ПМТФ, № 4, 1960

ОБТЕКАНИЕ ЗАОСТРЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА ПРИ МАЛОМ УГЛЕ АТАКИ

С. С. Григорян, У Ван И

(Москва, Пекин)

Особенности течения газа при обтекании тела с очень большими скоростями позволяют развить приближенный аналитический метод расчета таких течений. При помощи этого метода, предложенного Г. Г. Черным, был решен ряд задач указанного типа [1]. Решенные задачи соответствуют случаю обтекания без угла атаки. А. Л. Гонором [2] была решена методом Г. Г. Черного задача обтекания конуса при наличии угла атаки. В данном случае существенное упрощение трехмерной задачи связано с коническим характером течения. Для общего случая трехмерного течения вокруг осесимметричного тела, обтекаемого под конечным углом атаки, возникающая при использовании метода Г. Г. Черного математическая задача остается весьма сложной. Однако, если угол атаки мал, то возможна линеаризация задачи по углу атаки, и соответствующая линейная задача допускает сравнительно простое решение. В предлагаемой работе даются формулировка этой линейной задачи и ее решение.

1. Пусть заостренное осесимметричное тело произвольной (в определенных пределах) формы обтекается под малым углом атаки α однородным потоком идеального, нетеплопроводного, совершенного газа с весьма большой скоростью. При нулевом угле атаки течение газа вокруг тела будет осесимметричным, отходящая от острия тела ударная волна также будет осесимметричной. Приближенное решение для этого случая известно [1]. Представив решение задачи при малом α в виде суммы решения при $\alpha = 0$ и малого добавка, подставив его в систему уравнений газовой динамики и отбросив в получающихся соотношениях все члены, содержащие малые добавки нелинейно, получим линейную систему уравнений с переменными известными коэффициентами.

Приняв далее,что ударная волна при малом $\alpha \neq 0$ также будет мало уклоняться от ударной волны при $\alpha = 0$, и произведя аналогичную процедуру линеаризации в условиях на ударной волне, получим соответствующие линейные граничные условия, удовлетворяющиеся на невозмущенной (известной) поверхности ударной волны. Наконец, ввиду линейности условия обтекания тела из этого условия непосредственно получим линейное граничное условие задачи, которое должно выполняться на известной поверхности тела. Для того чтобы вывести соотношения, формулирующие описанную линейную задачу в наиболее удобном виде, выберем специальную систему криволинейных координат. Именно, будем координату x отсчитывать вдоль меридиана обтекаемого тела, y — по внешней нормали к меридиану, а третьей координатой будем считать долготу θ. В этой системе координат уравнения газовой динамики (стационарная задача) имеют вид

$$\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R}{R+y}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}uw + \frac{vw}{r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)+\frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho vr\left(1+\frac{y}{R}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\rho w\left(1+\frac{y}{R}\right)\right]=0$$

где u, v, w — составляющие скорости по осям координат, p, ρ — давление и плотность, $R=R(x)$ — радиус кривизны меридиана, $r=r^\circ+ y\cos\varphi$ — расстояние рассматриваемой точки от оси тела, причем $r^\circ=r^\circ(x)$ — это расстояние для точек поверхности тела, а φ — угол наклона элемента меридиана к оси тела. Очевидно, имеют место формулы

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{dr^\circ}{dx}-y\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx}=\sin\varphi\left(1+\frac{y}{R}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\cos\varphi \tag{1.2}$$

Выпишем граничные условия. На поверхности тела выполняется условие обтекания

$$v(x,0,\theta)=0 \tag{1.3}$$

На ударной волне, уравнение которой (неизвестное) возьмем в виде $y=y^*(x,\theta)$, выполняются условия

$$u=V_x-\frac{2}{\gamma+1}\alpha' v_{n\infty}(1-a_\infty^2/v_{n\infty}^2)$$

$$v=V_y-\frac{2}{\gamma+1}\beta' v_{n\infty}(1-a_\infty^2/v_{n\infty}^2)$$

$$w=V_\theta-\frac{2}{\gamma+1}\gamma' v_{n\infty}(1-a_\infty^2/v_{n\infty}^2) \tag{1.4}$$

$$p=p_\infty+\frac{2}{\gamma+1}\rho_\infty(v_{n\infty}^2-a_\infty^2)$$

$$\rho=\rho_\infty\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{a_\infty^2}{v_{n\infty}^2}\right)^{-1}$$

где $V_x, V_y, V_\theta, p_\infty, \rho_\infty, a_\infty$ — соответственно, составляющие по осям координат скорости, давление, плотность и скорость звука в набегающем потоке; $v_{n\infty}$ — проекция вектора скорости набегающего потока на нормаль к ударной волне; α', β', γ' — направляющие косинусы нормали к ударной волне. Правые части (1.4) выражаются через известные величины и неизвестную функцию $y^*(x,\theta)$.

Таким образом, задача состоит в нахождении u, v, w, p, ρ, y^* из системы соотношений (1.1), (1.3), (1.4).

Представим решение в виде

$$u=u_0+u_1', \qquad v=v_0+v_1', \qquad w=w_1' \tag{1.5}$$
$$p=p_0+p_1', \qquad \rho=\rho_0+\rho_1', \qquad y^*=y_0^*+y_1^{*\prime}$$

где $u_0(x,y), v_0(x,y), p_0(x,y), \rho_0(x,y), y_0^*(x)$ — известные из решения задачи при $\alpha=0$ функции указанных аргументов, а u_1', v_1', w_1', p_1', ρ_1', $y_1^{*\prime}$ — малые по сравнению с первыми искомые величины, обращающиеся в нуль вместе с углом атаки α.

Функции с индексом нуль удовлетворяют уравнениям

$$\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}-\frac{u_0^2}{R+y}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}=0$$

$$\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_0^2+v_0^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\right)+v_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_0^2+v_0^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\right)=0$$

$$\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\right)+v_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\right)=0 \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_0 r)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0 v_0 r\left(1+\frac{y}{R}\right)\right]=0$$

условию обтекания

$$v_0(x,0)=0 \qquad (1.7)$$

и условиям на невозмущенной ударной волне $y=y_0^*(x)$

$$u_0=U_\infty\cos\varphi-\frac{2}{\gamma+1}U_\infty\sin\beta\sin\sigma\left(1-\frac{1}{M_\infty^2\sin^2\beta}\right)$$

$$v_0=-U_\infty\sin\varphi+\frac{2}{\gamma+1}U_\infty\sin\beta\cos\sigma\left(1-\frac{1}{M_\infty^2\sin^2\beta}\right)$$

$$\frac{p_0}{\rho_\infty U_\infty^2}=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+\frac{2}{\gamma+1}\sin^2\beta\left(1-\frac{1}{M_\infty^2\sin^2\beta}\right)$$

$$\rho_0=\rho_\infty\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_\infty^2\sin^2\beta}\right)^{-1} \qquad (1.8)$$

где M_∞ — число Маха набегающего потока, U_∞ — скорость набегающего потока, β, σ — углы, образованные касательной к невозмущенной ударной волне соответственно с осью тела и осью x.

Подставив (1.5) в (1.1) произведя линеаризацию и используя (1.6), получим линейную систему

$$\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial v_1'}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_1'}{\partial y}+\frac{u_1'}{1+y/R}\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_1'\frac{\partial v_0}{\partial y}-\frac{2u_0u_1'}{R+y}+ \qquad (1.9)$$

$$+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1'}{\partial y}+\frac{\rho_1'}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial y}=0$$

$$\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial w_1'}{\partial x}+v_0\frac{\partial w_1'}{\partial y}+\frac{\sin\varphi}{r}u_0w_1'+\frac{\cos\varphi}{r}v_0w_1'+\frac{1}{r\rho_0}\frac{\partial p_1'}{\partial\theta}=0$$

$$\left(\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[u_0u_1'+v_0v_1'+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_1'}{p_0}-\frac{\rho_1'}{\rho_0}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{u_1'}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}+v_1'\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{u_0^2+v_0^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\right)=0$$

$$\left(\frac{u_0}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\left(\frac{p_1'}{\gamma p_0}-\frac{\rho_1'}{\rho_0}\right)\right]+\left(\frac{u_1'}{1+y/R}\frac{\partial}{\partial x}+v_1'\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[r(\rho_1'u_0+\rho_0u_1')]+\frac{\partial}{\partial y}\left[r\left(1+\frac{y}{R}\right)(\rho_0v_1'+\rho_1'v_0)\right]+\rho_0\left(1+\frac{y}{R}\right)\frac{\partial w_1'}{\partial\theta}=0$$

Условие обтекания (1.3) дает с учетом (1.7)

$$v_1'(x,0,\theta)=0 \qquad (1.10)$$

Наконец, подставив (1.5) в условия на ударной волне (1.4) и учтя (1.8), получим граничные условия, выполняющиеся при $y = y_0^*(x)$,

$$u_1' + \frac{\partial u_0}{\partial y} y_1^{*\prime} = U_\infty \alpha \cos\theta \sin\varphi + \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \alpha \cos\theta \cos\beta \sin\sigma\left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) -$$
$$- \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{\partial y_1^{*\prime}}{\partial x} - \frac{y_1^{*\prime}}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\sin(\sigma+\beta) - \frac{\sin\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$v_1' + \frac{\partial v_0}{\partial y} y_1^{*\prime} = U_\infty \alpha \cos\theta \cos\varphi - \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \alpha \cos\theta \cos\beta \cos\sigma\left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) +$$
$$+ \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{\partial y_1^{*\prime}}{\partial x} - \frac{y_1^{*\prime}}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\cos(\sigma+\beta) + \frac{\cos\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$w_1' = -U_\infty \alpha \sin\theta - \frac{2}{\gamma+1} \frac{U_\infty \sin\beta \cos\sigma}{r} \frac{\partial y_1^{*\prime}}{\partial\theta} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right)$$

$$p_1' + \frac{\partial p_0}{\partial y} y_1^{*\prime} = \frac{4}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \sin\beta \cos\beta \left[\frac{\cos^2\sigma}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{\partial y_1^{*\prime}}{\partial x} - \frac{y_1^{*\prime}}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - \alpha\cos\theta\right]$$

$$\rho_1' + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} y_1^{*\prime} = \rho_\infty \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right)^{-2} \frac{4}{\gamma+1} \frac{\cos\beta}{M_\infty^2 \sin^3\beta} \times$$
$$\times \left[\frac{\cos^2\sigma}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{\partial y_1^{*\prime}}{\partial x} - \frac{y_1^{*\prime}}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - \alpha\cos\theta\right] \tag{1.11}$$

Система (1.9) является системой линейных, однородных уравнений, коэффициенты которых зависят только от x и y, а граничные условия (1.11) также линейны, но неоднородны, причем неоднородные слагаемые в них пропорциональны $\alpha\cos\theta$ и $\alpha\sin\theta$. Так как решение линейной задачи отлично от нуля благодаря наличию этой неоднородности, то естественно искать решение также пропорциональным тем же множителям, которым пропорциональна неоднородность. Точнее, решение будем искать в виде

$$u_1' = \alpha u_1 \cos\theta, \qquad v_1' = \alpha v_1 \cos\theta, \qquad w_1' = \alpha w_1 \sin\theta$$
$$p_1' = \alpha p_1 \cos\theta, \qquad \rho_1' = \alpha \rho_1 \cos\theta, \qquad y_1^{*\prime} = \alpha y_1^* \cos\theta \tag{1.12}$$

где величины без штрихов от θ не зависят. И действительно, подставляя (1.12) в (1.9), (1.10), (1.11), мы видим, что α и θ из формулировки задачи полностью выпадают. Задача для величин без штрихов формулируется в результате так. Система уравнений (1.13)

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{u_1}{1 + y/R} \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{2u_0 u_1}{R + y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\sin\varphi}{r} u_0 w_1 + \frac{\cos\varphi}{r} v_0 w_1 - \frac{p_1}{r\rho_0} = 0$$

$$\left(\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[u_0 u_1 + v_0 v_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\right] +$$
$$+ \left(\frac{u_1}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{u_0^2 + v_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}\right) = 0$$

$$\left(\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0} \left(\frac{p_1}{\gamma p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\right] + \left(\frac{u_1}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[r(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[r\left(1 + \frac{y}{R}\right)(\rho_1 v_0 + \rho_0 v_1)\right] + \rho_0 \left(1 + \frac{y}{R}\right) w_1 = 0$$

Условие обтекания

$$v_1(x, 0) = 0 \tag{1.14}$$

Условия на ударной волне, т. е. при $y = y_0^*(x)$ (1.15)

$$u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} y_1^* = U_\infty \sin\varphi + \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \cos\beta \sin\sigma \left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) -$$

$$- \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\sin(\sigma+\beta) - \frac{\sin\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial y} y_{1*} = U_\infty \cos\varphi - \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \cos\beta \cos\sigma \left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) +$$

$$+ \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{1 + y_0^*/R} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\cos(\sigma+\beta) + \frac{\cos\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$w_1 = -U_\infty + \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \frac{\sin\beta\cos\sigma}{r} y_1^* \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right)$$

$$p_1 + \frac{\partial p_0}{\partial y} y_1^* = \frac{4}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \sin\beta\cos\beta \left[\frac{\cos^2\sigma}{1 + y_0^*/R}\left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - 1\right]$$

$$\rho_1 + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} y_1^* = \rho_\infty \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]^{-2} \frac{4\cos\beta}{(\gamma+1) M_\infty^2 \sin^3\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos^2\sigma}{1 + y_0^*/R}\left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - 1\right]$$

Для решения задачи (1.13) — (1.15) перейдем к новым независимым переменным x, ψ, в которых представлено решение при нулевом угле атаки, входящее в коэффициенты задачи (1.13)—(1.15); ψ — функция тока решения при $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\rho_0 v_0 r \left(1 + \frac{y}{R}\right), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \rho_0 u_0 r$$

Поэтому имеют место формулы перехода от x, y к x, ψ

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\psi - \rho_0 v_0 r \left(1 + \frac{y}{R}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x = \rho_0 u_0 r \left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_x \qquad (1.16)$$

Используя эти формулы, приведем задачу (1.13) — (1.15) к следующему виду.

Система уравнений (1.17)

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{u_1}{1 + y/R} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \rho_0 v_0 r u_1 \frac{\partial v_0}{\partial\psi} + \rho_0 u_0 r v_1 \frac{\partial v_0}{\partial\psi} - \frac{2u_0 u_1}{R + y} +$$

$$+ u_0 r \frac{\partial p_1}{\partial\psi} - u_0 r \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial\psi} = 0$$

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\sin\varphi}{r} u_0 w_1 + \frac{\cos\varphi}{r} v_0 w_1 - \frac{p_1}{r\rho_0} = 0$$

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x}\left[u_0 u_1 + v_0 v_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\right] - \rho_0 v_0 r u_1 \frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{u_0^2 + v_0^2}{2} + \frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0}\right] +$$

$$+ \rho_0 u_0 r v_1 \frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{u_0^2 + v_0^2}{2} + \frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0}\right] = 0$$

$$\frac{u_0}{1 + y/R} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0}\left(\frac{p_1}{\gamma p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\right] - \rho_0 v_0 r u_1 \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0} + \rho_0 u_0 r v_1 \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[r(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1)\right] - \rho_0 v_0 r \left(1 + \frac{y}{R}\right) \frac{\partial}{\partial\psi}\left[r(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1)\right] +$$

$$+ \rho_0 u_0 r \frac{\partial}{\partial\psi}\left[r\left(1 + \frac{y}{R}\right)(\rho_1 v_0 + \rho_0 v_1)\right] + \rho_0 \left(1 + \frac{y}{R}\right) w_1 = 0$$

Условие обтекания

$$v_1(x, 0) = 0 \tag{1.18}$$

Условия на ударной волне, т. е. при $\psi = \psi^*(x)$ (1.19)

$$u_1 + \rho_0 u_0 r \frac{\partial u_0}{\partial \psi} y_1^* = U_\infty \sin\varphi + \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \cos\beta \sin\sigma \left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) -$$

$$- \frac{2}{(\gamma+1)(1+y_0^*/R)} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\sin(\sigma+\beta) - \frac{\sin\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$v_1 + \rho_0 u_0 r \frac{\partial v_0}{\partial \psi} y_1^* = U_\infty \cos\varphi - \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \cos\beta \cos\sigma \left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right) +$$

$$+ \frac{2}{(\gamma+1)(1+y_0^*/R)} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) U_\infty \cos^2\sigma \left[\cos(\sigma+\beta) + \frac{\cos\varphi}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]$$

$$w_1 = - U_\infty \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \frac{\sin\beta\cos\sigma}{r} y_1^* \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta}\right)$$

$$p_1 + \rho_0 u_0 r \frac{\partial p_0}{\partial \psi} y_1^* = \frac{4}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \sin\beta\cos\beta \left[\frac{\cos^2\sigma}{1+y_0^*/R} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - 1\right]$$

$$\rho_1 + \rho_0 u_0 r \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} y_1^* = \rho_\infty \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_\infty^2 \sin^2\beta}\right]^{-2} \frac{4\cos\beta}{(\gamma+1) M_\infty^2 \sin^3\beta} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos^2\sigma}{1+y_0^*/R} \left(\frac{dy_1^*}{dx} - \frac{y_1^*}{R} \operatorname{tg}\sigma\right) - 1\right]$$

Вполне аналогично тому, как это делается для случая $\alpha = 0$ [1], оценим при помощи (1.19) порядки величин u_1, v_1, w_1, p_1, ρ_1 относительно величины $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, предполагаемой малой. Поскольку в рассматриваемой задаче толщина возмущенной зоны порядка εl, т. е. $y^* \sim \varepsilon l$, и отдельно $y_0^* \sim \varepsilon l$, заключаем, что $y_1^* \sim \varepsilon l$ (l — характерный размер тела). А это позволяет получить из (1.19) оценки

$$u_1 \sim U_\infty, \quad v_1 \sim \varepsilon U_\infty, \quad w_1 \sim U_\infty, \quad p_1 \sim \rho_\infty U_\infty^2, \quad \rho_1 \sim \rho_\infty/\varepsilon \tag{1.20}$$

Это дает возможность представить все фигурирующие в задаче функции в виде следующих разложений

$$\begin{aligned}
y &= \varepsilon y^{(0)} + \varepsilon^2 y^{(1)} + \cdots & u_1 &= u_1^{(0)} + \varepsilon u_1^{(1)} + \cdots \\
u_0 &= u_0^{(0)} + \varepsilon u_0^{(1)} + \cdots & v_1 &= \varepsilon v_1^{(0)} + \varepsilon^2 v_1^{(1)} + \cdots \\
v_0 &= \varepsilon v_0^{(0)} + \varepsilon^2 v_0^{(1)} + \cdots & w_1 &= w_1^{(0)} + \varepsilon w_1^{(1)} + \cdots \\
p_0 &= p_0^{(0)} + \varepsilon p_0^{(1)} + \cdots & p_1 &= p_1^{(0)} + \varepsilon p_1^{(1)} + \cdots \\
\rho_0 &= \frac{1}{\varepsilon}\rho_0^{(0)} + \rho_0^{(1)} + \cdots & \rho_1 &= \frac{1}{\varepsilon}\rho_1^{(0)} + \rho_1^{(1)} + \cdots
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\psi^*(x) = \psi_0^* + \varepsilon\psi_1^* + \cdots$$

$$\psi_0^* = \frac{\rho_\infty U_\infty}{2} r^{\circ 2}, \quad \psi_1^* = \rho_\infty U_\infty r^\circ y_0^* \cos\varphi, \quad y_1^*(x) = \varepsilon y_1^{*(0)} + \varepsilon^2 y_1^{*(1)} + \cdots$$

Коэффициенты в разложениях левого столбца (1.21) получаются из решения задачи при $\alpha = 0$ и могут считаться известными [1]. Подставив (1.21) в (1.17) — (1.19), группируя члены с одинаковой степенью ε и требуя обращения в нуль получающихся в результате выражений для каждой степени ε, получим рекуррентную последовательность задач. Для нулевого и первого приближений получаются такие соотношения:

Нулевое приближение. Дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}
2u_1^{(0)} = r^\circ R \frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial \psi} - u_0^{(0)} \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}, \quad \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\sin\varphi}{r^\circ} w_1^{(0)} = 0 \\
2(u_0^{(0)})^2 \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x} - \rho_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial (u_0^{(0)})^2}{\partial \psi} (v_0^{(0)} u_1^{(0)} - u_0^{(0)} v_1^{(0)}) = 0
\end{gathered} \tag{1.22}$$

$$\frac{u_0^{(0)}(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_1^{(0)}}{\gamma p_0^{(0)}}-\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right)-\rho_0^{(0)}r^\circ\left(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-u_0^{(0)}v_1^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[r^\circ(\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_1^{(0)})]-\rho_0^{(0)}v_0^{(0)}r^{\circ 2}\frac{\partial}{\partial\psi}(\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_1^{(0)})+$$
$$+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^{\circ 2}\frac{\partial}{\partial\psi}(\rho_1^{(0)}v_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}v_1^{(0)})+\rho_0^{(0)}w_1^{(0)}=0$$

Условие обтекания

$$v_1^{(0)}=0 \quad \text{при } \psi=0 \tag{1.23}$$

Условия на ударной волне, т. е. при $\psi=\psi_0^*(x)=\rho_\infty U_\infty^2 r^{\circ 2}/2$ (1.24)

$$u_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=U_\infty\sin\varphi$$

$$v_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=U_\infty\cos\varphi\left[1-\frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right]+$$
$$+\frac{2}{\gamma+1}U_\infty\left(\sin\varphi y_0^{*\prime}+\cos\varphi\frac{dy_1^{*(0)}}{dx}\right)$$

$$w_1^{(0)}=-U_\infty$$

$$p_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=-\frac{4}{\gamma+1}\rho_\infty U_\infty^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\rho_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial\rho_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=-\rho_\infty\left[1+\frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right]^{-2}\frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^3\varphi}$$

Первое приближение. Дифференциальные уравнения (1.25)

$$u_0^{(0)}\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial x}+u_1^{(0)}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial x}-\rho_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial\psi}(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-v_1^{(0)}u_0^{(0)})-\frac{2}{R}(u_0^{(0)}u_1^{(1)}+$$
$$+u_0^{(1)}u_1^{(0)})+\frac{2}{R^2}u_0^{(0)}u_1^{(0)}y^{(0)}+(u_0^{(1)}r^\circ+u_0^{(0)}y^{(0)}\cos\varphi)\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial\psi}+$$
$$+u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial\psi}-\frac{1}{\rho_0^{(0)}}(\rho_1^{(1)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}-\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}+$$
$$+\rho_1^{(0)}u_0^{(1)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}+\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}y^{(0)}\cos\varphi\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}+\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial\psi}=0$$

$$u_0^{(0)}\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial x}-u_0^{(0)}\frac{y^{(0)}}{R}\frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial x}+u_0^{(1)}\frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial x}+\frac{\sin\varphi}{r^\circ}(u_0^{(1)}w_1^{(0)}+w_1^{(1)}u_0^{(0)}-$$
$$-\frac{y^{(0)}}{r^\circ}\cos\varphi u_0^{(0)}w_1^{(0)}\Big)+\frac{\cos\varphi}{r^\circ}v_0^{(0)}w_1^{(0)}-\frac{p_1^{(0)}}{r^\circ\rho_0^{(0)}}=0$$

$$u_0^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}(u_0^{(0)}u_1^{(1)}+u_0^{(1)}u_1^{(0)})+\left(u_0^{(1)}-u_0^{(0)}\frac{y^{(0)}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}(u_1^{(0)})^2+$$
$$+\frac{\gamma}{\gamma-1}u_0^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\left(\frac{p_1^{(0)}}{p_0^{(0)}}-\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right)\right]-(\rho_0^{(0)}r^\circ+\rho_0^{(0)}y^{(0)}\cos\varphi)(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-$$
$$-u_0^{(0)}v_1^{(0)})u_0^{(0)}\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial\psi}-\rho_0^{(0)}r^\circ(v_0^{(0)}u_1^{(1)}-u_0^{(1)}v_1^{(0)}+u_1^{(0)}v_0^{(1)}-u_0^{(0)}v_1^{(1)})\times$$
$$\times u_0^{(0)}\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi}-\rho_0^{(0)}r^\circ(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-u_0^{(0)}v_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial\psi}\left(u_0^{(0)}u_0^{(1)}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right)=0$$

$$\frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}}\left[u_0^{(1)}-\frac{y^{(0)}}{R}u_0^{(0)}+u_0^{(0)}\left(\frac{p_0^{(1)}}{\gamma p_0^{(0)}}-\frac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(0)}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_1^{(0)}}{\gamma p_0^{(0)}}-\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right)+$$

$$
+ u_0^{(0)} \frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p_1^{(1)}}{\gamma p_0^{(0)}} - \frac{\rho_1^{(1)}}{\rho_0^{(0)}} - \frac{p_1^{(0)} p_0^{(1)}}{\gamma (p_0^{(0)})^2} + \frac{\rho_1^{(0)} \rho_0^{(1)}}{(\rho_0^{(0)})^2} \right] - (\rho_0^{(1)} r^\circ +
$$

$$
+ \rho_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi) (v_0^{(0)} u_1^{(0)} - u_0^{(0)} v_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}} - \rho_0^{(0)} r^\circ (v_0^{(0)} u_1^{(1)} +
$$

$$
+ v_0^{(1)} u_1^{(0)} - u_0^{(0)} v_1^{(1)} - u_0^{(1)} v_0^{(0)}) \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}} - \rho_0^{(0)} r^\circ (v_0^{(0)} u_1^{(0)} -
$$

$$
- u_0^{(0)} v_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{(p_0^{(0)})^{1/\gamma}}{\rho_0^{(0)}} \left(\frac{p_0^{(1)}}{\gamma p_0^{(0)}} - \frac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(0)}} \right) \right] = 0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x} [r^\circ (\rho_1^{(1)} u_0^{(0)} + \rho_1^{(0)} u_0^{(1)} + \rho_0^{(1)} u_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_1^{(1)}) +
$$

$$
+ y^{(0)} \cos\varphi (\rho_1^{(0)} u_0^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_1^{(0)})] - r^\circ \rho_0^{(0)} v_0^{(0)} \frac{\partial}{\partial\psi} [y^{(0)} \cos\varphi (\rho_1^{(0)} u_0^{(0)} +
$$

$$
+ \rho_0^{(0)} u_1^{(0)}) + r^\circ (\rho_1^{(1)} u_0^{(0)} + \rho_1^{(0)} u_0^{(1)} + \rho_0^{(1)} u_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_1^{(1)})] -
$$

$$
- \Big[r^\circ (\rho_0^{(1)} v_0^{(0)} + \rho_0^{(0)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(0)} v_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi +
$$

$$
+ \frac{1}{R} r^\circ y^{(0)} \rho_0^{(0)} v_0^{(0)} \Big] \frac{\partial}{\partial\psi} [r^\circ (\rho_1^{(0)} u_0^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_1^{(0)})] +
$$

$$
+ \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\left(y^{(0)} \cos\varphi + r^\circ \frac{y^{(0)}}{R} \right) (\rho_1^{(0)} v_0^{(0)} + \rho_0^{(0)} v_1^{(0)}) \right] +
$$

$$
+ r^\circ (\rho_1^{(1)} v_0^{(0)} + \rho_1^{(0)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(1)} v_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} v_1^{(1)}) + (r^\circ \rho_0^{(1)} u_0^{(0)} +
$$

$$
+ r^\circ \rho_0^{(0)} u_0^{(1)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial\psi} [r^\circ (\rho_1^{(0)} v_0^{(0)} + \rho_0^{(0)} v_1^{(0)})] +
$$

$$
+ \rho_0^{(1)} w_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} w_1^{(1)} + \frac{1}{R} y^{(0)} \rho_0^{(0)} w_1^{(0)} = 0
$$

Условие обтекания

$$
v_1^{(1)} = 0 \quad \text{при } \psi = 0 \tag{1.26}
$$

Условия на ударной волне, т. е. при $\psi = \psi_0^*(x)$

$$
u_1^{(1)} + \left(u_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi} y_1^{*(0)} \right)_\psi \psi_1^* + r^\circ \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} \left(y_1^{*(0)} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial\psi} +
\right.
$$

$$
\left. + y_1^{*(1)} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi} \right) + (\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi + \rho_0^{(0)} u_0^{(1)} r^\circ + \rho_0^{(1)} u_0^{(0)} r^\circ) y_1^{*(0)} \frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi} =
$$

$$
= \frac{2U_\infty}{\gamma + 1} \left(\cos\varphi y_0^{*\prime} - \sin\varphi \frac{dy_1^{*(0)}}{dx} \right)
$$

$$
v_1^{(1)} + \left(v_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial\psi} y_1^{*(0)} \right)_\psi \psi_1^* + (\rho_0^{(1)} u_0^{(0)} r^\circ y_1^{*(0)} +
$$

$$
+ \rho_0^{(0)} u_0^{(1)} r^\circ y_1^{*(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi \, y_1^{*(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ y_1^{*(1)}) \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial\psi} +
$$

$$
+ \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ y_1^{*(0)} \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial\psi} = \frac{2U_\infty}{\gamma + 1} \cos\varphi \frac{dy_1^{*(1)}}{dx} + \left[\frac{2U_\infty \cos\varphi}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \sin^3\varphi} -
\right.
$$

$$
\left. - \frac{2U_\infty}{\gamma + 1} \left(2 \sin\varphi y_0^{*\prime} + \frac{1}{R} \cos\varphi y_1^{*(0)} \right) \right] \frac{dy_1^{*(0)}}{dx} + \frac{2U_\infty}{\gamma + 1} \cos\varphi \left[\frac{1}{R} y_0^{*\prime} y_1^{*(0)} +
\right.
$$

$$
\left. + (y_0^*)^2 \right] + \frac{2U_\infty \sin\varphi}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \sin^2\varphi} \left(1 + 2 \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} \right) y_0^{*\prime} \tag{1.27}
$$

$$
w_1^{(1)} + (w_1^{(0)})_\psi \psi_1^* = \frac{2}{\gamma + 1} U_\infty \frac{\sin\varphi}{r^\circ} y_1^{*(0)}
$$

$$p_1^{(1)}+\left(p_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}\right)_\psi\psi_1^*+\left[\left(\rho_0^{(1)}u_0^{(0)}r^\circ+\rho_0^{(0)}u_0^{(1)}r^\circ+\right.\right.$$

$$\left.+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}y^{(0)}\cos\varphi\right)\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\left.\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial\psi}\right]y_1^{*(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}+$$

$$+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(1)}=-\frac{2}{\gamma+1}\rho_\infty U_\infty^2\left(2\cos2\varphi y_0^{*\prime}-\sin2\varphi\frac{dy_1^{*(0)}}{dx}\right)$$

$$\rho_1^{(1)}+\left(\rho_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial\rho_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}\right)_\psi\psi_1^*+\left[\left(\rho_0^{(1)}u_0^{(0)}r^\circ+\rho_0^{(0)}u_0^{(1)}r^\circ+\right.\right.$$

$$\left.+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}y^{(0)}\cos\varphi\right)\frac{\partial\rho_0^{(0)}}{\partial\psi}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\left.\frac{\partial\rho_0^{(1)}}{\partial\psi}\right]y_1^{*(0)}+$$

$$+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial\rho_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(1)}=\rho_\infty\left(1+\frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)^{-2}\frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^3\varphi}\times$$

$$\times\left\{\left[-\frac{8\cos\varphi}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^3\varphi}\left(1+\frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{tg}\varphi+3\operatorname{ctg}\varphi\right]y_0^{*\prime}+\frac{dy_1^{*(0)}}{dx}\right\}$$

2. Перейдем к решению задачи нулевого приближения (задачи (1.22) — 1.24)).

Второе уравнение из (1.22) интегрируется и дает

$$w_1^{(0)}=K(\psi)\exp\left(-\int\frac{\sin\varphi}{r^\circ}dx\right)\equiv K(\psi)W(x)\qquad(2.1)$$

где $K(\psi)$ — произвольная функция. Она находится из третьего соотношения из (1.24)

$$K(\psi)=-\frac{U_\infty}{W(x^*)}\qquad(2.2)$$

где x^* — известная функция ψ (обратная к $\psi_0^*(x)$). Тем самым $w_1^{(0)}$ оказывается определенной полностью. Исключив из задачи (1.22) — (1.24) $w_1^{(0)}$, получаем систему уравнений для $u_1^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $p_1^{(0)}$, $\rho_1^{(0)}$

$$2u_1^{(0)}=r^\circ R\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial\psi}-u_0^{(0)}\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}},\quad u_0^{(0)}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}-\rho_0^{(0)}r^\circ\left(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-u_0^{(0)}v_1^{(0)}\right)\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi}=0$$

$$u_0^{(0)}\frac{(p_0^{(0)})^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_1^{(0)}}{\gamma p_0^{(0)}}-\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right)-\rho_0^{(0)}r^\circ\left(v_0^{(0)}u_1^{(0)}-u_0^{(0)}v_1^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{(p_0^{(0)})^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho_0^{(0)}}\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[r^\circ\left(\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_1^{(0)}\right)\right]-\rho_0^{(0)}v_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial}{\partial\psi}\left[r^\circ\left(\rho_1^{(0)}u_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_1^{(0)}\right)\right]+$$

$$+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial}{\partial\psi}\left[r^\circ\left(\rho_1^{(0)}v_0^{(0)}+\rho_0^{(0)}v_1^{(0)}\right)\right]+\rho_0^{(0)}K(\psi)W(x)=0\qquad(2.3)$$

и граничные условия к ним

$$v_1^{(0)}=0\ \text{при}\ \psi=0\qquad(2.4)$$

а при $\psi=\psi_0^*(x)$

$$u_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=U_\infty\sin\varphi$$

$$v_1^{(0)}+\rho_0^{(0)}u_0^{(0)}r^\circ\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial\psi}y_1^{*(0)}=U_\infty\cos\varphi\left(1-\frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)+$$

$$+\frac{2}{\gamma+1}U_\infty\left(\sin\varphi\,y_0^{*\prime}+\cos\varphi\frac{dy_1^{*(0)}}{dx}\right)\qquad(2.5)$$

$$p_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial \psi} y_1^{*(0)} = -\frac{4}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

$$\rho_1^{(0)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial \rho_0^{(0)}}{\partial \psi} y_1^{*(0)} = -\rho_\infty \frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^3\varphi} \left(1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right)^{-2}$$

где $u_0^{(0)}$, $v_0^{(0)}$, $p_0^{(0)}$, $\rho_0^{(0)}$, $y^{(0)}$, y_0^* — решение нулевого приближения при $\alpha = 0$. Оно определено соотношениями [1]:

$$u_0^{(0)} = u_0(\psi), \quad (p_0^{(0)})^{\frac{1}{\gamma}} = \theta_0(\psi)\rho_0^{(0)}$$

$$p_0^{(0)} = \frac{1}{Rr^\circ} \int_{\psi_0^*}^{\psi} u_0^{(0)} d\psi + p^*(x), \quad y^{(0)} = \frac{1}{r^\circ} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\rho_0^{(0)} u_0^{(0)}}$$

$$y_0^* = \frac{1}{r^\circ} \int_0^{\psi_0^*} \frac{d\psi}{\rho_0^{(0)} u_0^{(0)}}, \quad v_0^{(0)} = u_0^{(0)} \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}$$

где u_0, θ_0, p^* — произвольные функции своих аргументов, определяемые из соответствующих граничных условий задачи при $\alpha = 0$.

Систему (2.3) с учетом этого можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
2\frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}} = \frac{r^\circ R p_0^{(0)}}{u_0^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{p_1^{(0)}}{p_0^{(0)}}\right) + \frac{p_1^{(0)}}{p_0^{(0)}} - \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} \\
\frac{v_1^{(0)}}{v_0^{(0)}} = \frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}} - \frac{u_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)} r^\circ (u_0^{(0)})' v_0^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}}\right) \\
\frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}} = \frac{\theta_0 (u_0^{(0)})'}{\theta_0' u_0^{(0)}} \left(\frac{p_1^{(0)}}{\gamma p_0^{(0)}} - \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\right) + K_1(\psi) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} + \frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}}\right) - \rho_0^{(0)} v_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}} - \frac{v_1^{(0)}}{v_0^{(0)}}\right) + \\
+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ) - \frac{v_0^{(0)}}{u_0^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \psi}(\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ)\right]\left(\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} + \frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}}\right) + \\
+ \frac{\partial}{\partial \psi}(\rho_0^{(0)} v_0^{(0)} r^\circ)\left(\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} + \frac{v_1^{(0)}}{v_0^{(0)}}\right) + \frac{K(\psi) W(x)}{r^\circ u_0^{(0)}} = 0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где K_1 — произвольная функция («постоянная» интегрирования), штрих у некоторых величин означает дифференцирование. Введем обозначения

$$u_1^{(0)} = U u_0^{(0)}, \quad v_1^{(0)} = V v_0^{(0)}, \quad p_1^{(0)} = P p_0^{(0)}, \quad \rho_1^{(0)} = \Pi \rho_0^{(0)}$$

$$\begin{gathered}
A(x, \psi) = \frac{r^\circ R p_0^{(0)}}{u_0^{(0)}}, \qquad B(x, \psi) = \frac{u_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)} r^\circ (u_0^{(0)})' v_0^{(0)}} \\
C(\psi) = \frac{\theta_0 (u_0^{(0)})'}{\theta_0' u_0^{(0)}}, \qquad D(x, \psi) = \rho_0^{(0)} v_0^{(0)} r^\circ \\
E(x, \psi) = \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ) - \frac{v_0^{(0)}}{u_0^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \psi}(\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ) \\
F(x, \psi) = \frac{\partial}{\partial \psi}(\rho_0^{(0)} v_0^{(0)} r^\circ), \quad G(x, \psi) = \frac{K(\psi) W(x)}{r^\circ u_0^{(0)}}
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Тогда (2.6) запишется в виде

$$\begin{gathered}
2U = A\frac{\partial P}{\partial \psi} + P - \Pi, \quad V = U - B\frac{\partial U}{\partial x} \\
U = \frac{1}{\gamma} CP - C\Pi + K_1 \\
\frac{\partial}{\partial x}(\Pi + U) - D\frac{\partial}{\partial \psi}(U - V) + E(\Pi + U) + F(\Pi + V) + G = 0
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Рассмотрим сначала два частных случая, для которых решение задачи нулевого приближения получается относительно простым.

а) Случай обтекания конуса. В этом случае $R = \infty$, $r^\circ = x \sin\varphi$, $\varphi = \mathrm{const}$. Решение для нулевого приближения при $\alpha = 0$ имеет вид

$$y^{(0)} = \frac{\psi}{\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ}, \quad u_0^{(0)} = U_\infty \cos\varphi, \quad v_0^{(0)} = -\frac{\sin\varphi}{\rho_0^{(0)} r^{\circ 2}}\psi$$

$$p_0^{(0)} = \frac{2}{\gamma+1}\rho_\infty U_\infty^2 \sin^2\varphi, \quad \rho_0^{(0)} = \rho_\infty\left(1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right)^{-1}$$

$$y_0^* = \frac{\psi_*}{\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ} = \frac{\rho_\infty \sin\varphi}{2\rho_0^{(0)} \cos\varphi}x, \quad y_0^{*\prime} = \frac{\rho_\infty \sin\varphi}{2\rho_0^{(0)} \cos\varphi}$$

Система (2.3) значительно упрощается и легко интегрируется. Окончательно, удовлетворив граничным условиям, получаем решение в виде

$$
\begin{aligned}
u_1^{(0)} &= U_\infty \sin\varphi \\
v_1^{(0)} &= -\frac{\psi}{\rho_0^{(0)} \cos\varphi x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho_\infty U_\infty}}\frac{\psi^{3/2}}{\rho_0^{(0)} \cos\varphi \sin^3\varphi x^3} \\
w_1^{(0)} &= -\sqrt{\frac{2U_\infty}{\rho_\infty}}\frac{\sqrt{\psi}}{\sin\varphi x} \\
p_1^{(0)} &= -\frac{4}{\gamma+1}\rho_\infty U_\infty^2 \sin\varphi\cos\varphi \\
\rho_1^{(0)} &= -\rho_\infty \frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^3\varphi}\left(1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right)^{-2}
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

Функция $y_1^{*(0)}$ находится при помощи второго из соотношений (2.5). Она имеет вид

$$y_1^{*(0)} = kx \qquad (2.10)$$

$$k = \frac{\gamma+1}{\gamma+3}\left\{\left[1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right]\left[\frac{1}{3\cos^2\varphi} - \frac{(\gamma+3)\sin^2\varphi}{2(\gamma+1)\cos^2\varphi}\right] - \right.$$
$$\left. - \left[1 - \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right]\right\}$$

Все эти формулы в точности совпадают с первыми членами разложения решения А. Л. Гонора для конуса [2] в ряд по степеням α.

б) Случай обтекания тела с большим радиусом кривизны. Если R значительно превышает размеры обтекаемого тела, то в основных соотношениях можно положить $R = \infty$, однако учитывая переменность φ — угла наклона меридиана к оси тела, так, как это делается в теории пограничного слоя. Тогда первое из уравнений (2.8) переходит в $\partial P / \partial\psi = 0$, что после интеграции и удовлетворения соответствующего граничного условия дает

$$P = -2\,\mathrm{ctg}\,\varphi \qquad (2.11)$$

т. е. P становится известной функцией. Из (2.8) имеем

$$V = U - B\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \Pi = \frac{1}{\gamma}P - \frac{1}{C}(U - K_1)$$

$$-BD\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial\psi} + \left(1 - \frac{1}{C} - D\frac{\partial B}{\partial\psi} - BF\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{C}\right)(E+F)U +$$
$$+ \frac{1}{\gamma}(E+F)P + \frac{1}{C}(E+F)K_1 + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x} + G = 0$$

Но так как

$$BD = u_0^{(0)} / (u_0^{(0)})', \quad 1 - \frac{1}{C} - D\frac{\partial B}{\partial \psi} - BF = 1 - \frac{\theta_0' u_0^{(0)}}{\theta_0 (u_0^{(0)})'} - \frac{d}{d\psi}\left[\frac{u_0^{(0)}}{(u_0^{(0)})'}\right],$$

$$E + F = \frac{1}{\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ} \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ) + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{v_0^{(0)}}{u_0^{(0)}}\right) =$$

$$= \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \left(-\frac{\partial^2 y^{(0)}}{\partial x \partial \psi} + \frac{\partial^2 y^{(0)}}{\partial x \partial \psi}\right) \equiv 0$$

то основное уравнение для определения U сводится к

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \psi} + \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{u_0^{(0)}}{(u_0^{(0)})'} + \frac{\theta_0'}{\theta_0} - \frac{(u_0^{(0)})'}{u_0^{(0)}}\right]\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{(u_0^{(0)})'}{\gamma u_0^{(0)}}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{(u_0^{(0)})' W(x) K(\psi)}{r^\circ u_0^{(0)}} = 0$$

которое легко интегрируется

$$U = \frac{(u_0^{(0)})'}{\theta_0}\left[K_3(x) + \int_0^\psi \left(\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}} \int \frac{W}{r^\circ} dx\right) d\psi\right] + K_2(\psi) \tag{2.12}$$

что позволяет сразу написать выражения для V и Π

$$V = \frac{(u_0^{(0)})'}{\theta_0}\left[K_3 + \int_0^\psi \left(\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}} \int \frac{W}{r^\circ} dx\right) d\psi\right] + K_2 - \tag{2.13}$$

$$- B\frac{(u_0^{(0)})'}{\theta_0}\left[K_3' + \int_0^\psi \left(\frac{\theta_0 P'}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K W}{u_0^{(0)} r^\circ}\right) d\psi\right]$$

$$\Pi = \frac{1}{\gamma} P - \frac{(u_0^{(0)})'}{C\theta_0}\left[K_3 + \int_0^\psi \left(\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}} \int \frac{W}{r^\circ} dx\right) d\psi\right] - \frac{1}{C}(K_2 - K_1)$$

Используя условие обтекания, убеждаемся в том, что $K_3(x) = \text{const}$. Поэтому все выражение $K_3 (u_0^{(0)})' / \theta_0$ можно объединить с $K_2(\psi)$, так что окончательно получим решение с двумя произвольными функциями $K_1(\psi)$, $K_2(\psi)$ в виде

$$\begin{aligned} P &= -2 \operatorname{ctg} \varphi \\ U &= L(x, \psi) + K_2(\psi) \\ V &= L(x, \psi) - B\frac{\partial}{\partial x} L(x, \psi) + K_2(\psi) \\ \Pi &= \frac{1}{\gamma} P - \frac{1}{C}[L(x, \psi) + K_2(\psi) - K_1(\psi)] \\ L(x, \psi) &= \frac{(u_0^{(0)})'}{\theta_0} \int_0^\psi \left[\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}} \int \frac{W(x)}{r^\circ(x)} dx\right] d\psi \end{aligned} \tag{2.14}$$

Произвольные функции находятся из граничных условий (2.5). Из этих же условий находится функция $y_1^{*(0)}$

$$y_1^{*(0)} = -\left(\frac{\Pi}{u_0^{(0)} r^\circ \partial\rho_0^{(0)}/\partial\psi}\right)_{\psi=\psi^*(x)} -$$

$$- \frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\left(1 - \frac{2}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{u_0^{(0)} r^\circ \partial\rho_0^{(0)}/\partial\psi}\right)_{\psi=\psi^*(x)} \tag{2.15}$$

в) Общий случай. В этом случае соотношения (2.8) можно привести к виду

$$\Pi = \frac{1}{1-2C}\left[A\frac{\partial P}{\partial x} + \left(1-\frac{2C}{\gamma}\right)P - 2K_1\right] \tag{2.16}$$

$$U = \frac{1}{1-2C}\left[-AC\frac{\partial P}{\partial \psi} + \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)CP + K_1\right]$$

$$V = \frac{1}{1-2C}\left[ABC\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial \psi} + C\left(\frac{\partial A}{\partial x}B - A\right)\frac{\partial P}{\partial \psi} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)BC\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)CP + K_1\right]$$

$$ABCD\frac{\partial^3 P}{\partial x\,\partial \psi^2} + \frac{\partial A}{\partial x}BCD\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} + \left[A(1-C) - \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)BCD + \right.$$
$$\left. + D(1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{ABC}{1-2C} + ABCF\right]\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial \psi} + \left[\frac{\partial A}{\partial x}(1-C) + \right.$$
$$\left. + D(1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{BC}{1-2C}\right) + A(1-C)(E+F) + \frac{\partial A}{\partial x}BCF\right]\frac{\partial P}{\partial \psi} +$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)C - \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)BCF - D(1-2C)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{BC}{1-2C}\right]\frac{\partial P}{\partial x} +$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma}+1\right)C\right](E+F)P + (1-2C)G - (E+F)K_1 = 0$$

Замечая, что $E + F \equiv 0$, $BCD = \theta_0(\psi)/\theta_0'(\psi)$, $F = \partial D/\partial\psi$, последнее уравнение из (2.16) преобразуем к виду

$$ABCD\frac{\partial^3 P}{\partial x\,\partial \psi^2} + \frac{\partial A}{\partial x}BCD\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} + \left[A(1-C) + \frac{\gamma-1}{\gamma}BCD + \right. \tag{2.17}$$
$$\left. + (1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{ABCD}{1-2C}\right]\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} + \left[\frac{\partial A}{\partial x}(1-C) + (1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{BCD}{1-2C}\right)\right]\frac{\partial P}{\partial \psi} +$$
$$+ \left[1 - \frac{\gamma+1}{\gamma}C + \frac{\gamma-1}{\gamma}(1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{BCD}{1-2C}\right)\right]\frac{\partial P}{\partial x} + (1-2C)G = 0$$

Интегрируя по x, получаем (2.18)

$$ABCD\frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} + \left[A(1-C) + \frac{\gamma-1}{\gamma}BCD + (1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{ABCD}{1-2C}\right)\right]\frac{\partial P}{\partial \psi} + \left[1 - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma+1}{\gamma}C + \frac{\gamma-1}{\gamma}(1-2C)\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{BCD}{1-2C}\right]P + (1-2C)\left(\frac{K}{u_0^{(0)}}\int\frac{W}{r^\circ}dx + K_2\right) = 0$$

где $K_2(\psi)$ — произвольная функция, или, несколько преобразовав,

$$\frac{\partial Q}{\partial \psi} + \frac{1-C}{BCD}Q - S = 0 \tag{2.19}$$

где

$$Q \equiv \frac{BCD}{1-2C}\left(A\frac{\partial P}{\partial \psi} + \frac{\gamma-1}{\gamma}P\right), \qquad S \equiv \frac{1}{\gamma}P + \frac{K}{u_0^{(0)}}\int\frac{W}{r^\circ}dx + K_2 \tag{2.20}$$

Интегрируя уравнение (2.19), получаем

$$Q = \frac{u_0^{(0)}}{\theta_0}\left(K_3 + \int\frac{\theta_0}{u_0^{(0)}}S\,d\psi\right) \tag{2.21}$$

где $K_3(x)$ — новая произвольная функция.

Рассматривая далее первое из соотношений (2.20) как линейное уравнение для P и интегрируя его, получаем

$$P = \left(p_0^{(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left\{K_4 + \int\left(p_0^{(0)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{(p_0^{(0)})'}{p_0^{(0)}}\left[\frac{\theta_0'}{\theta_0} - 2\frac{(u_0^{(0)})'}{u_0^{(0)}}\right]Q\,d\psi\right\} \tag{2.22}$$

где $K_4(x)$ — еще одна произвольная функция. Подставив теперь выражение для S из (2.20) в (2.21), затем получающееся для Q выражение в (2.22), получаем окончательно интегральное уравнение для P

$$P = \left(p_0^{(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left\{K_4 + \int \left(p_0^{(0)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \frac{\left(p_0^{(0)}\right)'}{p_0^{(0)}}\left[\frac{\theta_0'}{\theta_0} - 2\frac{\left(u_0^{(0)}\right)'}{u_0^{(0)}}\right] - \frac{u_0^{(0)}}{\theta_0} K_3 d\psi - \right.$$
$$\left. - \int\left(\left(p_0^{(0)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \frac{\left(p_0^{(0)}\right)'}{p_0^{(0)}}\left[\frac{\theta_0'}{\theta_0} - 2\frac{\left(u_0^{(0)}\right)'}{u_0^{(0)}}\right] \frac{u_0^{(0)}}{\theta_0} \int\left[\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}}\int \frac{W}{r^\circ} dx + K_2\right] d\psi\right) d\psi\right\} \tag{2.23}$$

Это уравнение можно решать обычным методом последовательных приближений. В качестве первого приближения естественно взять (2.11). Для второго приближения тогда получим из (2.23) выражение

$$P = \left(p_0^{(0)}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left\{K_4 + \int \left(p_0^{(0)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \frac{\left(p_0^{(0)}\right)'}{p_0^{(0)}}\left[\frac{\theta_0'}{\theta_0} - 2\frac{\left(u_0^{(0)}\right)'}{u_0^{(0)}}\right] \frac{u_0^{(0)}}{\theta_0} K_3 d\psi - \right.$$
$$- \int\left(\left(p_0^{(0)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \frac{\left(p_0^{(0)}\right)'}{p_0^{(0)}}\left[\frac{\theta_0'}{\theta_0} - 2\frac{\left(u_0^{(0)}\right)'}{u_0^{(0)}}\right] \frac{u_0^{(0)}}{\theta_0} \int\left[-\frac{2\theta_0}{\gamma u_0^{(0)}} \operatorname{ctg}\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\theta_0 K}{u_0^{(0)}}\int \frac{W}{r^\circ} dx + K_2\right] d\psi\right) d\psi\right\} \tag{2.24}$$

Если кривизна меридиана не слишком велика, как это и бывает в большинстве реальных случаев, второго приближения достаточно. Для случаев же большой кривизны необходимы дальнейшие приближения. Зная P, можно по написанным выше конечным соотношениям определить Π, U, V. Входящие в результат четыре произвольные функции: $K_1(\psi)$, $K_2(\psi)$, $K_3(x)$, $K_4(x)$, а также возмущение формы ударной волны $y_1^{*(0)}(x)$, найдутся при удовлетворении соответствующим четырем граничным условиям на ударной волне (2.5) и условию обтекания (2.4).

3. Рассмотрим теперь задачу первого приближения (задачу, определенную (1.25) —(1.27)).

Вполне аналогично случаю первого приближения, второе из уравнений (1.25) легко интегрируется

$$w_1^{(1)} = W(x)\left[K(\psi) + \int \frac{T(x, \psi)}{W(x)} dx\right] \tag{3.1}$$

где

$$T(x, \psi) = \frac{p_1^{(0)}}{r^0 \rho_0^{(0)} u_0^{(0)}} + \frac{y^{(0)}}{R}\frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{y^{(0)}}{r^{\circ 2}} \sin\varphi \cos\varphi w_1^{(0)} - \frac{\cos\varphi v_0^{(0)} w_1^{(0)}}{r^\circ u_0^{(0)}} \tag{3.2}$$

известная функция. Произвольная функция $K(\psi)$ определяется при помощи третьего из соотношений (1.27). Тем самым, как и в нулевом приближении, $w_1^{(1)}$ полностью определяется, и после исключения этой функции из задачи получаем систему соотношений для остальных функций

$$\begin{aligned} 2U &= A\frac{\partial P}{\partial \psi} + P - \Pi + \varphi_1 \\ V &= U - B\frac{\partial U}{\partial x} + \varphi_2 \\ U &= \frac{1}{\gamma} CP - C\Pi + K_1 + \varphi_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\Pi + U) &- D\frac{\partial}{\partial \psi}(U - V) + EU + FV + G + \varphi_4 = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где U, V, П, P — выражения, построенные аналогично случаю нулевого приближения, а φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — известные функции, выражающиеся через решения нулевого и первого приближений для задачи при $\alpha = 0$ и решение нулевого приближения для задачи с $\alpha \neq 0$, построенное выше. Ввиду громоздкости этих выражений мы их здесь не приводим.

Дадим только формулу для φ_1

$$\varphi_1(x, \psi) = \frac{R}{(u_0^{(0)})^2}\left[u_0^{(0)}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x} + u_1^{(0)}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial x} - \rho_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial \psi}(v_0^{(0)} u_1^{(0)} - v_1^{(0)} u_0^{(0)})\right] - \frac{2u_0^{(1)} u_1^{(0)}}{(u_0^{(0)})^2} + \frac{2u_1^{(0)} y^{(0)}}{R u_0^{(0)}} + \frac{R}{(u_0^{(0)})^2}(u_0^{(1)} r^\circ + u_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi)\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{R}{\rho_0^{(0)}(u_0^{(0)})^2}\left(\rho_1^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial \psi} - \rho_1^{(0)} u_0^{(1)} r^\circ \frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial \psi} - \rho_1^{(0)} u_0^{(0)} y^{(0)} \cos\varphi \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial p_0^{(0)}}{\partial \psi} - \rho_1^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \psi}\right) \qquad (3.4)$$

Таким образом, мы видим, что уравнения (3.3) отличаются от аналогичных уравнений для нулевого приближения (2.18) только наличием неоднородностей φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Поэтому систему (3.3) можно принципиально решить в точности таким же способом, как и в случае нулевого приближения. Рассмотрим опять три случая.

а) Случай обтекания конуса. Система уравнений в этом случае сильно упрощается и решается в элементарных функциях. Приведем только окончательную формулу для давления:

$$p_1^{(1)} = \left[\frac{4\cos\varphi}{(\gamma-1)M_\infty^2 \sin^3\varphi} - \frac{2}{\sin\varphi\cos\varphi}\left(1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)\right]\frac{\psi^2}{\rho_\infty x^4} +$$

$$+ \frac{16}{15}\sqrt{\frac{2}{\rho_\infty U_\infty}}\left(1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)\frac{\psi^{5/2}}{\rho_\infty \sin^4\varphi\cos\varphi x^5} -$$

$$- \rho_\infty U_\infty^2\left[\left(\frac{\gamma-3}{2(\gamma+1)}k + \frac{1}{2(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)\sin 2\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2\sin^2\varphi}\right)\left(\frac{8\gamma+3}{15(\gamma+1)} - \frac{\gamma+9}{2(\gamma+1)}\sin^2\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi\right] \qquad (3.5)$$

б) Случай обтекания тела с большим радиусом кривизны. В этом случае с учетом (3.4) первое из уравнений (3.3) упрощается и приводится к виду (3.6)

$$\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \psi} = \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \psi} + \frac{\rho_0^{(0)}}{u_0^{(0)}}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial \psi}(v_0^{(0)} u_1^{(0)} - v_1^{(0)} u_0^{(0)}) - \frac{1}{r^\circ}\left(\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial x}\right)$$

Интегрируя, получаем

$$p_1^{(1)} = \int\left[\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \psi} + \frac{\rho_0^{(0)}}{u_0^{(0)}}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial \psi}(v_0^{(0)} u_1^{(0)} - v_1^{(0)} u_0^{(0)}) - \frac{1}{r^\circ}\left(\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{u_1^{(0)}}{u_0^{(0)}}\frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial x}\right)\right]d\psi + p_1(x) \qquad (3.7)$$

Произвольная функция $p_1(x)$ определяется из условия при

$$p_1^{(1)} + \rho_0^{(0)} u_0^{(0)} r^\circ \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \psi} y_1^{*(0)} = -\frac{4}{\gamma+1}\rho_\infty U_\infty^2\left(\cos 2\varphi y_0^{*\prime} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\frac{dy_1^{*(0)}}{dx}\right)$$

$$\psi = \psi_0^* \qquad (3.8)$$

Тем самым $P(x, \psi)$ становится известной функцией. С учетом этого получаем из (3.2)

$$V = U - B\frac{\partial U}{\partial x} + \varphi_2, \qquad \Pi = \frac{1}{\gamma}P - \frac{1}{C}(U - K_1 - \varphi_3)$$

$$-BD\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial\psi} + \left(1 - \frac{1}{C} - D\frac{\partial B}{\partial\psi} - BF\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x} + G + H = 0 \qquad (3.9)$$

где

$$H(x, \psi) = \frac{1}{C}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - D\frac{\partial\varphi_2}{\partial\psi} + F\varphi_2 + \varphi_4 \qquad (3.10)$$

Интегрируя последнее уравнение в (3.9), получаем (3.11)

$$U = \frac{(u_0^{(0)})'}{\theta_0}\left\{K_3(x) + \int_0^{\psi}\left[\frac{\theta_0 P}{\gamma u_0^{(0)}} + \frac{\theta_0}{u_0^{(0)}}\int\frac{w_1^{(0)}}{r^\circ}dx + \frac{(u_0^{(0)})'}{u_0^{(0)}}\int H\,dx\right]d\psi\right\} + K_2(\psi)$$

Произвольные функции определяются из граничных условий, и задача оказывается полностью решенной.

в) Общий случай. Легко заметить, что, разрешив соотношения (3.3) относительно Π, U и V, получим выражения типа (2.16), отличающиеся от последних только тем, что в них в правых частях будут дополнительные слагаемые — известные функции, линейные комбинации из φ_1, φ_2, φ_3. Точно так же результатом подстановки полученных выражений для Π, U и V в последнее из соотношений (3.3) является уравнение для P, которое отличается от (2.17) только тем, что в нем к функции G прибавлена некоторая комбинация I из φ_1, φ_2, φ_3.

Поэтому решение этого уравнения получится путем замены в соответствующей формуле для решения в нулевом приближении величины G на $G + I$. По найденному P при помощи соответствующих формул определяются Π, V, U. Произвольные функции определяются из граничных условий.

В заключение отметим, что системы уравнений для дальнейших приближений будут иметь тот же вид, что и для рассмотренных, только правые части будут каждый раз получаться своими и будут выражаться через решения в предыдущих приближениях для задачи при $\alpha \neq 0$ и соответствующие решения в предыдущих и в том же приближении для задачи с $\alpha = 0$.

В каждом последующем приближении будут иметь место соответствующие линейные граничные условия. Процедура решения задачи в каждом из последующих приближений будет идентична процедуре в уже рассмотренных выше нулевом и первом приближениях, хотя фактическая ее реализация будет становиться все более громоздкой.

Выражаем благодарность коллективу научных сотрудников кафедры гидро-аэромеханики Пекинского университета за обсуждение нашей работы.

Поступила 12 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
2. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 7.