

УДК 539.3

ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ И ВТОРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ

С. В. Левяков

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Приведено общее аналитическое решение задачи о закритическом деформировании прямого нерастяжимого стержня, нагруженного продольной силой. Исследован изгиб стержня при различных граничных условиях и найдены новые формы равновесия, связанные со вторичной потерей устойчивости. Показано, что для стержней с шарнирно опертыми и защемленными концами бифуркация решения происходит при совмещении концов.

Введение. В [1] показано, что при сжимающей нагрузке, превышающей эйлерово критическое значение, возможна вторичная потеря устойчивости шарнирно опертого стержня. В [2, 3] с использованием численного алгоритма исследованы нелинейное деформирование и устойчивость стержней с опертыми и защемленными концами. Там же найдены точки бифуркации и ветви решений, неизвестные ранее. В этой связи представляет интерес аналитическое исследование закритического поведения стержня.

Известно, что точное решение задачи о сильном плоском изгибе нерастяжимого упругого стержня, нагруженного сосредоточенными силами и моментами на его концах, может быть записано через эллиптические интегралы [4] или эллиптические функции Якоби [5]. В [5] рассмотрена задача об определении плоских форм равновесия стержня, нагруженного концевыми силами (задача об эластике). Дано общее аналитическое решение задачи в предположении, что линия действия результирующей концевых сил фиксирована. Однако использование решения [5] для анализа закритических форм равновесия сжатых прямых стержней при различных условиях опирания концов затруднительно, так как в некоторых случаях изгиба стержня направление результирующей силы, действующей на конец стержня, становится неизвестным вследствие возникновения опорной реакции. Кроме того, данное решение не описывает состояния равновесия, связанные со вторичной потерей устойчивости стержней, найденные численным методом в [2, 3].

В настоящей работе решение [5] обобщается на случай несимметричного деформирования стержня, что позволяет получить известные результаты [4, 5], а также описать найденные в [2, 3] ветви решений. Сформулирована задача об определении особых точек полученных нелинейных решений.

1. Общее решение задачи о закритическом деформировании сжатого стержня. Рассмотрим закритические изгибные деформации первоначально прямого нерастяжимого стержня длиной l с постоянной изгибной жесткостью EI , сжатого продольной силой P . Выберем декартову систему координат xOy так, чтобы ось абсцисс совпадала с осью недеформированного прямого стержня, а начало координат было помещено на левом конце стержня. Обозначим через β угол между касательной к упругой линии и осью Ox . Уравнение равновесия стержня имеет вид

$$EI \frac{d^2\beta}{ds^2} + P \sin \beta - R \cos \beta = 0, \quad (1.1)$$

где s — длина дуги оси стержня ($0 \leq s \leq l$); R — реакция опоры, действующая в направлении оси Oy ; направление действия силы P совпадает с осью Ox . Полагаем, что помимо граничных условий решение уравнения (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\int_0^l \sin \beta ds = 0, \quad (1.2)$$

которое выражает равенство ординат концов стержня.

Для интегрирования уравнения (1.1) упростим его, выразив концевые силы P и R через результирующее усилие H :

$$P = H \cos \alpha, \quad R = H \sin \alpha. \quad (1.3)$$

Здесь α — угол между направлением действия результирующей силы H и осью Ox . В общем случае угол α является неизвестной величиной. Подставляя (1.3) в уравнение (1.1), находим его первый интеграл

$$\frac{EI}{2H} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 - \cos(\beta - \alpha) = C, \quad (1.4)$$

где C — постоянная интегрирования. Положим

$$C = 2k^2 - 1, \quad (1.5)$$

где k — параметр, называемый модулем эллиптического интеграла. Дальнейшее построение решения связано с введением эллиптических функций модуля k и аргумента u [6]

$$u = \sqrt{\frac{H}{EI}} s + u_1, \quad k \operatorname{sn} u = \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad (1.6)$$

где значения u_1, u_2 определяются видом граничных условий на концах стержня и зависят от модуля k .

Используя (1.5), (1.6), преобразуем уравнение (1.4) к виду

$$\beta' = 2k \operatorname{cn} u. \quad (1.7)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по переменной u . Решение уравнения (1.7) имеет вид

$$\beta = \theta + \alpha, \quad \theta = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} u). \quad (1.8)$$

Интегрируя соотношения $dx/ds = \cos \beta$ и $dy/ds = \sin \beta$ с учетом (1.6) и (1.8), получим уравнение элаستيку в параметрическом виде

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \quad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \quad (1.9)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{EI}{H}} [-u + u_1 + 2(E \operatorname{am} u - E \operatorname{am} u_1)], \quad \eta = \sqrt{\frac{EI}{H}} 2k(\operatorname{cn} u_1 - \operatorname{cn} u),$$

где $E \operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u du$ — неполный эллиптический интеграл второго рода. Из первых

двух соотношений в (1.9) следует, что система координат стержня xOy повернута относительно системы координат элаستيку $\xi O\eta$ на угол α (ось $O\xi$ совпадает с осью сжатия элаستيку [5]).

Интегрируя (1.2) с использованием (1.6) и (1.8), получим условие

$$2k(\operatorname{cn} u_1 - \operatorname{cn} u_2) \cos \alpha + [u_1 - u_2 - 2(E \operatorname{am} u_1 - E \operatorname{am} u_2)] \sin \alpha = 0. \quad (1.10)$$

Построение решения о закритическом изгибе стержня при некотором заданном модуле k сводится к определению трех параметров u_1 , u_2 и α из двух граничных условий на концах стержня и уравнения (1.10). Конфигурация стержня определяется выражениями (1.9), где результирующее усилие вычисляется по формуле $H = (u_2 - u_1)^2 EI/l^2$, следующей из первого соотношения (1.6) при $s = l$. Комбинируя соотношения (1.3) и (1.6), находим связь между нагрузкой P и указанными параметрами

$$P = (u_2 - u_1)^2 \cos \alpha \frac{EI}{l^2}. \quad (1.11)$$

2. Анализ решения для различных условий опирания стержня. Используя соотношения п. 1, рассмотрим решения задачи о закритическом изгибе стержня для нескольких случаев опирания его концов.

2.1. *Оба конца стержня шарнирно оперты.* С учетом (1.7) условие отсутствия изгибающих моментов при $s = 0, l$ запишется в виде $\operatorname{cn} u_1 = 0$, $\operatorname{sn} u_2 = 0$. Отсюда с учетом периодичности эллиптической функции находим

$$u_1 = K, \quad u_2 = (1 + 2n)K, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.1)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Рассмотрим условие (1.10), которое в силу (2.1) принимает вид

$$(K - 2E \operatorname{am} K) \sin \alpha = 0, \quad (2.2)$$

где $E \operatorname{am} K$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Из (2.2) следует, что возможно два типа решений, диаграмма которых представлена на рис. 1 (см. также рис. 1 в [2]), где w — прогиб середины стержня.

Первый тип решения, соответствующий условию $\sin \alpha = 0$, известен и описывает деформирование стержня после потери устойчивости по n полуволнам при $0 \leq k < 1$. При этом значения $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ соответствуют различным ветвям решения: ветви B_1C и $B_2B_1B_3$ отвечают значению $\alpha = 0$, а ветви B_6A и $B_4B_6B_5$ — значению $\alpha = \pi$. На рис. 1 ветви B_1C и B_6A , соответствующие прямолинейным формам стержня, для наглядности смещены.

Обращение в нуль первого сомножителя в (2.2) происходит при $k_* = 0,908\,908\,557\,549$, $K_* = 2,321\,049\,732\,530$, $E \operatorname{am} K_* = 1,160\,524\,866\,265$ и является условием совмещения концов стержня [5]. При этом параметр α может быть произвольным. Решение второго типа (см. формулу (1.8)) имеет вид $\beta = 2 \arcsin(k_* \operatorname{sn} u) + \alpha$ и описывает вращение деформированного стержня как твердого тела вокруг точки совмещения его концов (замкнутые ветви $B_2B_4B_2$ и $B_3B_5B_3$).

2.2. *Один конец шарнирно оперт, другой заземлен.* Граничные условия имеют вид

$$\beta'(u_1) = 0, \quad \beta(u_2) = 0. \quad (2.3)$$

Для удовлетворения первому условию (2.3) с учетом (1.7) примем

$$u_1 = K. \quad (2.4)$$

Подставляя (1.8) во второе граничное условие (2.3), для угла α получим выражение $\alpha = -2 \arcsin(k \operatorname{sn} u_2)$. Тогда

$$\sin \alpha = -2k \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2, \quad \cos \alpha = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u_2. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в (1.10), получим трансцендентное уравнение для определения u_2

$$(1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u_2) \operatorname{cn} u_2 + [K - u_2 - 2(E \operatorname{am} K - E \operatorname{am} u_2)] \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 = 0. \quad (2.6)$$

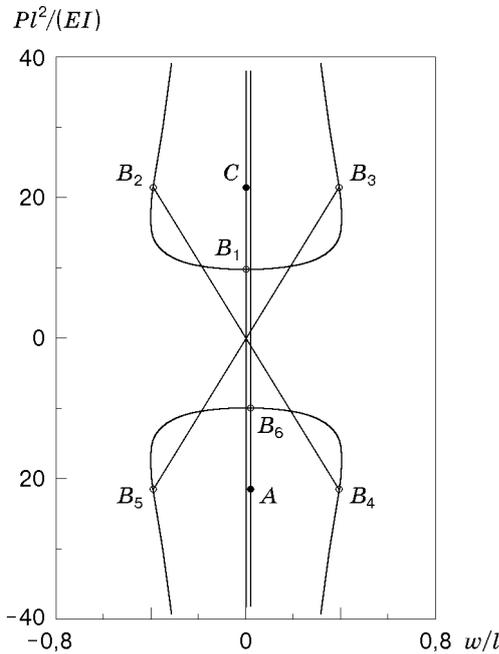


Рис. 1

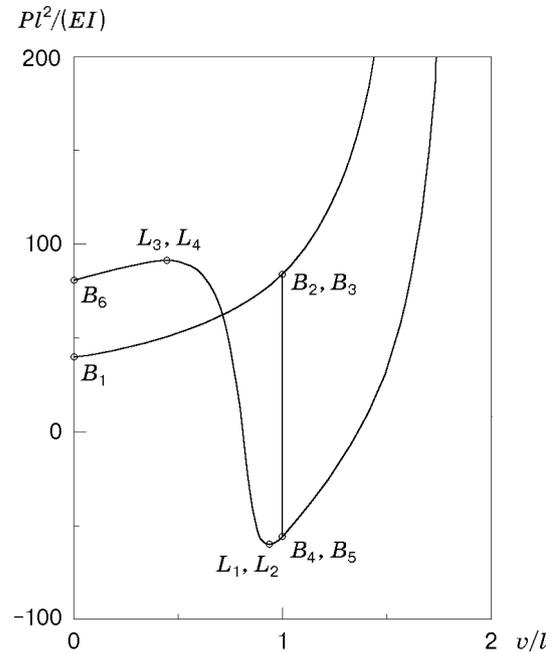


Рис. 2

Аналогичное уравнение выведено в [4] геометрическим способом. Решения, определяемые корнями уравнения (2.6), известны и описывают закритический изгиб стержня после потери устойчивости прямолинейной формы равновесия. Новых ветвей решения не обнаружено.

2.3. *Оба конца стержня защемлены.* При анализе равновесных состояний будем использовать зависимость между нагрузкой P и изменением расстояния между концами стержня v , представленную на рис. 2 (см. также рис. 1 в [3]). Рассмотрим граничные условия

$$\beta(u_1) = 0, \quad \beta(u_2) = 0. \tag{2.7}$$

Выражая $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через u_1, u_2 при помощи соотношений (1.8) и (2.7) и подставляя полученные выражения в (1.10), получим систему трансцендентных уравнений относительно u_1, u_2

$$\begin{aligned} (\operatorname{cn} u_2 - \operatorname{cn} u_1)(1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u_1) + [u_1 - u_2 - 2(E \operatorname{am} u_1 - E \operatorname{am} u_2)] \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 &= 0, \\ (\operatorname{cn} u_2 - \operatorname{cn} u_1)(1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u_2) + [u_1 - u_2 - 2(E \operatorname{am} u_1 - E \operatorname{am} u_2)] \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Система (2.8) допускает три типа решений.

Первый тип решений соответствует случаю

$$\alpha = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 4Kn \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{2.9}$$

где $0 \leq k < 1$. Данное решение описывает симметричные закритические конфигурации стержня (ветвь $B_2 B_1 B_3$ на рис. 2).

Второй тип решений системы (2.8) соответствует случаю $\alpha \neq 0, 0 \leq k < 1$ и описывает несимметричные закритические конфигурации стержня с точкой перегиба в среднем сечении. При этом между параметрами u_1 и u_2 существует зависимость $u_1 + u_2 = 2(2n - 1)K$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Этому типу решений соответствует ветвь $B_4 L_1 L_3 B_6 L_4 L_2 B_5$ (рис. 2), описывающая деформирование при развитии второй формы потери устойчивости прямого стержня.

где $C_3 = \Delta R/H$. Заметим, что дифференциальное уравнение, аналогичное (3.1), рассматривалось в [7] при анализе устойчивости кругового кольца, сжатого радиальными силами.

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\Delta\beta = C_1 F_1(u) + C_2 F_2(u) + C_3 F_3(u), \quad (3.3)$$

где $F_1(u) = \operatorname{cn} u$; $F_2(u) = [E \operatorname{am} u - (1 - k^2)u] \operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$; $F_3(u) = \cos \alpha + k u \operatorname{cn} u \sin \alpha$; C_1, C_2 — произвольные постоянные. Производные функций $F_1(u), F_2(u)$ и $F_3(u)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} F_1'(u) &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, & F_2'(u) &= (k^2 - \operatorname{dn}^2 u) \operatorname{cn} u - [E \operatorname{am} u - (1 - k^2)u] \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ F_3'(u) &= k(\operatorname{cn} u - u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) и вычисляя квадратуры, получим условие

$$C_1 J_1 + C_2 J_2 + C_3 J_3 = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \cos \alpha \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u \Big|_{u_1}^{u_2} + k \sin \alpha \operatorname{cn}^2 u \Big|_{u_1}^{u_2}, \\ J_2 &= \cos \alpha [E \operatorname{am} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u + (\operatorname{dn}^2 u - k^2) \operatorname{cn} u - (1 - k^2)u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u] \Big|_{u_1}^{u_2} + \\ &\quad + k \sin \alpha [E \operatorname{am} u \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u + (1 - k^2)u \operatorname{sn}^2 u] \Big|_{u_1}^{u_2}, \\ J_3 &= \cos^2 \alpha (2E \operatorname{am} u - u) \Big|_{u_1}^{u_2} + k \sin \alpha \cos \alpha (3 \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u) \Big|_{u_1}^{u_2} - \sin^2 \alpha (E \operatorname{am} u - u \operatorname{dn}^2 u) \Big|_{u_1}^{u_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подчиняя общее решение (3.3) граничным условиям на концах стержня и используя условие (3.5), получим систему трех однородных уравнений относительно постоянных C_1, C_2 и C_3 . Таким образом, задача определения особых точек решения сводится к нахождению условий, при которых определитель данной системы обращается в нуль. Рассмотрим различные случаи опирания концов стержня.

3.1. *Оба конца стержня шарнирно оперты.* Из граничных условий $\Delta\beta'(u_1) = 0$, $\Delta\beta'(u_2) = 0$ и условия (3.5) с учетом (2.1), (3.4) и (3.6) получим систему

$$\begin{aligned} C_1 + [E \operatorname{am} K - (1 - k^2)K]C_2 &= 0, & C_1 - (1 + 2n)[E \operatorname{am} K - (1 - k^2)K]C_2 &= 0, \\ (\operatorname{dn} K)C_1 + \operatorname{dn} K[E \operatorname{am} K - (1 - k^2)K] &+ [(1 + 2n)(-1)^n - 1]C_2 + 2n(2E \operatorname{am} K - K)C_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$[E \operatorname{am} K - (1 - k^2)K](2E \operatorname{am} K - K) = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно показать, что первый множитель в (3.8) всегда положителен, а второй обращается в нуль при $k = k_*$, т. е. при совмещении концов стержня (см. подп. 2.1). Согласно (1.11) и (2.1) вторичная потеря устойчивости происходит при значениях критической нагрузки $(P_n)_* = (2K_*n)^2 EI/l^2$.

Из решения системы (3.7) при $k = k_*$ следует, что $C_1 = 0, C_2 = 0$, а C_3 — произвольная постоянная. Согласно (3.3) функция, описывающая возмущенное состояние стержня, имеет вид $\Delta\beta = C_3$, т. е. форма потери устойчивости — это жесткий поворот деформированного стержня вокруг точки совмещения его концов. На рис. 1 точки B_2, B_3, B_4 и B_5 являются точками бифуркации решения, соответствующими случаю $n = \pm 1$.

3.2. *Оба конца стержня заземлены.* Исследуем бифуркацию решения первого типа (см. подп. 2.3). Используя граничные условия $\Delta\beta(u_1) = 0, \Delta\beta(u_2) = 0$ и соотношение (3.5) с учетом (2.9), (3.3) и (3.6), приходим к системе

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_1 + 4n[E \operatorname{am} K - (1 - k^2)K]C_2 + C_3 = 0, \quad (2E \operatorname{am} K - K)C_3 = 0. \quad (3.9)$$

Из условия существования нетривиальных решений системы (3.9) следует рассмотренное выше характеристическое уравнение (3.8). Следовательно, критическое состояние изогнутого стержня с заземленными концами, как и в случае шарнирно опертого стержня, наступает при совмещении его концов (см. рис. 3, конфигурации 1, 3). Критическим состояниям соответствуют точки B_2, B_3 на рис. 2 для случая $n = \pm 1$. Согласно (1.11) и (2.9) значение критической нагрузки, соответствующей вторичной потере устойчивости, равно $(P_n)_* = (4nK_*)^2 EI/l^2$.

Из решения системы (3.9) при $k = k_*$ следует, что $C_1 = -C_3$, $C_2 = 0$ и C_3 — произвольная постоянная. Согласно (3.3) форма потери устойчивости изогнутого стержня описывается функцией

$$\Delta\beta = C_3(1 - \operatorname{cn} u). \quad (3.10)$$

Линеаризуя и затем интегрируя соотношения $d\tilde{x}/ds = \cos(\beta + \Delta\beta)$, $d\tilde{y}/ds = \sin(\beta + \Delta\beta)$ с учетом (1.6), (1.8), (2.9) и (3.10), получим приближенные формулы для координат осевой линии стержня в возмущенном состоянии

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{l}{4nK_*} \left[-u + 2E \operatorname{am} u + 2k_* C_3 \left(\frac{1}{2} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn} u - 1 \right) \right], \\ \tilde{y} &= \frac{l}{4nK_*} [2k_*(1 - \operatorname{cn} u) + C_3(-u + 2E \operatorname{am} u - \operatorname{dn} u \operatorname{sn} u)], \quad 0 \leq u \leq 4nK_*. \end{aligned} \quad (3.11)$$

На рис. 3 представлены формы стержня (кривые 6 и 7), вычисленные по формулам (3.11) при $n = 1$, $C_3 = \pm 0,2$. Эти результаты показывают, что в данной точке бифуркации происходит переход к решению третьего типа (см. подп. 2.3).

Численным методом можно исследовать решения двух других типов.

Решение, рассмотренное в подп. 2.3, имеет четыре точки бифуркации B_2, B_3, B_4 и B_5 (см. рис. 2), которым соответствуют значения $u_1 = 0, K_*, 2K_*, 3K_*$. При этом точкам B_4 и B_5 соответствует значение нагрузки $(P_n)_* = -(4nK_*)^2(2k_*^2 - 1)EI/l^2$.

Анализ решения, описывающего развитие второй формы потери устойчивости прямого стержня (см. подп. 2.3), позволяет выявить помимо известной точки бифуркации B_6 особые точки L_1 (L_2), L_3 (L_4), которые являются предельными [3], и уже рассмотренную точку бифуркации B_4 (B_5). С использованием метода деления отрезка пополам для точек L_1 (L_2) и L_3 (L_4) найдены следующие значения нагрузки: $P = 92,038\,346EI/l^2$ при $k = 0,669\,523$ и $P = -60,838\,189EI/l^2$ при $k = 0,908\,084$ соответственно.

Исследование изгиба стержня с опертым и заземленным концами позволяет найти предельные точки при $k = 0,669\,523$ и $k = 0,908\,084$.

Наконец, в случае консольного стержня особых точек не обнаружено.

Заключение. Рассмотрена задача о закритическом изгибе прямого упругого стержня, нагруженного продольной силой. Дано аналитическое решение задачи, которое является обобщением известного решения задачи об эластике и позволяет описать несимметричные равновесные конфигурации, в том числе связанные со вторичной потерей устойчивости стержней. Сформулирована и решена в общем виде задача об определении особых точек полученного нелинейного решения. Для выяснения вопросов о типе особых точек и устойчивости состояний равновесия требуются дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коробейников С. Н.** Вторичная потеря устойчивости сжатого шарнирно опертого стержня // Тез. докл. IV Междунар. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1995. С. 104.

2. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** О вторичной потере устойчивости эйлера стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 184, 185.
3. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Эластика эйлера стержня с зацементированными концами // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 184–186.
4. **Крылов А. Н.** О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
5. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
7. **Сейде П., Албано Е. Д.** Бифуркация круговых колец под действием нормальных сосредоточенных нагрузок // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. 1973. Т. 40, № 3. С. 242–248.

*Поступила в редакцию 25/IV 2000 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 2000 г.*
