РАЗДЕЛ I
ПРОБЛЕМЫ ФИЛОСОФИИ И МЕТОДОЛОГИИ НАУКИ

Part I. THE PROBLEMS OF PHILOSOPHY AND METHODOLOGY OF SCIENCE

DOI: 10.15372/PHE20160601
УДК 164.2+510.22

ПРОБЛЕМА СЕМАНТИЧЕСКОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ И ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ В ТЕОРИЯХ МНОЖЕСТВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ[8]

В. В. Целищев (Новосибирск)

Аннотация. *Цель данной статьи состоит в том, чтобы объяснить трудности в решении ряда проблем теоретико-множественного характера семантической избыточностью языковых средств описания множеств, а именно, в системе Цермело – Френкеля с аксиомой выбора и второпорядковой теории множеств. Описываются два подхода к проблеме на примере континуум-гипотезы, неразрешимой в системе ZFC и разрешимой в альтернативной теории множеств ZFC2. Показывается, что в основе различия интерпретаций лежат дотеоретические концепции, допускающие семантическую избыточность.*

Ключевые слова*: семантическая избыточность, континуум-гипотеза, первопорядковая теория множеств, второпорядковая теория множеств, разрешимость, неформальная строгость.*

THE PROBLEM OF SEMANTIC REDUNDANCY AND CERTAINTY OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS IN AXIOMATIC FIRST AND SECOND ORDER SET THEORIES

V. V. Tselishchev (Novosibirsk)

Abstract. *The purpose of this article is to explain the difficulties in solving some problems the set-theoretic nature by semantic redundancy of language for describing the sets, namely, in the Zermelo-Fraenkel system with the Axiom*

---

[8] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект n. 16-18-10359.

Виталий Валентинович Целищев – доктор философских наук, профессор, директор, Институт философии и права СО РАН.

Vitalij V. Tselishchev – Doctor of Philosophy, Professor, Director, Institute of Philosophy and Law SB RAS.

of Choice and second-order set theory. We describe two approaches to the problem by means of case of the continuum hypothesis, undecidable in ZFC system and decidable in an alternative ZFC2 set theory. It is shown that the basis of difference of interpretations lies in pre-theoretical concepts that allow semantic redundancy.

Keywords: *Semantic redundancy, the continuum hypothesis, first-order set theory, second-order set theory, decidability, informal rigor.*

Проблема семантической избыточности в теории множеств близка в своей постановке утверждению Д. Исааксона, что определенные вопросы, которые возможно сформулировать в языке теория множеств, тем не менее не определены принципами, естественно следующими из успешных попыток охарактеризовать эту структуру [1]. Сходный тезис выдвигает Х. Филд [2]. Этот вопрос тесно связан с сопоставлением выразительных возможностей аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля (с аксиомой выбора – ZFC) с теорией множеств, основанной на логике второго порядка. Точнее, речь идет о противопоставлении возможностей первопорядковой ZFC, в основании которой лежит логика первого порядка (ставшая стандартным представлением концепции множества), и теории, основанной на логике второго порядка (часто обозначаемой как ZFC2). Случай континуум-гипотезы (CH) дает возможность продемонстрировать альтернативные подходы к концепции избыточности языковых средств в представлении математического знания.

При определенных ограничениях такого рода избыточность может рассматриваться как семантическая избыточность, обязанная тому обстоятельству, что даже строгие математические концепции формулируются исходя из неформальных посылок интуитивного математического дискурса. Классическим примером этой ситуации является формализация понятия множества, стоящая в центре дискуссий о природе математического знания. Вопросы о том, имеет ли континуум-гипотеза истинностное значение и (более обще) является ли она вполне определенным утверждением, разделяют математиков и философов математики в зависимости от их взглядов на функции формального представления математического знания. Достаточно репрезентативными являются противоположные мнения упомянутого выше Д. Исааксона и С. Фефермана[9]. Первый отстаивает точку зрения об определенности CH, в то время как второй – о ее полной неопределенности.

Различие между первопорядковой и второпорядковой теориями множеств состоит в том, что в первом случае нельзя дать категорической

[9] *Feferman S.* Is the Continuum Hypothesis a Definite Mathematical Problem. – [Электронный ресурс]. – URL: //http://math.stanford. Edu/~feferman/papers/Conceptual_Structuralism.pdf

характеристики бесконечных структур, в то время как это может быть сделано в языках с квантификацией второго порядка. Категоричность системы понимается как ее свойство, по которому любые две ее модели изоморфны. Следствием категоричности ZFC2 является то, что CH разрешима [3, p. 270]. Но это означает, что требуется найти новые аксиомы. Тогда согласно первопорядковой теории ZFC ее семантика избыточна и позволяет формулировать неразрешимые утверждения.

Различение двух подходов можно продемонстрировать на примере Аксиомы Замещения ZFC. Эта аксиома нужна не только для конструирования все более мощных множеств, но и для установления целого ряда фундаментальных результатов в теории множеств. В первопорядковой системе аксиома формулируется как аксиомная схема, в то время как в ZFC2 она является полноценной аксиомой, и именно с помощью такой версии аксиомы доказывается результат о категоричности системы ZFC2. Предложивший аксиому Э. Цермело полагал, что CH разрешима, то есть всегда имеет истинностное значение, независимо от выбора моделей. Доказательство неразрешимости CH в системе ZFC К. Гёделем и П. Коэном в свете вышеприведенных соображений о разрешимости CH привело к различным заключениям о статусе CH. Так, сам П. Коэн предположил, что CH не является подлинной проблемой, очевидная причина чего – семантическая избыточность наивной теории множеств, в рамках которой и была сформулирована проблема. С другой стороны, Гёдель полагал CH истинной проблемой, а Г. Крайзель считал, что неразрешимость CH в ZFC никак не влияет на то обстоятельство, что CH имеет определенное истинностное значение [4].

Несмотря на предположение, что неразрешимость CH связана с семантической избыточностью, мало кто обращал внимание на детальную аргументацию в пользу этого тезиса. Между тем введенное Дж. Крайзелем понятие «неформальной строгости» имеет к тезису прямое отношение. Обычно строгость понимается как применение формального анализа, имеющего дело с определениями и правилами вывода. Крайзель же настаивает на том, что строгость есть скорее анализ интуитивных соображений, поскольку последние являются значимыми (significant). Это не подразумевает, что значимость подобного рода определяется сразу, скорее она возникает в результате «неформальной строгости». Неформальная строгость заключается в как можно более точном анализе интуитивных понятий и устранении их сомнительных свойств. Таким образом, признается семантическая избыточность изначальных интуитивных понятий и концептуальных схем. Далее Крайзель требует, чтобы эта процедура не оставляла неразрешимыми вопросы, которые могут быть разрешены использованием очевидных свойств интуитивных понятий.

Другими словами, речь идет об устранении семантической избыточности интуитивных теорий, но еще до их формализации. В некотором смысле процедура эта напоминает тезис Куайна «экспликация есть элиминация» [5], поскольку у эксплицируемых понятий отбрасываются свойства, которые нежелательны для результирующей концепции или понятия. В свете этого результаты о неразрешимости не могут считаться описанием «объективного состояния дел». Зачастую сторонники объективации независимости прибегают к аналогии с неевклидовой геометрией. Во многих технических и научно-популярных описаниях результата о независимости CH от ZFC говорится даже о двух теориях множеств (канторовской и неканторовской), одна из которых есть ZFC + утверждение CH, а другая ZFC + отрицание CH, что мыслится как полный аналог с двумя геометрическими системами: евклидовой с аксиомой о непересекающихся параллельных и геометриями Римана и Лобачевского – Бойяи.

Однако эта аналогия разрушается при более тщательном анализе ситуации. Дело в том, что независимость CH от ZFC устанавливается в первопорядковой теории множеств, в то время как в точном аксиоматическом представлении геометрии, как оно представлено у Д. Гильберта в «Основаниях геометрии» [6], использованы аксиомы второго порядка, в частности аксиома непрерывности. Для разрешимости CH в ZFC требуются новые аксиомы, трактующие новые понятия, которые не определены в языке теории множеств. Здесь появляется противоположность семантической избыточности, а именно – семантическая недостаточность, поскольку, по мысли Крайзеля, когда второпорядковая аксиома заменяется на аксиомную схему, оставляются в стороне свойства, которые не определены.

В целом мы имеем следующую схему с применением понятия семантической избыточности. Есть две формы строгости: формальная и неформальная. В «половинчатом» состоянии мы имеем обыденный математический дискурс. Отправляясь от него, можно идти в разных направлениях. Если семантическая избыточность этого дискурса увеличивается, мы переходим к формальной строгости, в которой выпадают полезные свойства объектов, а если семантическая избыточность уменьшается, мы переходим к неформальной строгости, где нежелательные для будущей разрешимости свойства устраняются. Точнее, изменения в семантической избыточности являются производными от двух указанных процессов.

Таким образом, неразрешимость CH является результатом изначальной семантической избыточности интуитивной теории при строгой ее формализации в первопорядковой теории множеств. Если же интуитивная теория подвержена процессу неформальной строгости, CH оказывается разрешимой во второпорядковой теории множеств.

В свете фундаментального результата о неразрешимости CH в ZFC и любопытного факта о принципиальной разрешимости CH в ZFC2 встает вопрос о том, в какой степени второпорядковые теории являются адекватными для формализации теоретико-множественных проблем. Для уточнения этого вопроса рассмотрим упомянутую выше Аксиому Замещения. Содержательно она гласит:

Если *a* есть множество и *F*(x,y) есть вполне определенное множество в системе ZFC, которое ассоциирует с каждым элементом *x* множества *a* единственный элемент *x**, тогда имеется множество *a**, чьи элементы есть как раз те множества *x**, которые ассоциируются формулой *F*(x, y) с элементами *a*.

Второпорядковая версия аксиомы имеет следующий вид [10, p. 54–55]:

$$\forall F\ \forall x(D\ (F) \rightarrow \exists y \forall u\ (u \in y \equiv \exists v\ (v \in x\ \&\ \{v,u\} \in F)),$$

где $D\ (X) =_{Df} \forall u \forall v \forall w\ (\{u,v\} \in X\ \&\ \{u,w\} \in X \rightarrow v = w)$, а $\{v, u\}$ – упорядоченная пара с v и u.

Первопорядковая версия аксиомы имеет следующий вид:

$$\forall x\ (D\ (\varphi) \rightarrow \exists y\ \forall u\ (u \in y \equiv \exists v\ (v \in x\ \&\ \varphi(\ v,u))),$$

где $D(\varphi) = Df\ \forall u \forall v \forall w\ (\varphi\ (u,v)\ \&\ \varphi\ (u,w) \rightarrow v = w)$.

По Крайзелю, очевидность схемы первого порядка видна из очевидности второпорядковой аксиомы [4, p. 49]. Здесь мы встречаемся с парадоксальной ситуацией при сопоставлении выразительных возможностей двух логических формальных языков. С одной стороны, сама концепция кванторного языка второго порядка взывает к идее усложнения квантифицируемых сущностей, и в этом отношении язык второго порядка предполагает язык первого порядка, поскольку во втором квантификация осуществляется над индивидами, а в первом – над свойствами или классами. С другой стороны, как видно из двух приведенных версий Аксиомы Замещения, понимание того, что выражено в языке первого порядка, предполагает понимание этого содержания в языке второго порядка. Решение того, какой язык является более «подходящим» при аксиоматизации теории множеств, оказывается определяющим в решении вопроса о том, имеет ли CH истинностное значение, и, более того, является ли сама CH правильно поставленным вопросом.

Общее сопоставление двух языков логики независимо от статуса CH показывает, что полнота и компактность логики первого порядка делают ее идеальным средством для целей дедукции, то есть теорией логического вывода, в то время как категоричность логики второго порядка является наилучшим средством характеристики математической структуры. При рассмотрении вопроса о том, какая логика предпочтительна для аксиоматической теории множеств, ситуация запутывается тем, что логика второго порядка с квантификацией над классами имитирует саму теорию множеств. В этом смысле второпорядковая логика не является конкурентом логике первого порядка. Как утверждает Куайн, логика второго порядка есть теория множеств «в обличии» логики («волком в овечьей шкуре») [7, с. 119]. Именно здесь наиболее явно выступает вопрос о семантической избыточности, которую Куайн переводит в разговор об онтологической избыточности, приводя в качестве примера таковой создание сущностей в теории множеств, основанной на логике второго порядка. Но в случае противоречивости такой теории, например в системе Фреге с ее знаменитым Принципом Свертывания, именно избыточность языка позволяла формулировать этот принцип.

Однако аргументы против использования языка второго порядка для аксиоматической теории множеств наталкиваются на возражения, связанные с тем, что само понятие множества является сущностью второго порядка. Независимость CH от ZFC, установленная для первопорядковой теории множеств, используется в качестве аргумента в пользу наличия двух теорий множеств по аналогии с неевклидовой геометрией. Аналогия не проходит, потому что, как было указано выше, пятый постулат в геометрии является второпорядковым. Поэтому вполне естественно утверждать, что существует лишь одна теория множеств, естественным следствием чего является обоснованность использования второпорядковой логики, в которой CH разрешима.

Любопытной особенностью использования второпорядковой Аксиомы Замещения является ее полное согласие с кумулятивной иерархией множеств. Здесь мы еще раз встречаемся с избыточностью, заложенной в самой аксиоме. Дело в том, что при этом аксиома не ограничивает расширение иерархии, и именно это обстоятельство позволяет говорить о бесконечной расширяемости понятия множества [1]. Таким образом, именно второпорядковая версия теории множеств подтверждает факт, известный из других соображений, что причина избыточности лежит в самом понятии множества. CH является «оселком» при обсуждении преимуществ двух конкурирующих аксиоматических систем теории множеств. Факт ее независимости от ZFC порождает уверенность в правоте первопорядковой теории, в то время как ее разрешимость во второпорядковой теории говорит об обоснованности использования последней в качестве оснований математики.

Действительно, CH в своей постановке зависит в высшей степени от неясного понятия произвольного множества. Как следствие, сама CH является неопределенной, причиной чего выступает семантическая избыточность понятия множества. Поскольку понятие множества может быть охарактеризовано аксиомами, возникает вопрос о проявлении избыточности в аксиомах. Можно настаивать на абсолютной неразрешимости CH в любой аксиоматической системе, как это делает Кельнер [8]. Однако на уровне «здравого» математического смысла CH имеет смысл на языке теории множеств, поэтому можно было бы ожидать и ее разрешимости. Приведенные выше математические аргументы относительно преимуществ и недостатков языков первого и второго порядков в решении вопроса об определенности CH не являются достаточными для разрешения спора. Семантическая избыточность понятия множества зиждется на глубоких философских предпосылках относительно природы математической истины. Для того чтобы решить, является ли CH истинной, ложной или неопределенной в истинностном значении, требуется принятие определенного философского каркаса. При такой постановке вопроса статус CH может оказаться внешним или внутренним вопросом в смысле Карнапа [9].

При обсуждении выше некоторое предпочтение было отдано мнению об определенности CH из-за ее разрешимости в ZFC2, которая характеризует математическую структуру. Между тем общий взгляд на математические теории как структуры принимает более оформленный вид в математическом структурализме. Существует достаточно много вариантов математического структурализма, к числу провозвестников которого обычно относят Р. Дедекинда [10], Н. Бурбаки и до некоторой степени Д. Гильберта и А. Пуанкаре. Современные версии структурализма представлены работами Ч. Парсонса, С. Шапиро, М. Резника, П. Бенацеррафа, Г. Хеллмана [11–15]. Доктрины структурализма в существенной степени выступают в качестве альтернативы современным течениям философии математики, но в применении к проблемам определенности CH и выбора лучшей логики для этой гипотезы следует обратить внимание на так называемый концептуальный структурализм, особенно противостоящий платонизму в утверждении того, что источник математической мысли находится в человеческих концепциях. С. Феферман представил десять тезисов в защиту концептуального структурализма, цель которых состоит в демонстрации того, что CH не является четко определенной проблемой[10].

---

[10] *Feferman S.* Is the Continuum Hypothesis a Definite Mathematical Problem. – [Электронный ресурс]. – URL: // http://math.stanford. Edu/~feferman/papers/Conceptual_Structuralism.pdf

1. Основные объекты математической мысли существуют только как ментальные концепции, хотя источник этих концепций лежит в повседневном опыте самого различного толка, в процессе счета, упорядочении, соответствии, разделении, локализации в пространстве и времени.

2. Теоретическая математика в качестве своих источников имеет осмысление того, что эти процессы независимы от материалов или объектов, к которым они применимы, и что они потенциально бесконечно повторяемы.

3. Основные концепции математики – своего рода идеальные картины внешнего мира (world-picture), которые являются, в свою очередь, не изолированными объектами, а структурами, то есть непротиворечиво воспринимаемыми объектами, связанными друг с другом небольшим числом простых отношений и операций. Они передаются и понимаются до любой аксиоматики и на самом деле до любого логического развития.

4. Некоторые значимые черты этих структур извлекаются прямо из отображений, которые описываются структурами, а другие черты менее определены. Математика нуждается в малом для того, чтобы возникнуть, но, раз возникнув, проходит долгий путь.

5. Основные концепции различаются в степени ясности. Можно говорить о том, что истинно в данной концепции, но это понятие истины частично. Полная истина применима только к совершенно ясным концепциям.

6. Ясность концепции зависит от времени как для индивидов, так и исторически.

7. Чистая (теоретическая) математика есть мысленный каркас, развиваемый систематически последовательным рафинированием и рефлексивным расширением основных структурных концепций.

8. Общие идеи порядка, следующего элемента, совокупности, отношения, правила и операции являются дотеоретическими; для понимания математики необходимо понимание этих дотеоретических элементов мышления.

9. Общая идея свойства является дологической. Для понимания математики необходимо понимание понятия свойства и логических частиц. Математическое мышление является в принципе логическим, но на практике полагается в значительной степени на различные формы интуиции для понимания и убеждения.

10. Объективность математики заключается в ее стабильности и непротиворечивости в практике коммуникации, критического осмысления и распространения на многих индивидов, часто работающих независимо друг от друга. Противоречивые концепции, которые не выдерживают критического рассмотрения, постепенно удаляются из математики.

Объективность математики есть специальный случай межсубъективной объективности, которая вездесуща в социальной реальности.

Этот довольно сумбурный перечень утверждений о природе математики несколько наивный, как это часто бывает во взглядах людей, не обращающих внимания на философские тонкости, тем не менее позволяет видеть, каким образом семантическая избыточность встроена в математические структуры. Так, указание в п. 8 на дотеоретический характер математических концепций позволяет говорить о формировании на этом этапе многих «лишних» вопросов о математических концепциях. В п. 9 содержится важнейшее утверждение о дологическом характере идеи свойства. В некотором смысле это может считаться объяснением возникновения парадоксов расселовского типа, поскольку Аксиома Свертывания [16] у Фреге использует понятие свойства (неясного, по Феферману) в качестве определения множества. Как следствие, исходное понятие множества оказывается неясным, и уж тем более понятно, что некоторые вопросы об объектах теории множества могут оказаться псевдовопросами. К таким вопросам Феферман относит CH.

В частности, Феферман указывает, что существует концептуальная неясность относительно трех составляющих концепции континуума, а именно: самого континуума, подмножеств континуума, отображения между этими подмножествами. Оставляя в стороне математические тонкости по поводу двух последних концепций, остановимся на неопределенности концепции самого континуума. Феферман выделяет шесть концепций континуума [17].

1. Евклидов континуум, примером которого является прямая, «заполненная» точками, но при этом линия не состоит из множества таких точек. Идея произвольного подмножества точек на прямой или изъятие некоторых точек чужда евклидовой геометрии.

2. Гильбертовский континуум непрерывности в теоретико-множественной трактовке в духе Дедекинда.

3. Прямая из действительных чисел, определяемых как сечения Дедекинда.

4. Прямая Коши – Кантора, непрерывность для которой определяется условием сходимости Коши, используемым Кантором для «конструирования» действительных чисел.

5. Множество 2^N, то есть множество бесконечных последовательностей нулей и единиц или всех путей бинарного дерева.

6. Множество всех подмножеств множества натуральных чисел N, а именно S(N).

При обычной трактовке CH концепции со второй по шестую сливаются в одну за счет отождествления последовательностей с множествами и рассмотрения только кардинальных чисел различных континуумов. Однако с концептуальной точки зрения имеется глубокое различие между 2^N и S(N), что подрывает использование одного и того же термина для двух разных процедур получения бесконечных последовательностей (2^N) и получения множества всех подмножеств через произвольную подстановку единицы с выбором для остальных мест в последовательности нулей. Общим для всех этих операций является понятие произвольного множества, которое концептуально является семантически избыточным, поскольку оно формулируется дотеоретическим образом. Аргументация Фефермана о неопределенном характере CH заключается в том, что идея разрешимости CH в ZFC2 требует квантификации над множествами, то есть использования этого самого понятия произвольного множества. Точнее, он считает дефектным обращение к ZFC2 из-за ее категоричности для демонстрации определенности CH, поскольку такая аргументация включает порочный круг. Попытка добиться определенности средствами ZFC2 ведет к предположению определенности тех понятий, определенность которых еще надо установить.

Таким образом, имеется два противоположных взгляда на определенность континуум-гипотезы, общим основанием для которых, тем не менее, является предположение об избыточности языка при формировании базисных понятий и утверждений формализованной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacson D.** The Reality of Mathematics and the Case of Set Theory // Truth, Reference and Realism / eds. Z. Novak, A. Simonyi. – Budapest: Central European University Press, 2011. – P. 1–75.
2. **Field H.** Which Undecidable Mathematical Sentences have Determinate Truth Values // Truth in Mathematics / eds. H.G. Dales, G. Olivery. – Oxford: Clarendon Press, 1998. – P. 291–310.
3. **Potter M.** Set Theory and its Philosophy. – Oxford: Oxford University Press, 2004.
4. **Kreisel G.** Informal Rigour and Completeness Proofs // Problems in the Philosophy of Mathematics: Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965, vol. 1 / ed. Lakatos I. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1967. – P. 138–171.
5. **Quine W. V. O.** Ontological Relativity // Ontological Relativity and Other Essays. – N. Y.: Columbia University Press, 1969. – P. 26–68.
6. **Гильберт Д.** Основания геометрии. – М.: Физматгиз, 1948.
7. **Куайн У. В. О.** Философия логики. – М.: Канон+, 2008.
8. **Koelner P.** On the Question of Absolute Undecidability // Kurt Godel. Essays for his Centennial. Lecture Notes in Logic n. 33, Association for Symbolic Logic. / eds. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – P. 189–225.
9. **Карнап Р.** Эмпиризм, семантика, онтология // Карнап Р. Значение и необходимость. – М., 1959. – P. 298–320.
10. **Reck E.** Dedekind's Structuralism: an Interpretation and Partial Defence // Synthese. – 2003. – Vol. 137. –. P. 369–419.

11. **Parsons C.** The Strucuralist View of Mathematical Objects // Synthese. – 1990. – Vol. 84. – P. 303–346.
12. **Shapiro S.** Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. – N.Y.: Oxford University Press, 1997.
13. **Resnik M.** Mathematics as a Science of Patterns. – Oxford: Oxford University Press, 1997.
14. **Benacerraf P.** What Numbers Could not Be // Philosophy of Mathematics. Selected Readings / eds. P. Benacerraf, H. Putnam. – Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – P. 272–294.
15. **Hellman G.** Structuralism // Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic / ed. S. Shapiro. – Oxford: Oxford University Press, 2005. – P. 536–562.
16. **Boolos G., Heck R.** Die Grundlagen der Arithmetic, № 82–83 // The Philosophy of Mathematics Today / ed. M. Schirn. – N.Y.: Clarendon Press, 1998. – P. 407–428.
17. **Feferman S.** Conceptions of the Continuum // Intellectica. – 2009. – Vol. 51. – P. 169–189.

REFERENCES

1. **Isaacson D.** (2011). The Reality of Mathematics and the Case of Set Theory. *Truth, Reference and Realism*. Eds. Z. Novak, A. Simonyi. Budapest: Central European University Press Publ., pp. 1–75.
2. **Field H.** (1998). Which Undecidable Mathematical Sentences have Determinate Truth Values. *Truth in Mathematics*. Ed. H. G. Dales, G. Olivery. Oxford: Clarendon Press Publ., pp. 291–310.
3. **Potter M.** (2004). Set Theory and its Philosophy. Oxford: Oxford University Press Publ.
4. **Kreisel G.** (1965). Informal Rigour and Completeness Proofs. *Problems in the Philosophy of Mathematics*: Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965, vol. 1. Ed. Lakatos I. Amsterdam: North-Holland Publishing Co Publ., pp. 138–171.
5. **Quine W. V. O.** (1969). Ontological Relativity. *Ontological Relativity and Other Essays p*. N.Y.: Columbia University Press Publ., pp. 26–68.
6. **Hilbert D.** *Foundations of geometry*. Moscow: Fizmatgiz, 1948. (In Russian)
7. **Quaine W. V. O.** *Philosophy of logics*. Moscow: Kanon, 2008. (In Russian)
8. **Koelner P.** (2010). On the Question of Absolute Undecidability. Kurt Godel. *Essays for his Centennial*. Lecture Notes in Logic n. 33, Association for Symbolic Logic. Ed. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 189–225.
9. **Carnap R.** Empiricism, semantics and ontology. Carnap R. *Meaning and necessity*. Moscow, 1959, pp. 298–320. (In Russian)
10. **Reck E.** (2003). Dedekind's Structuralism: an Interpretation and Partial Defence. *Synthese*, vol. 137, pp. 369–419.
11. **Parsons C.** (1990). The Strucuralist View of Mathematical Objects. *Synthese*, vol. 84, pp. 303–346.
12. **Shapiro S.** (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. N.Y.: Oxford University Press Publ.
13. **Resnik M.** (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
14. **Benacerraf P.** (1983). What Numbers Could not Be. *Philosophy of Mathematics*. Selected Readings. Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. Cambridge: Cambridge University Press Publ., pp. 272–294.
15. **Hellman G.** (2005). Structuralism. *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Ed. S. Shapiro. Oxford: Oxford University Press Publ., pp. 536–562.
16. **Boolos G., Heck R.** (1998). Die Grundlagen der Arithmetic, № 82–83. *The Philosophy of Mathematics Today.* Ed. M. Schirn. N.Y.: Clarendon Press Publ., pp. 407–428.
17. **Feferman S.** (2009). Conceptions of the Continuum. *Intellectica,* vol. 51, pp. 169–189.

Принята редакцией: 12.11.2016