

УДК 533.6.011.72

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ ГАЗА С ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

А. Л. Адрианов, А. А. Безруков, Ю. А. Гапоненко

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Численно изучаются различные режимы взаимодействия осесимметричной сверхзвуковой недорасширенной струи газа как с конечной, так и с плоской безграничной преградами. Использована модель идеального совершенного газа и один из вариантов схемы Годунова повышенного порядка точности. Проведено сравнение вычисленных и экспериментальных частотных спектров колебаний давления в центре преграды, получено их хорошее соответствие.

### ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие осесимметричной сверхзвуковой струи с перпендикулярной к ее оси плоской преградой экспериментально и теоретически изучалось достаточно подробно (см., например, [1–6]). Тем не менее имеются расхождения между результатами численного расчета и физического эксперимента, в особенности для плоской безграничной преграды. Причина этого несоответствия заключается в том, что большинство исследователей при проведении численных экспериментов использовали преграду конечных размеров (порядка размера сопла), так как в этом случае обнаруживается автоколебательный процесс с небольшим количеством гармоник и четким основным тоном со значительной амплитудой, что позволяет провести сравнение с результатами физического эксперимента. Для безграничной (значительных размеров) преграды из результатов физического эксперимента следует, что автоколебательный механизм выражен менее отчетливо и характеризуется сложным частотным спектром, который трудно воспроизвести численной моделью (разностной схемой). Заметим, что результаты независимых физических экспериментов, проведенных на различном оборудовании, хорошо согласуются между собой. Это подтверждает их достоверность. Причиной расхождения между результатами численных расчетов и экспериментальными данными может являться качество используемого численного метода и формулировка граничных условий.

В настоящей работе применяемая численная модель тестируется на двух автоколебательных процессах (с известными характеристиками) взаимодействия струи с преградой при их нормальном взаиморасположении. Результаты расчетов сопоставляются с данными независимо проведенных физических экспериментов. Выбор геометрических размеров расчетной области и размера преграды соответствует постановке задачи в том или ином физическом эксперименте.

### 1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

**1.1. Постановка задачи (граничные и начальные условия).** Коническое сопло радиусом  $OA \equiv r_A = 1$  (после соответствующего обезразмеривания) с полууглом раскрытия  $\theta_A$  находится на расстоянии  $h$  от плоской преграды  $DF$ , которая расположена нормально по отношению к соплу (рис. 1). Сверхзвуковое истечение из данного сопла

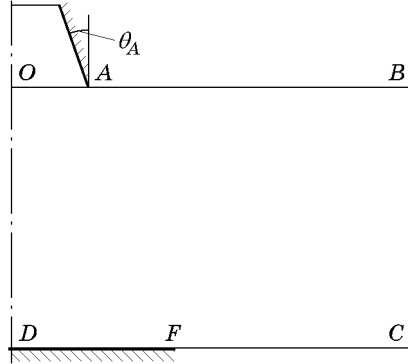


Рис. 1

(участок  $OA$  границы расчетной области) моделируется течением от изэнтропического источника. Участок  $OD$  границы расчетной области — ось симметрии. Участки “границы”  $AB$ ,  $BC$ ,  $CF$  являются “прозрачными” для возмущений, выходящих из области. На них ставились “неотражающие” условия Томпсона [7]. Изменением положения точки  $F$ , разделяющей различные участки границы  $DC$ , моделируется конечный размер преграды (предельный случай  $DF = DC$  соответствует безграничной преграде).

В начальный момент пространство вокруг сопла заполнено неподвижным газом, состояние которого определяется давлением  $p_\infty$ , плотностью  $\rho_\infty$  и показателем адиабаты  $\gamma$ . На срезе сопла по заданному числу Маха на кромке сопла  $M_A$ , нерасчетности  $n$  и приведенным параметрам окружающего пространства рассчитывается стационарное течение от указанного выше источника, сводящееся, по существу, к определению числа Маха  $M$  в произвольной точке участка  $OA$  границы расчетной области (рис. 1).

**1.2. Основные уравнения.** Для описания нестационарных пространственных (с плоской и осевой симметрией) течений невязкого нетеплопроводного газа запишем систему уравнений газовой динамики в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = -\mathbf{H},$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, e)^\top, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e + p)u)^\top,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e + p)v)^\top, \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \frac{\nu}{y} (\rho v, \rho uv, \rho v^2, (e + p)v)^\top, \quad (1)$$

$$e = \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad \varepsilon(p, \rho) = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

где  $\rho$  — плотность;  $u, v$  — компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $p$  — давление;  $e$  — полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\nu = 0, \nu = 1$  для плоской и осевой симметрии соответственно.

**1.3. Метод решения.** Известно [1, 3], что для численного описания течений невязкого нетеплопроводного газа идеальным с точки зрения точности (ошибок аппроксимации) является метод выделения разрывов. Как показано в [3], к двумерным стационарным сверхзвуковым течениям данный метод может применяться практически без ограничений, с выделением (и возможной фильтрацией) всех газодинамических разрывов включая слабые. Однако в данном случае использование подобного подхода, как и подхода [1] (с выделением лишь “основных” разрывов), не оправданно в силу резкого возрастания сложности алгоритма выделения заранее неизвестной структуры разрывов. При решении задачи использовался метод сквозного счета, описанный ниже.

Для численного интегрирования системы уравнений (1) применялась квазимоноотонная разностная схема (РС) повышенного порядка точности [8], являющаяся модификацией известной двумерной РС С. К. Годунова [1]. Кратко опишем используемую схему.

Разностный аналог системы уравнений (1) на прямоугольной сетке может быть записан в виде следующей двухшаговой РС:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\tau}{h_x} (\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n) - \frac{\tau}{h_y} (\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n) - \frac{\nu\tau}{y_{i,j}} \mathbf{H}_{i,j}^n, \quad (2)$$

где  $h_x \equiv \Delta x = x_{i+1/2,j} - x_{i-1/2,j}$ ,  $h_y \equiv \Delta y = y_{i,j+1/2} - y_{i,j-1/2}$ ,  $\tau = t^{n+1} - t^n$  — шаги сетки. Индексы  $i, j$  соответствуют значениям величин в центрах ячеек (“малым” величинам в схеме С. К. Годунова),  $i \pm 1/2, j \pm 1/2$  — значениям на ребрах сетки (“большим” величинам в схеме С. К. Годунова),  $n$  — значениям величин на временном слое  $t = n\tau$ . В данном варианте схемы для повышения порядка точности по пространственным переменным вместо кусочно-постоянной (схемы С. К. Годунова) аппроксимации решения применяется кусочно-непрерывная с линейным распределением величин по ячейке. При этом “большие” величины, например  $(R, U, P)_{i+1/2,j}$ ,  $(R, V, P)_{i,j+1/2}$ , входящие в компоненты вспомогательных векторов  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{m}_L, \mathbf{m}_R)$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_R)$ , вычисляются из решения соответствующей одномерной задачи о распаде произвольного разрыва при следующих входных параметрах:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{L,i+1/2,j} &= (\rho, u, p)_{L,i+1/2,j}^T, & \mathbf{m}_{R,i+1/2,j} &= (\rho, u, p)_{R,i+1/2,j}^T, \\ \mathbf{g}_{L,i,j+1/2} &= (\rho, v, p)_{L,i,j+1/2}^T, & \mathbf{g}_{R,i,j+1/2} &= (\rho, v, p)_{R,i,j+1/2}^T. \end{aligned}$$

В соответствии с принятым линейным распределением величин по ячейке выражения для компонент векторов запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_L &= m_{i,j} + \frac{1}{2} \Phi(r_{i,j})(m_{i,j} - m_{i-1,j}), & m_R &= m_{i+1,j} - \frac{1}{2} \Phi(r_{i+1,j}^{-1})(m_{i+1,j} - m_{i,j}), \\ g_L &= g_{i,j} + \frac{1}{2} \Phi(s_{i,j})(g_{i,j} - g_{i,j-1}), & g_R &= g_{i,j+1} - \frac{1}{2} \Phi(s_{i,j+1}^{-1})(g_{i,j+1} - g_{i,j}), \end{aligned}$$

где  $r_{i,j} = (m_{i+1,j} - m_{i,j}) / (m_{i,j} - m_{i-1,j})$ ;  $s_{i,j} = (g_{i,j+1} - g_{i,j}) / (g_{i,j} - g_{i,j-1})$ ; индексы  $L$  и  $R$  соответствуют левой и правой (нижней и верхней) окрестностям данного ребра.

Функция  $\Phi(r)$  выполняет роль ограничителя производной и монотонизатора решения. Как показано в [9], в зависимости от вида функции  $\Phi(r)$  может быть построено семейство “монотонных” РС, имеющих второй порядок точности по пространственным переменным в областях гладкости решения и обладающих высокой степенью локализации газодинамических разрывов. При расчетах в качестве функции  $\Phi(r)$  использовался ограничитель  $\Phi(r) = (r + |r|) / (1 + |r|)$ .

Шаг интегрирования по времени  $\tau$  выбирается в процессе счета на каждом временном слое из условий устойчивости для двумерной схемы [1]:  $\tau = K\tau_x\tau_y / (\tau_x + \tau_y)$ , где  $0 < K < 1$ ;  $\tau_x, \tau_y$  — временные интервалы, за которые волны, образующиеся в задаче о распаде разрыва, достигают грани ячейки по осям  $x, y$  соответственно.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**2.1. Автоколебательное течение при взаимодействии струи с преградой конечных размеров.** Расчет проводился для струи со следующими параметрами: число Маха на срезе сопла  $M_A = 2$ , нерасчетность  $n = 3$ , коэффициент адиабаты  $\gamma = 1,4$ , радиус сопла  $r_A = 15$  мм, полуугол раскрытия сопла  $\theta_A = 10^\circ$ . Плоская преграда размером  $r_F = 6,5r_A$  помещалась в стационарное течение на расстоянии  $h = 7,3r_A; 7,5r_A; 8,0r_A$

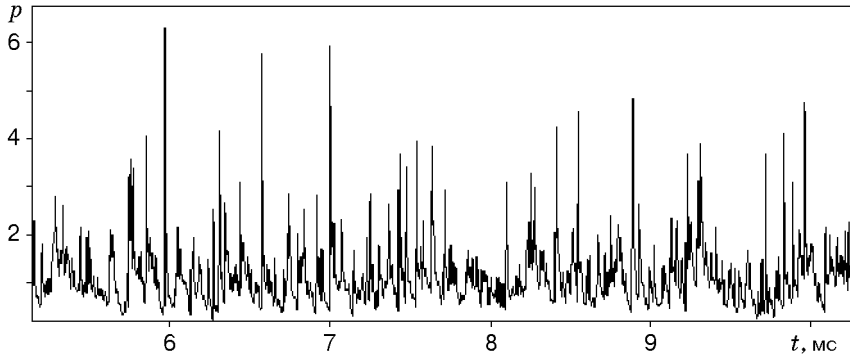


Рис. 2

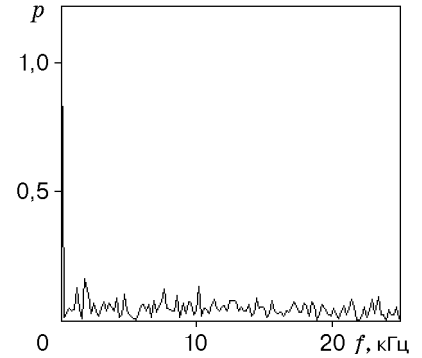


Рис. 3

от среза сопла. Расчет выполнялся на равномерной сетке  $\Delta x = \Delta y = 0,05r_A$ . Результаты расчета при  $h = 8r_A$  представлены на рис. 2, 3 (на рис. 2 показан график пульсаций безразмерного давления на преграде в точке торможения, на рис. 3 — частотный спектр процесса  $p(t)$ ).

Одним из результатов проведенной серии расчетов (различные  $h$ ) является удовлетворительное совпадение основной частоты моделируемого процесса и соответствующей частоты в экспериментах [5, 6] (см. таблицу). Кроме основной частоты выявлены также дополнительные частоты, не отмеченные в [5, 6], по-видимому, из-за инерционности применяемого измерительного оборудования и грубости используемого численного метода (метода крупных частиц).

$h$	Частоты из эксперимента, кГц		Полученные частоты, кГц
	[5, 6]	[10]	
$7,3r_A$	1,33	—	1,556; 2,140; 7,976; 11,868
$7,5r_A$	1,33	—	1,315; 1,972; 4,932; 11,837
$8,0r_A$	1,18	—	1,167; 1,751; 7,587; 10,117
$6,39r_A$	—	10,01; 19,531; 29,297	10,76; 19,36; 31,19
$6,95r_A$	—	9,033; 17,822; 26,611	9,971; 28,339; 32,557
$7,51r_A$	—	8,301; 16,602; 23,715	8,921; 17,843; 26,240

**2.2. Автоколебательное течение при взаимодействии струи с безграничной преградой.** Безграничная преграда помещалась в установившееся течение со следующими параметрами:  $M_A = 2,098$ ;  $n = 4,785$ ;  $\gamma = 1,4$ ;  $\theta_A = 4^\circ$ . Расчет проводился на равномерной сетке  $\Delta x = \Delta y = 0,05r_A$ . Результаты расчета при  $h = 6,95r_A$  представлены на рис. 4, 5. Радиус выходного сечения сопла  $r_A$  полагался равным радиусу выходного сечения сопла в эксперименте [10]. На рис. 4 показан график пульсаций давления на преграде в точке торможения. На рис. 5 приведен частотный спектр процесса  $p(t)$ .

Полученные в результате серии расчетов и экспериментальные [10] частоты представлены в таблице. Можно отметить удовлетворительное соответствие (с погрешностью примерно 5–7%) результатов расчета и экспериментальных значений частот. При численном решении (в случае безграничной преграды) получены высокочастотные составляющие частотного спектра (28 кГц и выше) с амплитудой, превышающей экспериментальную. На наш взгляд, это объясняется использованием модели идеального (невязкого) газа и недостаточной схемной вязкостью применяемого численного метода, а также инерционностью измерительной аппаратуры в физическом эксперименте [10].

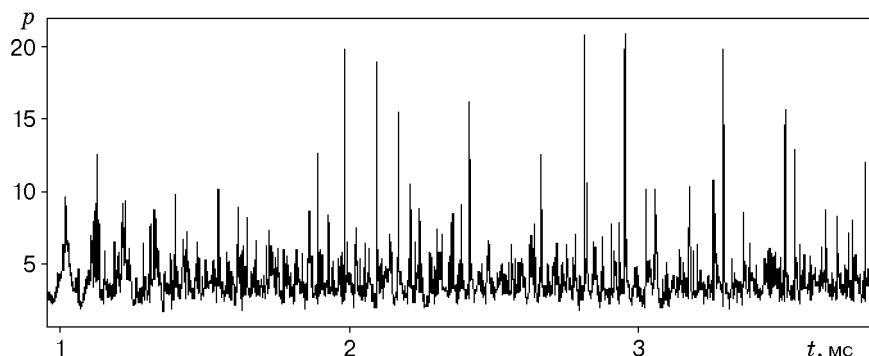


Рис. 4

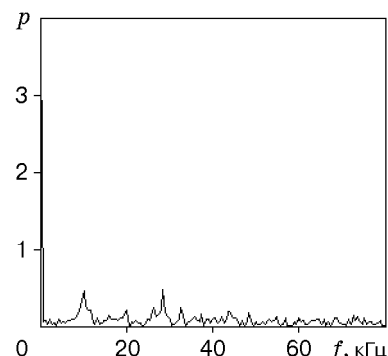


Рис. 5

Отметим, что хорошее соответствие численных результатов и экспериментальных данных получено также в случаях стационарного течения, образующегося при взаимодействии сверхзвуковой струи с безграничной преградой, и автоколебательного течения с известными характеристиками при взаимодействии струи с преградой размером порядка диаметра среза сопла [10].

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ полученных результатов показал их хорошее количественное соответствие результатам физических экспериментов [5, 10], например при сравнении частот пульсаций давления в точке торможения на преграде. Изучен механизм автоколебаний, который имеет следующие особенности (ранее отмечавшиеся в литературе). Периферийное сверхзвуковое течение, обладающее большим давлением торможения, пережимает центральный дозвуковой поток с образованием периферийной критической точки. Замыкание центральной зоны течения приводит к накоплению в ней газа, смещению центрального скачка в сторону сопла, что вызывает повышение давления перед преградой с последующим замыканием этой зоны. Малая схемная вязкость применяемого численного метода не позволяет погасить высокочастотные процессы в замкнутой центральной зоне. В то же время ее недостаточно для сглаживания значительных нефизичных скачков (“шума”) на преграде в точке торможения (см. рис. 3, 5). Тем не менее частотные характеристики, полученные с помощью фурье-анализа, соответствуют экспериментальным данным.

Следует отметить, что с увеличением размера преграды увеличивается и расстояние, на которое перемещается периферийная критическая точка, а следовательно, растет размер замкнутой центральной зоны. При этом в спектре появляются высокочастотные составляющие, которые при численном моделировании могут не воспроизводиться методами с большой схемной вязкостью (см., например, [6]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты подтверждают удовлетворительную точность и гибкость применяемой численной модели при решении задачи о нестационарном взаимодействии сверхзвуковой осесимметричной струи с нормально расположенной плоской преградой различных размеров. Результаты расчетов соответствуют экспериментальным и расчетным данным о существовании автоколебательного режима взаимодействия в определенном диапазоне параметров задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

2. **Гинзбург И. П., Семилетенко Б. Г., Усков В. Н.** Экспериментальное исследование взаимодействия недорасширенной струи с плоской преградой, перпендикулярной оси струи // Газодинамика и теплообмен: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. Сб. 3. С. 85–101.
3. **Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
4. **Альбазаров Б. Ш., Рудаков А. И., Фатов А. С.** Численное моделирование автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду // Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики: Сб. науч. тр. / Под ред. А. В. Забродина. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1991. С. 10–14.
5. **Труды ЦАГИ. М., 1976. Вып. 1765:** Неустойчивое взаимодействие расширяющейся сверхзвуковой струи с преградой / Г. В. Набережнова, Ю. Н. Нестеров.
6. **Молессон Г. В.** Численное исследование растекания струи при ее нормальном падении // Тр. ЦАГИ. 1988. Вып. 2411. С. 30–41.
7. **Thompson K. W.** Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 1987. V. 68, N 1. P. 1–24.
8. **Безруков А. А.** Применение квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации в моделировании разрывных газодинамических течений // Моделирование в механике. 1991. Т. 5, № 5. С. 22–29.
9. **Spekreijse S.** Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws // Math. Comput. 1987. V. 49, N 179. P. 135–155.
10. **Гапоненко Ю. А., Адрианов А. Л., Безруков А. А., Фаворский В. С.** Расчетно-экспериментальное исследование взаимодействия сверхзвуковой струи газа с различными преградами // Математическое моделирование в механике: Сб. науч. тр. / ВЦ СО РАН. Красноярск, 1997. С. 108–124. Деп. в ВИНТИ 7.11.97, № 3357-B97.

*Поступила в редакцию 29/VII 1998 г.*

---