

Представление одномерного спектра продольной составляющей пульсации скорости в виде (2.3) (см. фиг. 4, в, кривая в) носит автомодельный характер в пристеночном пограничном слое (заштрихованная область соответствует следующим параметрам взаимодействия: $d_a = 30$; 100 мм; $H = 1-16$; $r = 0,8-6$; $y = 0,1-1,4$ мм). Наличие спектральной автомодельной кривой (2.3) позволяет описать распределение коэффициента продольной корреляции R_{1r} в пограничном слое с помощью интегрального преобразования Фурье также универсальной зависимостью (2.1).

В заключение следует отметить, что соотношения (2.1)–(2.3) и (3.1)–(3.3), характеризующие, как правило, изотропную турбулентность, справедливы (с точностью проведения эксперимента) и для реального неизотропного течения, что позволяет считать микроструктуру потока локально-изотропной, а сами зависимости — интересным приближением для практических расчетов при струйном обтекании преград.

Поступила 4 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов П. А., Горшков Г. Ф. и др. Экспериментальное исследование газодинамических параметров при струйном обтекании преграды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 2.
2. Горшков Г. Ф., Белов П. А., Тернигорьев В. С. Процессы теплопереноса и микроструктура пограничного слоя в окрестности точки торможения при струйном обтекании преграды.— В кн.: Тепломассообмен-VI. Т. 1, ч. 2. Минск: изд. ИТМО АН БССР, 1980.
3. Дылан Е. П., Эпик Э. Я. Воздействие турбулентной вязкости внешнего течения на теплообмен в пограничных слоях турбулизированных потоков.— В кн.: Тепломассообмен-VI. Т. 1, ч. 2. Минск: изд. ИТМО АН БССР, 1980.
4. Белов П. А., Горшков Г. Ф. и др. Влияние струйной турбулентности на течение в пристеночном пограничном слое.— ПМТФ, 1972, № 6.
5. Gutmark E., Wolfshtein M., Wagnanski I. The plane turbulent impinging jet.— J. Fluid Mech., 1978, vol. 88, p. 4.
6. Секундов А. Н., Яковлевский О. В. Некоторые вопросы перехода каналового течения в струйное.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 3.
7. Hussain A. K. M. F., Zedan M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer: effects of the initial momentum thickness.— Phys. Fluids, 1978, vol. 21, N 7.
8. Hussain A. K. M. F., Zedan M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer: effect of the initial fluctuation level.— Phys. Fluids, 1978, vol. 21, N 9.
9. Конц-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
10. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963.
11. Lawrence J. C. Intensity, scale and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. NASA Rep., 1956, N 1292.
12. Devies P. O. A. L., Fisher M. G. The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet.— J. Fluid Mech., 1963, vol. 15.
13. Горшков Г. Ф. Микроструктура потока в области взаимодействия струи с преградой.— В кн.: Струйные течения жидкостей и газов. Тезисы Всесоюз. науч. конф. Ч. 1. Новополоцк: изд. НПИ, 1982.

УДК 533.534—13

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

*H. A. Борисова, A. P. Головин, A. B. Губарев,
C. A. Лаптев, A. A. Некрасов, O. I. Печенова
(Москва)*

Линейная теория резонатора Гельмгольца, представляющего собой сосуд с коротким открытым горлом, создана Гельмгольцем и Рэлем. Согласно этой теории [1], резонатор Гельмгольца рассматривается как колебательная система с одной степенью свободы (речь идет об основной продольной моде), причем в первом приближении принимается, что вся кинетическая энергия ее сосредоточена в газе, движущемся в

горле и в некоторой окрестности отверстия горла, а потенциальная энергия связана с упругой деформацией газа, находящегося в сосуде.

Резонатор Гельмгольца отличается высокой добротностью, что и определило его широкое использование в акустике.

Процесс, характеризующийся периодическим направленным выбросом газа из резонатора Гельмгольца с последующим всасыванием новой порции газа из пространства, окружающего входное отверстие горла, определил техническое применение его в устройствах, обеспечивающих импульсно-периодическое сжигание топлива [2, 3]. Очевидно, что резонатор Гельмгольца можно использовать и в других устройствах с импульсно-периодическим протеканием физико-химических реакций и технологических процессов с выделением энергии в газовых смесях (например, в импульсно-периодическом газовом лазере).

Для технического устройства важно интенсифицировать процесс, что применительно к резонатору Гельмгольца связано с возбуждением сильных существенно нелинейных колебаний [2, 3], когда скорость потока в горле оказывается сравнимой со скоростью звука. Для таких устройств необходимо знать изменение скорости потока и интенсивность массообмена в горле, что и определяет их эффективность. Очевидно, что такая информация в случае нелинейных колебаний может быть получена только численными методами.

Для описания нестационарных газодинамических процессов в резонаторе Гельмгольца было использовано квазидинамическое приближение

$$(1) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \bar{H} d \ln A / dx = 0,$$

где

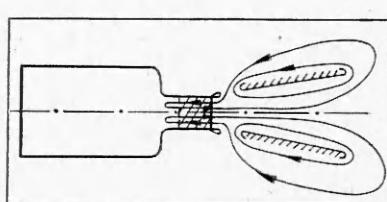
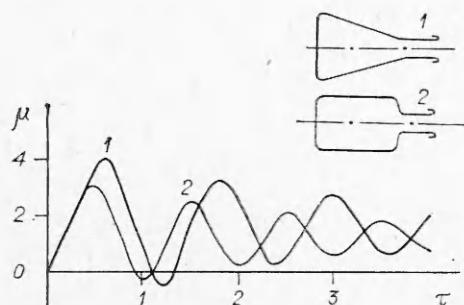
$$\bar{u} = [\rho, \rho u, E]^T; \quad \bar{F} = [\rho u, p + \rho u^2, \rho u(p/\rho + E)]^T; \quad \bar{H} = [\rho u, \rho u^2, \\ \rho u(p/\rho + E)]^T; \quad E = \varepsilon + u^2/2;$$

A — площадь поперечного сечения канала. Остальные обозначения общепринятые. Эта система уравнений дополняется уравнением состояния $p = \rho R T$, $\varepsilon = c_v T$.

Численное решение системы уравнений (1) при соответствующих начальных и граничных условиях не представляет особого труда. Нами использовалась методика, кратко описанная в [4]. В идеальном резонаторе Гельмгольца, обычно используемом в акустике, в месте стыка горла с сосудом $|d \ln A / dx| \gg 1$, что существенно усложняет вычислительный алгоритм (необходимо сплавлять решение на этом участке). С целью упрощения алгоритма принималось, что $|d \ln A / dx| < 1$. Это позволило использовать алгоритм сквозного счета [4]. Надо отметить, что в технических устройствах для снижения потерь используют плавные обводы проточной части. Это, по-видимому, справедливо и по отношению к резонатору Гельмгольца, используемому в техническом устройстве. Следовательно, принятное допущение в нашем случае достаточно обосновано.

В качестве примера на фиг. 1 приведены результаты численного исследования динамики истечения газа через горло для резонаторов Гельмгольца с различной формой сосуда. Объем сосуда и геометрия горла приняты одинаковыми. Расчет выполнен при начальном давлении в полости резонатора $p_1 = 1,4 \cdot 10^4$ Н/м², а в окружающем пространстве $p_0 = 1,2 \times 10^4$ Н/м². На фиг. 1 по оси ординат отложена величина $\mu = m/m_r$, где

$m = \int_0^t \rho u_r S_r dt$ — расход газа через горло, а $m_r = \rho_0 L_r S_r$ — масса газа,



Фиг. 2

Фиг. 1

заполняющего объем горла при $p = p_0$. По оси абсцисс отложено безразмерное время $\tau = ft$, где f — собственная частота резонатора Гельмгольца, определяемая по формуле Рэлея $f = (a_0/2\pi)\sqrt{S_r/L_r\Omega}$ (Ω — объем сосуда).

На фиг. 1 видно, что на первом полупериоде из резонатора 1 выбрасывается (максимум) в $\sim 1,5$ раза больше газа, чем из резонатора 2, в то время как частота процессов в резонаторе 1 ниже в $\sim 1,3$ раза. Это качественно согласуется с результатами [5], где дано развитие теории резонаторов Гельмгольца, и обусловлено большей инерционностью резонатора с плавно изменяющейся геометрией на участке сопряжения горла с сосудом. Надо отметить, что кратность обмена газа в горле резонаторов больше единицы даже на четвертой полуволне, а скорость газа достигает ~ 200 м/с, т. е. колебания в резонаторе существенно нелинейные. Тем не менее собственная частота обоих резонаторов хорошо согласуется с линейной теорией [1, 5].

Одна из схем устройства, импульсно-периодический режим работы которого обеспечивается в результате возбуждения вынужденных колебаний в резонаторе Гельмгольца, показана на фиг. 2. Здесь импульсный источник тепловой энергии расположен в горле резонатора. Это устройство работает следующим образом:

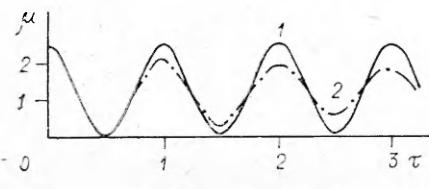
- вначале каким-либо способом в резонаторе возбуждаются сильные колебания, например, так, как рассмотрено на фиг. 1;
- если теперь осуществлять импульсно-периодически подвод тепловой энергии с частотой, близкой к частоте собственных колебаний резонатора, то могут установиться незатухающие колебания с интенсивным обменом газа в горле;
- выталкиваемая из резонатора газовая смесь поступает в газоприемник, а всасывание газовой смеси осуществляется через зазор между горлом резонатора и газоприемником, в результате чего и происходит периодическое обновление газовой смеси в зоне выделения тепловой энергии.

Очевидно, что для устойчивой работы устройства с резонатором Гельмгольца необходимо обеспечить эффективный обмен газа в рабочей зоне горла. Эффективность массообмена, характеризуемая величиной $\mu_0 =$

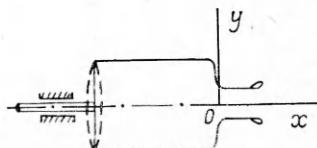
$$= m_r/m_0, \text{ где } m_r = 0,5 \int_{t_0}^{t_0+T} \rho |u| S_r dt - \text{ масса всасываемого (или выбрасываемого) газа за период } T = f^{-1},$$

$m_0 = \rho_0 S_r L_0$ — масса газа, заполняющего рабочую зону горла, зависит от геометрических параметров резонатора, размеров рабочей зоны и от удельного энерговклада. В качестве примера на фиг. 3 приведена зависимость μ от t для оптимальной (кривая 1) и неоптимальной (кривая 2) геометрии резонатора. Отсюда видно, что во втором случае реализовать незатухающие ($\mu_0 > 1$) колебания при заданном энерговкладе не удается.

Вариантные расчеты нелинейных колебаний в резонаторе Гельмгольца достаточно трудоемки. Поэтому использование численных методов при проектном выборе его параметров представляется нецелесообразным. Ниже получены достаточно простые соотношения, позволяющие определять основные параметры резонатора Гельмгольца в случае нелинейных колебаний. При этом были использованы известные и установленные па-



Фиг. 3



Фиг. 4

ми в результате численных исследований факты: 1) для резонатора Гельмгольца длина волны собственных колебаний значительно больше его линейных размеров, поэтому принято, что скорость потока в горле постоянна по его длине, т. е. $\partial u / \partial x \simeq 0$; 2) скорость потока в сосуде пренебрежимо мала, т. е. давление в сосуде можно принять однородным по его объему; 3) изменение скорости потока в горле имеет практически синусоидальный характер, т. е. можно принять следующую зависимость скорости от времени: $u = u_0 \sin \omega t$, причем нелинейность мало влияет на собственную частоту.

Тогда уравнение движения газа в горле можно записать в виде

$$(2) \quad \rho \partial u / \partial t + \partial p / \partial x + \xi \rho u |u| / 2D_s = 0.$$

Здесь последний член учитывает сопротивление трения на стенках горла. Краевое условие на срезе горла запишем как

$$p(t) = p_0 + (\rho u / 4)(|u| - u),$$

где последний член учитывает динамический напор при втекании газа в горло.

Принимая в первом приближении $\rho = \rho_0$, получим решение уравнения (2) в следующем виде (для стыка горла с сосудом):

$$p(t) = p_0 + 0,5 \rho_0 u_0^2 [2u_0 \omega L_r \cos \omega t + ((\xi L_r / D_s) | \sin \omega t | + 0,5 (| \sin \omega t | - \sin \omega t)) \sin \omega t].$$

Отсюда получим выражение для работы, затрачиваемой на проталкивание газа по горлу за один период:

$$A_p = S_r \int_{t_0}^{t_0+T} p u dt = \frac{4}{3} \frac{\rho_0 u_0^2}{\omega} (0,5 + \xi L_r / D_s) S_r.$$

Здесь первый член в скобках соответствует потерям кинетической энергии при выбросе газа из горла, а второй — потерям, связанным с трением на стенках горла. Видно, что при характеристиках для резонатора Гельмгольца размерах горла ($L_r / D_s < 10$) основные потери связаны с выбросом газа из горла. Этот вывод был использован в численных исследованиях.

Пусть колебания газа в резонаторе Гельмгольца поддерживаются за счет импульсно-периодического тепловыделения в рабочем участке горла L_0 . Полная работа, совершаемая нагретым газом при адиабатическом расширении, определяется в виде

$$A_p = \rho_0 c_v S_r L_0 (T_w - T'_0),$$

где T_w — температура газа непосредственно после тепловыделения; T'_0 — температура газа после адиабатического расширения до начального давления.

Полагая, что только k -я часть работы расширения нагретого газа компенсирует затраты энергии на проталкивание газа по горлу, получим

$$\mu_0 \simeq \left[\frac{6kL_r \Omega}{S_r L_0^2 \gamma (\gamma - 1) (0,5 + \xi L_r / D_s)} \right]^{1/3} [1 + (1 + \gamma)W - (1 + (1 + \gamma)W)^{1/\gamma}],$$

где $W = E_t / (\rho_0 S_r L_0 c_v T_0)$ — относительный энерговклад.

Отсюда, полагая $\mu_0 > 1$, можно определить либо геометрические размеры Гельмгольца, либо необходимое значение W .

В ряде случаев величина W ограничена (например, в CO₂-лазере) и может оказаться недостаточной для возбуждения колебаний и обеспечения необходимого массообмена. Поэтому представляет практический интерес рассмотрение схем с внешним возбуждением нелинейных колебаний. Одна из таких схем с изменением объема сосуда показана на фиг. 4.

Для описания работы такого устройства с подвижной задней стенкой (фиг. 4) воспользуемся акустическим приближением [1]. Тогда для изменения параметров потока в горле имеем следующую систему уравнений:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_0 u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Здесь α_0 учитывает потери на трение и излучение.

Полагая, что давление однородно по объему сосуда резонатора, а подвижная стенка колеблется по гармоническому закону, т. е. объем сосуда изменяется в соответствии с формулой $\Omega = \Omega_0(1 + v \exp i\omega t)$, получим решение системы уравнений (3) в следующем виде:

для скорости газа в горле

$$(4) \quad u(x, t) = v \frac{\exp \lambda(\bar{x} - 1) + \exp \lambda(1 - \bar{x})}{(\lambda - \varepsilon) \exp(-\lambda) - (\lambda + \varepsilon) \exp \lambda} \exp i\omega t;$$

для давления в сосуде

$$(5) \quad p(t) - p_0 + \chi \frac{\exp \lambda - \exp(-\lambda)}{(\lambda - \varepsilon) \exp(-\lambda) - (\lambda + \varepsilon) \exp \lambda} \lambda \exp i\omega t,$$

где $\lambda = \sqrt{ik\omega - \bar{\omega}^2}$; $\chi = v\rho_0 a_0^2$ — амплитуда колебаний давления в случае закрытого сосуда; $k = \alpha_0 L_r/a_0$; $\varepsilon = S_r L_r / \Omega_0$. При записи решений (4), (5) использованы безразмерные величины:

$$\bar{x} = x/L_r, \quad \tau = ta_0/L_r, \quad \bar{\omega} = \omega L_r/a_0.$$

Отсюда можно получить амплитуды колебаний давления в сосуде, сдвиг колебаний по фазе, а также резонансные частоты. При $k \ll \bar{\omega}$ для основной гармоники имеем $\omega_0 \simeq a_0 \sqrt{S_r/L_r \Omega_0}$, что согласуется с [1, 5], а амплитуда колебаний давления определяется формулой

$$\Delta p \simeq \rho_0 a_0^2 v (1 + 0,33\varepsilon) (1 + \varepsilon/k^2).$$

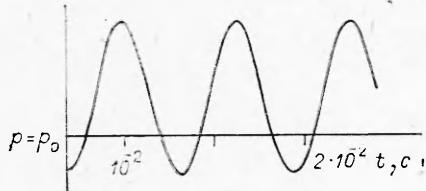
Учитывая, что для обеспечения полной вентиляции объема горла необходимо изменение давления в сосуде $\Delta p \simeq \rho_0 a_0^2 \varepsilon$, получим формулу для определения v :

$$v = 0,5 \alpha_0 L_r \sqrt{\varepsilon/a_0}.$$

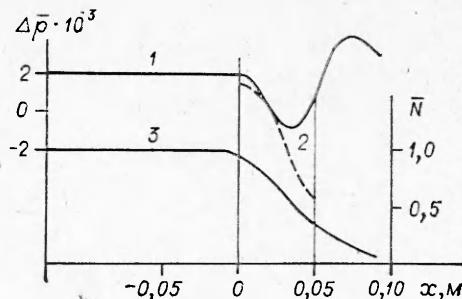
Выполненные численные исследования показали, что собственная частота нелинейных колебаний резонатора Гельмгольца практически совпадает с $\omega_0 = a_0 \sqrt{S_r/L_r \Omega_0}$, а амплитуда давлений в сосуде хорошо согласуется с полученными оценками в предположении, что коэффициент потерь α_0 определяется только потерями кинетической энергии струи газа, вытекающего из горла.

Для изучения характеристик резонатора Гельмгольца с подвижной стенкой была создана экспериментальная установка, схема которой вместе со схемой измерений приведена на фиг. 4. Резонатор выполнен в виде сферической колбы объемом $\sim 10^{-3}$ м³. Длина горла $\sim 5 \cdot 10^{-2}$ м, а его диаметр $\sim 2,4 \cdot 10^{-2}$ м. Измерения показали, что собственная частота резонатора составляет ~ 170 Гц, что практически совпадает с линейной теорией [1, 5].

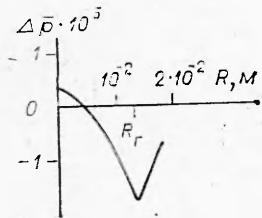
Среднее давление в полости резонатора измерялось инерционным U-образным манометром, одно колено которого подсоединялось к длинной трубке-зонду. Динамическая составляющая колебательного давления измерялась динамическим зондом [6] с чувствительным элементом в виде микрофона. Сигналы регистрировались осциллографом. В качестве рабочего тела использовался воздух при атмосферном давлении. Приведенные ниже результаты получены на резонансной частоте ~ 170 Гц.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 5 показано изменение давления в сосуде резонатора. Здесь видно, что среднее давление выше, чем в окружающей среде. Это превышение возрастает с увеличением амплитуды колебаний подвижной стенки. Распределение среднего относительного давления вдоль оси резонатора $\Delta p_{y=0} = (\bar{p} - p_0)/p_0$ (кривая 1) и на стенке его горла $\Delta p_{\text{ст}} = (p_{\text{ст}} - p_0)/p_0$ (кривая 2) приведены на фиг. 6.

Здесь показано также распределение относительной акустической мощности (кривая 3) колебания давления

$$\bar{N}(x) = \left(\int_0^T |\Delta p(x, t)| dt \right) \left(\int_0^T |\Delta p(0, t)| dt \right)^{-1},$$

где $\Delta p(0, t)$ — давление в сосуде резонатора; T — период колебаний.

Как следует из фиг. 6, в сосуде резонатора и в окружающем пространстве вблизи горла среднее значение давления \bar{p} выше p_0 , а в горле (особенно около его стенки) среднее значение давления заметно уменьшается и на большей части его длины оказывается ниже атмосферного. Распределение среднего давления по радиусу на срезе горла показано на фиг. 7. Надо отметить, что максимальные скорости потока в горле превышали 100 м/с.

Поступила 3 I 1983

ЛИТЕРАТУРА]

1. Ламб Г. Динамическая теория звука. М.: Физматгиз, 1960.
2. Реактивные двигатели/Под ред. О. Е. Ланкастера. М.: ИЛ, 1962.
3. Подымов В. И., Северянин В. С., Щелоков Я. М. Прикладные исследования вибрационного горения. Казань: Казан. ун-т, 1978.
4. Бреев В. В., Борисова Н. А. и др. Анализ процессов и методика численного исследования нестационарных течений газа в импульсном газоразрядном лазере периодического действия. Препринт ИАЭ-3343/16, 1980.
5. Alster M. Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonators.— J. Sound and Vibr., 1972, vol. 24, N 1.
6. Ноффе В. К., Корольков В. Г., Сапожков М. А. Справочник по акустике. М.: Связь, 1979.