно влияет теплопередача от уже сгоревших частиц, имеющих высокую температуру.

При дальнейшем увеличении скорости подачи смеси необходимая для существования стационарного режима температура подогрева  $T_1$  может оказаться столь высокой (близкой к температуре продуктов горения), что обычное понятие распространения пламени теряет смысл. В этих условиях роль теплопроводности в поджиге смеси становится весьма малой. Так как скорость реакции сильно растет с повышением температуры, то выгорание большей части смеси происходит практически мгновенно, спустя время  $\tau$  после начала реакции в данной частице. Величина  $\tau$ , называемая периодом индукции, зависит от природы смеси и начальной температуры  $T_0$ . Фронт пламени при этом находится на расстоянии  $L = u\tau$  от торца камеры.

Для иллюстрации сделанных выше утверждений качественного характера рассмотрим простейший пример реакции первого порядка. Система уравнений, описывающих стационарное горение, в данном случае такова (см. [1]):

$$j c_p \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} + qf(\varphi, T), \quad j \frac{d\varphi}{dx} = \rho D \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - f(\varphi, T) \quad (1)$$

Здесь  $T$  — температура в данной точке,  $\varphi$  — концентрация горючей компоненты в смеси,  $q$  — калорийность,  $j = \rho_0 u = \rho v$  — поток вещества,  $\rho_0$  — плотность исходной смеси,  $u$  — скорость подачи,  $\rho$  и  $v$  — плотность и скорость вещества в данной точке. В исходной смеси концентрация  $\varphi = 1$ , в продуктах горения  $\varphi = 0$ . Как обычно, считаем, что  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности и  $\rho D$  — произведение плотности на коэффициент диффузии — величины постоянные.

На входе в камеру (в точке  $x = 0$ ) заданы температура  $T = T_0$  и расход горючего. Учитывая наличие градиента концентрации вблизи торца и появление вследствие этого диффузионного потока, запишем последнее условие в виде

$$j\varphi(x=0) - \rho D \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0} = j \quad (2)$$

Соотношение (2) выполняется на практике в более широкой области параметров, нежели условие постоянства концентрации на входе в камеру. Поэтому будем рассматривать задачу лишь с краевым условием типа (2). На бесконечности условия очевидны:  $\varphi = 0$ , а температура стремится к максимальному значению  $T_m$ , которое должно быть определено; производная  $dT/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Существенное упрощение задачи получается [2], если предположить, что

$$\rho D = \frac{\kappa}{c_p} \quad (3)$$

Обычно это равенство выполняется лишь по порядку величины, но для методических целей можно считать его точным.

Умножим второе из уравнений (1) на  $q$  и сложим с первым; в результате получим

$$j c_p \frac{dF}{dx} = \kappa \frac{d^2 F}{dx^2}, \quad F = c_p T + q\varphi$$

Это уравнение легко интегрируется

$$F = C_1 + C_2 \exp \frac{x}{l} \quad \left( l = \frac{\chi}{u}, \quad \chi = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p} \right)$$

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности. Имея в виду условия на бесконечности, найдем

$$C_1 = c_p T_m, \quad C_2 = 0$$

Таким образом, в данном случае профили температуры и концентрации связаны соотношением

$$\varphi = \frac{c_p}{q} (T_m - T) \quad (4)$$

Вместо (2) теперь получим

$$jq - \kappa \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = jc_p (T_m - T_0) \quad (5)$$

Заметим, что справедливость соотношения (5) не зависит от условия (3). Примем, что функция  $f(\varphi, T)$ , характеризующая скорость реакции, имеет вид

$$f(\varphi, T) = \frac{\rho_0 \varphi}{\tau} \exp \left( - \frac{E}{RT} \right) \quad (6)$$

где  $\tau$  — характерное время реакции,  $E$  — энергия активации,  $R$  — газовая постоянная. Первое уравнение системы (1) при помощи (4) и (6) можно представить так:

$$jc_p \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\rho_0 c_p}{\tau} (T_m - T) \exp \left( - \frac{E}{RT} \right) \quad (7)$$

Для приведения задачи к безразмерному виду вводим переменные

$$z = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}, \quad \eta = \frac{x}{L}, \quad L = u\tau \quad (8)$$

В задачу входят следующие безразмерные комбинации:

$$\alpha = \frac{\chi}{\tau u^2}, \quad \beta = \frac{E}{RT_0}, \quad \gamma = \frac{T_m - T_0}{T_0}, \quad \delta = \frac{\tau}{c_p T_0} \quad (9)$$

Уравнение (7) принимает вид

$$\frac{dz}{d\eta} = \alpha \frac{d^2 z}{d\eta^2} + (1 - z) \exp \left( - \frac{\beta}{1 + \gamma z} \right) \quad (10)$$

Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} z = 0, \quad \frac{dz}{d\eta} &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\delta}{\gamma} - 1 \right) \quad \text{при } \eta = 0 \\ z = 1, \quad \frac{dz}{d\eta} &= 0 \quad \text{при } \eta = \infty \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (9) допускает понижение порядка, если величину  $y = dz/d\eta$  рассматривать как функцию от  $z$

$$\alpha \frac{dy}{dz} = 1 - \frac{1 - z}{y} \exp \left( - \frac{\beta}{1 + \gamma z} \right) \quad (12)$$

Интегральная кривая этого уравнения должна пройти через точки

$$z = 0, \quad y = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\delta}{\gamma} - 1 \right), \quad z = 1, \quad y = 0 \quad (13)$$

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  — параметры задачи, а  $\gamma$  играет роль собственного значения, которое находится методом попыток. После определения  $\gamma$  функция  $z(\eta)$  восстанавливается квадратурой

$$\eta = \int_0^z \frac{dz}{y(z)}$$

Уравнение (12) при  $z = 1$ ,  $y = 0$  имеет особую точку типа седла. Выходить из нее нужно по сепаратрисе, которая соответствует уменьшению  $y$  с ростом  $z$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\sqrt{1+4xA}-1}{2x}, \quad A = \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma+1}\right) \quad \text{при } z = 1$$

Вторая сепаратриса, для которой

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{1+4xA}+1}{2x} \quad \text{при } z = 1$$

не имеет физического смысла.

Роль теплопроводности и саморазогрева характеризуется отношением двух слагаемых в правой части уравнения (10)

$$\psi = \frac{\alpha}{1-z} \frac{d^2z}{d\eta^2} \exp\left(\frac{\beta}{1+\gamma z}\right) = \frac{y}{1-z} \exp\left(\frac{\beta}{1+\gamma z}\right) - 1 \quad (14)$$

В режиме индукции для всех значений  $\eta$  должно быть  $|\psi| \ll 1$ .

Уравнение (10) имеет аналитическое решение, если энергия активации мала ( $E \ll RT_0$ ), так что можно положить  $\beta = 0$ . Задача при этом становится линейной. Решение, удовлетворяющее условиям (11), имеет вид

$$z = 1 - e^{-k\eta}, \quad k = \frac{\sqrt{1+4\alpha}-1}{2\alpha}$$

а собственное число

$$\gamma = \frac{2\delta}{\sqrt{1+4\alpha}+1}$$

Величина  $\psi$ , определенная формулой (14), в данном случае не зависит от  $\eta$  и равна

$$\psi = -\alpha k^2 = -\frac{1}{4\alpha} (\sqrt{1+4\alpha}-1)^2 \quad (15)$$

Согласно сказанному выше, режиму индукции соответствует большая скорость подачи:  $u \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ . Формула (15) принимает вид

$$\psi = -\alpha = \frac{\text{const}}{u^2} \rightarrow 0$$

Наоборот, когда  $u \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), получим  $\psi = -1$ .

Рассмотрим предельный случай очень малой теплопроводности (или очень больших скоростей подачи), когда  $\alpha \rightarrow 0$ . В уравнении (10) вторая производная выпадает

$$\frac{dz}{d\eta} = (1-z) \exp\left(-\frac{\beta}{1+\gamma z}\right) \quad (16)$$

Отвод тепла в стенку становится несущественным, поэтому

$$\gamma = \delta \quad (17)$$

Интегрируем (16) с учетом того, что  $\eta = 0$  при  $z = 0$

$$\eta(z) = \int_0^z \exp\left(\frac{\beta}{1+\gamma x} \frac{dx}{1-x}\right) \quad (18)$$

Этот интеграл можно выразить через интегральную экспоненту, которая определяется формулой

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (19)$$

Для  $x > 0$  интеграл понимается в смысле главного значения. Формулу (18) после некоторых преобразований можно привести к виду

$$\eta(z) = \exp \frac{\beta}{\gamma+1} \left\{ \text{Ei} \left( \frac{\beta\gamma}{\gamma+1} \right) - \text{Ei} \left( \frac{\beta\gamma}{\gamma+1} \frac{1-z}{1+\gamma z} \right) \right\} - \left\{ \text{Ei}(\beta) - \text{Ei} \left( \frac{\beta}{1+\gamma z} \right) \right\} \quad (20)$$

При достаточно малых  $z$  согласно (18) получим

$$z = e^{-\beta\eta}$$

Наоборот, при  $z$ , близких к единице, формула (18) дает

$$z = 1 - e^{-A\eta}, \quad A = \exp \left( -\frac{\beta}{\gamma+1} \right)$$

При малых, но отличных от нуля значениях параметра  $\alpha$ , решение уравнения (12) можно искать в виде ряда

$$y(z) = y_0(z) + \alpha y_1(z) + \alpha^2 y_2(z) + \dots \quad (21)$$

Подставляя это разложение в (12), легко находим

$$y_0 = (1-z) \exp \left( -\frac{\beta}{1+\gamma z} \right), \quad y_1 = y_0 \frac{dy_0}{dz}, \quad y_2 = \frac{d}{dz} (y_0 y_1), \dots \quad (22)$$

Отсюда

$$y(z) = y_0(z) \left\{ 1 + \alpha \frac{dy_0}{dz} + \alpha^2 \left[ 2 \left( \frac{dy_0}{dz} \right)^2 + y_0 \frac{d^2 y_0}{dz^2} \right] + \dots \right\} \quad (23)$$

Собственное число  $\gamma$  при этом ищем в виде

$$\gamma = \delta \{ 1 + \lambda \gamma_1 + \lambda^2 \gamma_2 + \dots \}^{-1} \quad (\lambda = \alpha e^{-\beta}) \quad (24)$$

где постоянные  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  подлежат определению. Для вычисления  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  достаточно в формуле (23) сохранить линейный по  $\alpha$  член. Подставив (23) и (24) в первое из условий (11), найдем

$$\gamma = \delta \{ 1 + \alpha e^{-\beta} + (\beta\delta - 1) (\alpha e^{-\beta})^2 + \dots \}^{-1} \quad (25)$$

Подставляя (23) в (14), получим в линейном по  $\alpha$  приближении

$$\psi = \alpha \psi_1(z), \quad \psi_1 = \frac{dy_0}{dz} \quad (26)$$

Функцию  $y_0(z)$  здесь можно вычислять, считая  $\gamma = \delta$ . Роль теплопроводности в поджигании горючей смеси наиболее существенна, когда функция  $\psi$  достигает максимального значения. При помощи (22) и (26) найдем, что при

$$z = z_m = \frac{\beta\delta - 2(1+\delta)}{\delta[\beta + 2(1+\delta)]} \quad (27)$$

Функция  $\psi$  имеет положительный максимум

$$\psi = \psi_m = \alpha \left[ 1 + \frac{4}{\beta} (1+\delta) \right] \exp \left\{ - \left( 2 + \frac{1+\delta}{\beta} \right) \right\} \quad (28)$$

Отметим еще один предельный случай, когда решение можно получить в явном виде.

При очень малых скоростях подачи ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) отвод тепла в стенки возрастает, так что продукты горения имеют температуру, лишь немного превышающую  $T_0$ . Величина  $\gamma$  в этом случае мала. Уравнение (10) вновь становится линейным

$$\frac{dz}{d\eta} = \alpha \frac{d^2z}{d\eta^2} + (1-z)e^{-\beta} \quad (29)$$

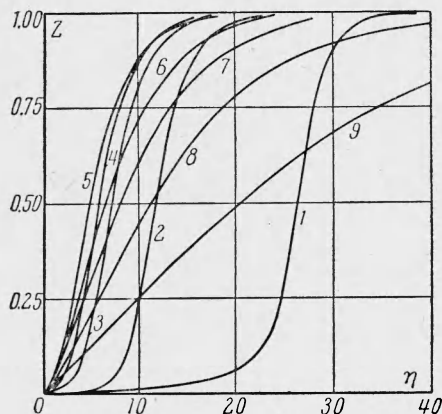
С учетом (11) получим решение в виде (30)

$$z = 1 - e^{-k_1\eta}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{1 + 4\alpha e^{-\beta}} - 1}{2\alpha}$$

Собственное число

$$\gamma = \frac{2\delta}{\sqrt{1 + 4\alpha e^{-\beta}} + 1} \quad (31)$$

Как видно из (31), предположение о малости  $\gamma$  выполняется при достаточно больших  $\alpha$ .

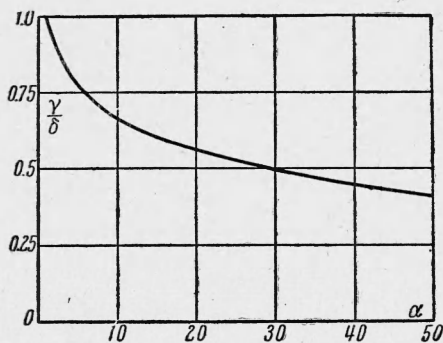


Фиг. 1

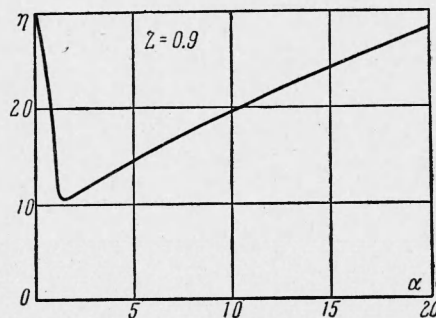
Численное интегрирование уравнения (12) проводилось для ряда значений параметра  $\alpha$  при  $\beta = 7$  и  $\delta = 10$ . Для наиболее характерных случаев графики функции  $z(\eta)$  для различных значений  $\alpha$  даны на фиг. 1, где

кривые	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha =$	0	1.0	1.1	1.25	2.0	6.0	10	20	50

По рассчитанным вариантам зависимость отношения  $\gamma/\delta$  от параметра  $\alpha$  представлена на фиг. 2, на которой кривая  $\gamma/\delta$  в точке  $\alpha=0$ ,  $\gamma/\delta=1$  имеет горизонтальную касательную. На фиг. 3 показано, как зависит от параметра  $\alpha$  отношение  $L_1/L = \eta(z=0.9)$ , где  $L_1$  — расстояние,



Фиг. 2



Фиг. 3

которое должна пройти частица, чтобы температура в ней поднялась от начального значения  $T_0$  до величины  $T_0 + 0.9(T_m - T_0)$ .

Как видно из фиг. 1, а также формулы (28), промежуточный режим горения имеет место, если  $0.2 < \alpha < 1.1$ . Для  $\alpha < 0.2$  согласно (28) будет  $\psi_m < 0.1$ . Таким образом, если при некоторой скорости подачи  $\alpha = 1.1$ , то увеличение скорости подачи в 2.5 раза приведет к тому, что горение будет происходить уже в режиме индукции. Это означает, что режим индукции реализуется довольно часто.

Поступила 19 V 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. хим., 1938, т. 12, стр. 100.
2. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. хим., 1948, т. 22, стр. 27.