

О НАГРЕВЕ СРЕДЫ ВСЛЕДСТВИЕ ДЖОУЛЕВОЙ
ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

А. Б. Ватажин

(Москва)

Известно, что при наличии магнитного поля и протекании по газу электрических токов в векторе плотности потока тепла появляются дополнительные, по сравнению с обычной теплопроводностью, члены. Если газ достаточно плотный, а магнитное поле не чрезмерно велико, то анизотропией, обусловленной магнитным полем, можно пренебречь. Однако при достаточно сильном электрическом токе в векторе плотности потока тепла остается член, пропорциональный температуре и вектору плотности тока. Этим эффектом, например, объясняется асимметрия тепловых потоков в электроды электромагнитного ускорителя непрерывного действия [1].

Это положение рассмотрим на примере полностью ионизированного квазинейтрального газа с одинаковыми электронной и ионной температурами.

Пусть плотность электрического тока j , протекающего по газу, имеет порядок 10 а / см^2 , а внешнее магнитное поле равно нулю. Из уравнений Максвелла находим, что величина напряженности магнитного поля H имеет порядок $4\pi c^{-1}jl$, где l — характерный линейный размер изменения поля, c — скорость света в вакууме. Принимая $l \sim 10 \text{ см}$, находим

$$\omega_e \tau_e \approx \frac{0.77}{\lambda / 10} \frac{10^{14} T_e^{3/2}}{n_e} \quad \left(\tau_e = \frac{3.5 \cdot 10^4 T_e^{3/2}}{n_e \lambda / 10}, \quad \omega_e = \frac{eH}{m_e c} \right)$$

Здесь λ — кулоновский логарифм, T_e — температура в эв, e и m_e — соответственно заряд и масса электрона, n_e — плотность электронов, τ_e — время рассеяния электронов на ионах. Так как $(0.1 \lambda) \sim 1$, то при $T_e \sim 1$ и $n_e \gtrsim 10^{16}$ параметр $\omega_e \tau_e \ll 1$. Это позволяет записать вектор плотности потока тепла в виде [2]

$$\mathbf{q} = -3.21 e^{-1} K T \mathbf{j} - 3.16 K^2 T \tau_e n_e m_e^{-1} \nabla T$$

Здесь T — температура в градусах, K — постоянная Больцмана. При $j \sim 10 \text{ а / см}^2$ отношение $2a$ первого члена ко второму имеет порядок

$$2a \sim 1.2 (\lambda / 10) (10^4 / |\nabla T|) T_e^{-3/2}$$

В этой оценке ∇T имеет размерность град / см. При $T_e \sim 1$ и $|\nabla T| \sim 10^4$ параметр $2a$ имеет порядок единицы. При бóльших плотностях тока величина этого параметра возрастает.

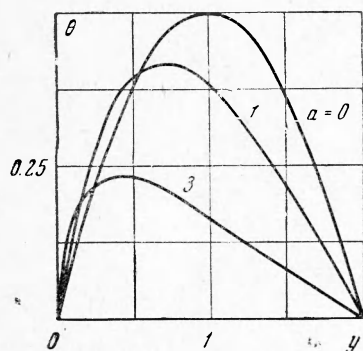
Для того чтобы изучить эффекты, обусловленные наличием в векторе плотности потока тепла члена, пропорционального \mathbf{j} , в настоящей работе рассматривается задача о нагреве среды за счет протекания тока, вектор \mathbf{q} в которой имеет вид

$$\mathbf{q} = -k \nabla T - b \mathbf{j} T \quad (b = \text{const}) \quad (1)$$

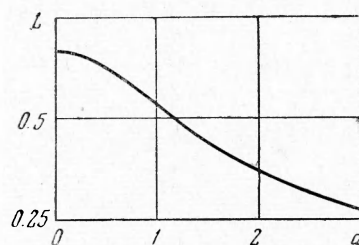
где k — коэффициент теплопроводности. Обсуждаются возможности использования полученного решения для оценки величины силы трения и интенсивности теплообмена при течении среды в электромагнитных ускорителях плазмы.

Рассмотрим плоский канал $0 < Y < 2h$ со стенками -- электродами, заполненный неподвижной проводящей средой, имеющей в момент $t = 0$ температуру $T_i = \text{const}$. Пусть среда нагревается за счет протекания в направлении Y электрического тока, плотность которого поддерживается постоянной. Джоулеву диссипацию в единице объема за единицу времени обозначим как $w = w(t)$. Будем считать, что стенки канала в процессе нагрева поддерживаются при постоянной температуре T_w . При постоянных k , плотности среды ρ и теплоемкости c_p в случае, когда вектор \mathbf{q}

при постоянной температуре T_w . При постоянных k , плотности среды ρ и теплоемкости c_p в случае, когда вектор \mathbf{q}



Фиг. 1



Фиг. 2

выражается формулой (1), уравнение теплопроводности в безразмерных величинах принимает вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v, \quad \vartheta(0, y) = \vartheta_i \quad \text{при } 0 < y < 2$$

$$\vartheta(\tau, 0) = 0, \quad \vartheta(\tau, 2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\vartheta = \frac{T - T_w}{T_w}, \quad Y = hy, \quad t = \frac{h^2 \rho c_p \tau}{k}, \quad 2a = \frac{bjh}{k}, \quad v = \frac{wh^2}{kT_w} \right)$$

Тепловые потоки G_+ и G_- , отводимые через единицу поверхности нижнего и верхнего электродов за время t , равны

$$G_+ = - \int_0^t q_y(t, 0) dt = \rho c_p h T_w g_+, \quad G_- = \int_0^t q_y(t, 2h) dt = \rho c_p h T_w g_- \quad (3)$$

$$g_+ = 2a\tau + \int_0^\tau \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} d\tau, \quad g_- = -2a\tau - \int_0^\tau \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=2} d\tau$$

Здесь q_y -- проекция вектора \mathbf{q} на ось Y .

Интегрируя уравнение (2) по y от $y = 0$ до $y = 2$ и по времени, получим интегральное уравнение теплового баланса

$$2\vartheta_i + 2 \int_0^\tau v d\tau = g_+ + g_- + \int_0^2 \vartheta dy \quad (4)$$

Если $v \rightarrow \text{const}$ при $\tau \rightarrow \infty$, то при $\tau \rightarrow \infty$ устанавливается стационарный режим, распределение температур в котором имеет вид

$$\vartheta(y) = \frac{\vartheta(\infty, y)}{v} = \frac{1}{a} \left[\frac{1 - \exp(-2ay)}{1 - \exp(-4a)} - \frac{y}{2} \right] \quad (5)$$

$$L(a) = \frac{1}{v} \int_0^2 \vartheta(\infty, y) dy = \frac{2a - \text{th } 2a}{2a^2 \text{th } 2a}$$

Графики функций $\vartheta(y)$ и $L(a)$ приведены на фиг. 1 и 2. Решение (5) показывает, что с ростом параметра a уровень температур в стационар-

ном режиме и количество тепла, которое приобретает среда в процессе выхода на стационарный режим, убывает. Профили температуры несимметричны относительно оси канала $y = 1$; максимумы температуры смещаются в сторону анода.

Решение уравнения (2) ищем при помощи преобразования Лапласа

$$\vartheta^\circ(p, y) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) \vartheta(\tau, y) d\tau$$

В изображениях уравнение (2) и его решение имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta^{\circ\prime\prime} + 2a\vartheta^{\circ\prime} - p\vartheta^\circ &= -Mp, & \vartheta^\circ(0) &= 0, & \vartheta^\circ(2) &= 0 \\ \vartheta^\circ &= M(\operatorname{sh} 2\kappa)^{-1} \{ \operatorname{sh} 2\kappa - e^{\alpha(2-y)} \operatorname{sh} \kappa y - e^{-\alpha y} \operatorname{sh} [\kappa(2-y)] \} \\ M = M(p) &= p^{-1}(\vartheta_i + v_c V^\circ), & \kappa &= \sqrt{p+a^2}, & V^\circ &= \int_0^\infty \exp(-p\tau) V(\tau) d\tau \\ & & (v &= v_c V, & v_c &= \text{const}) \end{aligned} \quad (6)$$

Для функции $\kappa(p)$ в плоскости p с разрезом по отрицательной оси от $p = -a^2$ до бесконечно удаленной точки выбрана ветвь, которая положительна при действительных $p > -a^2$. Так как $|\exp(-4\kappa)| < 1$ при $\operatorname{Re} p > 0$, функцию $(\operatorname{sh} 2\kappa)^{-1}$ можно разложить в ряд

$$(\operatorname{sh} 2\kappa)^{-1} = 2 \exp(-2\kappa) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-4k\kappa) \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

Обозначим посредством $r(t; \beta, \alpha)$ и $\mu(t; \beta, \alpha)$ оригиналы изображений

$$r^\circ = p^{-1} \exp[-\sqrt{\alpha(p+\beta)}], \quad \mu^\circ = p^{-1} V^\circ \exp[-\sqrt{\alpha(p+\beta)}] \quad (\alpha, \beta = \text{const})$$

Тогда, заменив $(\operatorname{sh} 2\kappa)^{-1}$ в выражении (6) указанным выше рядом, для функции $\vartheta(\tau, y)$ можно получить выражение

$$\vartheta(\tau, y) = \vartheta_i + \int_0^\tau v d\tau + \vartheta_i \Gamma[r] + v_c \Gamma[\mu] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma[\Lambda] &= e^{-\alpha y} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k-y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+y)^2] \right\} + \\ &+ e^{\alpha(2-y)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+2+y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda[\tau; a^2, (4k+2-y)^2] \right\} \end{aligned}$$

Можно найти [3]

$$r(\tau; \beta, \alpha) = 0.5 [\zeta(\tau; \beta, \alpha) + \delta(\tau; \beta, \alpha)] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \exp(-\sqrt{\alpha\beta}) \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau} - \sqrt{\beta\tau}), \quad \delta = \exp\sqrt{\alpha\beta} \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau} + \sqrt{\beta\tau}) \\ &\left(\operatorname{Erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx \right) \end{aligned}$$

Если $v = \text{const}$, то

$$\mu(\tau; \beta, \alpha) = 0.5\tau(\zeta + \delta) - \frac{\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{\beta}}(\zeta - \delta) \quad (9)$$

В дальнейшем все формулы будут приведены для случая $v = \text{const}$

При $a = 0$ имеем

$$\Gamma(\Lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Lambda[\tau; 0, (2k-y)^2] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Lambda[\tau; 0, (2k+y)^2]$$

$$\mu(\tau; 0, \alpha) = (\tau + 0.5\alpha) \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau}) - \pi^{-1/2} \sqrt{\alpha\tau} \exp(-\alpha/4\tau) \quad (10)$$

$$r(\tau; 0, \alpha) = \operatorname{Erf}(0.5\sqrt{\alpha/\tau})$$

Тепловые потоки g_+ и g_- , определенные при помощи (3), (7) — (9), и суммарный тепловой поток $Q = g_+ + g_-$ равны

$$g_+ = 2a\tau + N(\tau), \quad g_- = N(\tau) - 2a\tau - \vartheta_i A - vB \quad (11)$$

$$N(\tau) = a\tau\vartheta_i + 0.5av\tau^2 + \vartheta_i[\psi_0 + 2E - 2F \exp 2a] + v[v_0 + 2S - 2U \exp 2a]$$

$$E = \sum_{k=2,4,6,\dots} \psi_k, \quad F = \sum_{k=1,3,5,\dots} \psi_k, \quad S = \sum_{k=2,4,6,\dots} v_k, \quad U = \sum_{k=1,3,5,\dots} v_k$$

$$\psi_k = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau} - a^2\tau\right) - 0.5k(\zeta + \delta) + \frac{1 + 2a^2\tau}{4a}(\zeta - \delta)$$

$$v_k = \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}} \left(\tau + \frac{1}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{k^2}{\tau} - a^2\tau\right) - 0.5k\left(\tau + \frac{1}{4a^2}\right)(\zeta + \delta) + \frac{1}{8a} \left(2a^2\tau^2 + 2\tau + 2k^2 - \frac{1}{2a^2}\right)(\zeta - \delta)$$

$$\zeta = \zeta(\tau; a^2, 4k^2), \quad \delta = \delta(\tau; a^2, 4k^2), \quad A = 2a\tau - 4F \operatorname{sh} 2a, \quad B = a\tau^2 - 4U \operatorname{sh} 2a$$

$$Q = 2\vartheta_i Q^* + 2vQ^{**}, \quad Q^* = \psi_0 + 2E - 2F \operatorname{ch} 2a, \quad Q^{**} = v_0 + 2S - 2U \operatorname{ch} 2a \quad (12)$$

При $a = 0$ имеем

$$g_+ = g_- = g, \quad g = \vartheta_i \left(\psi_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k\right) + v \left(v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k v_k\right)$$

$$\psi_k = \psi_k^{\circ} = 2\sqrt{\tau/\pi} \exp(-k^2/\tau) - 2k \operatorname{Erf}(k/\sqrt{\tau}) \quad (13)$$

$$v_k = v_k^{\circ} = \frac{4\sqrt{\tau}}{3\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau}\right) (\tau + k^2) - \operatorname{Erf}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\right) \left(2k\tau + \frac{4k^3}{3}\right)$$

Если в случае $a = 0$ искать оригиналы при помощи второй теоремы разложения [4], то для величины g получим выражение

$$g = \vartheta_i - \frac{8\vartheta_i}{\pi^2} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\exp[-1/4\pi^2\tau(2\rho+1)^2]}{(2\rho+1)^2} + v \left(\tau - \frac{1}{3}\right) + \frac{32v}{\pi^4} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\exp[-1/4\pi^2\tau(2\rho+1)^2]}{(2\rho+1)^4} \quad (14)$$

Выражение (13) удобно использовать при малых τ , выражение (14) — при больших τ . При малых a функции ψ_k и v_k представляются в виде

$$\psi_k = \psi_k^{\circ} + a^3 \left[\frac{2\sqrt{\tau}}{3\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{\tau}\right) (\tau + 4k^2) - 2k \operatorname{Erf}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}\right) \left(\tau + \frac{4k^2}{3}\right) \right] + O(a^4)$$

$$v_k = v_k^{\circ} + a^2 \left\{ -2k \operatorname{Erf}(k/\sqrt{\tau}) \left(\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{4}{3}k^2\tau + \frac{2}{5}k^4\right) + \exp(-k^2/\tau) \left(\frac{4}{5}k^4 + \frac{34}{15}k^2\tau + \frac{4}{15}\tau^2\right) \right\} + O(a^4) \quad (15)$$

При малых τ , пренебрегая членами порядка $\exp(-1/\tau)$, имеем

$$Q \approx 2\vartheta_i\psi_0 + 2v\nu_0 = 2\vartheta_i \left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp(-a^2\tau) + \frac{1+2a^2\tau}{2a} \operatorname{erf}(a\sqrt{\tau}) \right] +$$

$$+ 2v \left[\frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}} \left(\tau + \frac{1}{2a^2} \right) \exp(-a^2\tau) + \frac{1}{4a} \left(2a^2\tau^2 + 2\tau - \frac{1}{2a^2} \right) \operatorname{erf}(a\sqrt{\tau}) \right] \quad (16)$$

($\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{Erf} x$)

При малых τ и a , используя (15) и (16), находим

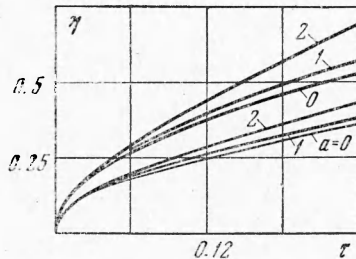
$$Q \approx \frac{4\vartheta_i \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{a^2\tau}{3} \right) + \frac{8v\tau \sqrt{\tau}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{a^2\tau}{5} \right) \quad (17)$$

Эффективность теплоотвода в стенке характеризуется величиной

$$\eta \approx \frac{Q}{2v\tau + 2\vartheta_i} \quad (18)$$

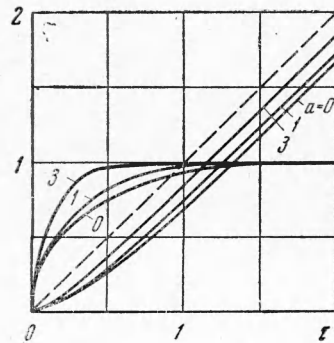
представляющей собой отношение тепловой энергии, отводимой через стенку за время τ , к сумме подведенной за это время энергии и тепловой энергии, которой обладала среда при $\tau = 0$. Функция $\eta(\tau)$ зависит от двух параметров: a и $s = \vartheta_i/v$. При $\tau \rightarrow \infty$ имеем $(dQ/d\tau) \approx 2v$ и $\eta \rightarrow 1$. Однако, как показывают расчеты, $(dQ/d\tau) \approx 2v$ уже при $\tau > \tau_*$, где $\tau_* \sim 1$. Величина τ_* является временем, в течение которого устанавливается стационарный режим. За это время среда теряет количество тепла $2\vartheta_i$ и приобретает количество тепла $vL(a)$, равное разности между подведенным теплом $2v\tau_*$ и отведенным через стенку $2vQ^{**}(\tau_*)$.

Результаты расчетов по формулам (12)–(18) представлены на фиг. 3–5. При малых τ поведение величины η показано на фиг. 3. Для трех нижних кривых $s = 0$, для трех верхних $s = 2$. С ростом параметров a и s эффективность теплоотвода увеличивается.

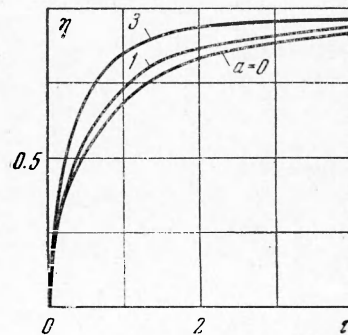


Фиг. 2

На фиг. 4 серия кривых, имеющих асимптоту $\varphi(\tau) = 1$, представляют собой зависимости $Q^*(\tau)$. Три кривые, которые при $\tau \rightarrow \infty$ делаются параллельными биссектрисе $\varphi(\tau) = \tau$, являются графиками функции $Q^{**}(\tau)$. Для каждой кривой из первой серии можно указать $\tau = \tau_*(\varepsilon)$, начиная с которого разность между ординатами точек кривой и единицей становится меньше $\varepsilon = 0(1)$; для каждой кривой из второй серии можно указать $\tau = \tau_*(\varepsilon)$, начиная с которого разность между углом наклона кривой к оси τ и углом 45° меньше ε . Согласно фиг. 4, время τ_* выхода на стационарный режим с ростом a уменьшается.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 представлена зависимость $\eta(\tau)$ при $\vartheta_i = 0$ и различных значениях a . Увеличение этого параметра приводит к возрастанию эффективности теплоотвода.

