УДК 539.4

О СЛАБОНАДКРИТИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ

Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор

(*Новосибирск*)

1. Введение. Экспериментальное и теоретическое исследование конвекции началось сравнительно давно. В начале этого века в первых экспериментах в горизонтальном слое при слабой надкритичности Бенаром наблюдалось образование пространственно-периодической гексагональной структуры. Линейная теория этого явления — конвективная неустойчивость — была понята еще Рэлеем. Что касается изучения нелинейного режима, то достаточно последовательная теория этого явления была выполнена сравнительно недавно [1, 2].

Согласно этой теории, гексагональные ячейки образуются за счет слабой зависимости вязкости η от температуры T. В частности, из этой теории следовал вывод, подтвержденный экспериментом, о том, что направление конвективной циркуляции определяется знаком $\partial\eta/\partial T$, а возбуждение ячеек происходит жестким образом до амплитуды, пропорциональной $\partial\eta/\partial T$ (подробнее об этом см. [3] и цитируемую там литературу). Когда такая зависимость вязкости от температуры отсутствует, образуются одномерные периодические структуры — валы. Причем возбуждение валов, как показывают последние эксперименты [4], использующие допплеровские измерители скорости, происходит мягким образом в полном соответствии с законом Ландау [5]. Следует отметить, что образование ячеек с первых экспериментов Бенара наблюдается в тех случаях, когда верхняя поверхность является свободной. Когда же верхняя поверхность жесткая, при слабой надкритичности, как правило, наблюдаются валы, а гексагональные ячейки, возникающие за счет слабой зависимости вязкости от температуры и существующие, согласно [2], в малом интервале надкритичностей, по этой причине наблюдаются достаточно редко.

В данной работе показано, что при слабой надкритичности эффекты, связанные со свободной поверхностью, являются в ряде случаев определяющими при образовании гексагональных ячеек. Образование таких ячеек представляет собой аналог фазового перехода. Это в полной мере относится к любому переходу от ламинарного состояния к турбулентному. Так, режиму мягкого возбуждения соответствует фазовый переход второго рода, а режиму жесткого возбуждения — фазовый переход первого рода. Подчеркнем, что переход к слабонадкритической конвекции в горизонтальном слое является двумерным. Последнее связано с тем обстоятельством, что неустойчивые состояния характеризуются волновым вектором $\mathbf{k}$, лежащим в горизонтальной плоскости, и дискретным числом n, которое в простейшем случае совпадает с числом полуволн по вертикали. Поэтому при слабой надкритичности нарастают возмущения с минимальным числом n; в силу изотропии в горизонтальной плоскости их инкремент γ_k положителен в узком слое вблизи $|\mathbf{k}| = k_0\left(\gamma'_{k_0} = 0\right)$. Эта неустойчивость является апериодической, и поэтому на нелинейной стадии будут существенны трехчастичные процессы. В этих процессах связаны между собой возмущения, волновые векторы которых составляют угол $\pi/3$. Принципиально, что трехчастичные процессы не стабилизируют неустойчивость. Это можно понять из следующего. Рассмотрим три возбуждающиеся моды с равными и действительными амплитудами A, волновые векторы которых как раз составляют угол $\pi/3$. Тогда эволюция A определяется из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \gamma A + \frac{1}{2} UA^2,$$

простое интегрирование которого приводит к

$$A = \left[\left(\frac{1}{A_0} + \frac{U}{2\gamma}\right) e^{-\gamma t} - \frac{U}{2\gamma}\right]^{-1}.$$

Отсюда видно, что при $U > 0$ существует такой момент времени, когда амплитуда обращается в бесконечность. Это так называемая взрывная неустойчивость. При $U < 0$ также возникает особенность только для возмущений, отличающихся от рассмотренных сдвигом фазы на π. Таким образом, трехчастичные процессы приводят лишь к корреляции трех взаимодействующих мод; эти процессы не снимают вырождения по углу и не останавливают неустойчивость. Стабилизация неустойчивости может обеспечиваться только четырехчастичным взаимодействием. Ясно, что вблизи порога при описании такого взаимодействия следует ограничиться только областью вблизи $|\mathbf{k}| = k_0$, так как вдали от нее возмущения затухают $\gamma_k < 0$. На основе этого уравнение для амплитуд A_k возбуждающихся возмущений имеет вид

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = \gamma_k A_k + \frac{U}{2} \int A_{k_1} A_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 - \\ - \frac{1}{3!} \int T_{-kk_1k_2k_3} A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \delta_{k-k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3, \tag{1.1}$$

где U и $T_{kk_1k_2k_3}$ — матричные элементы трехчастичного и четырехчастичного взаимодействий, взятые на поверхности $|\mathbf{k}_i| = k_0$, и $A_k = A^*_{-k}$. Отметим, что уравнение (1.1) предполагает малость нелинейности. Фактически это означает, что матричный элемент U на резонансной поверхности должен иметь малость, не связанную с надкритичностью. Например, этот критерий несправедлив для надкритических течений, возникающих в результате развития термокапиллярной неустойчивости, обязанной зависимости коэффициента поверхностного натяжения α от температуры. В частности, поэтому все количественные результаты работы [6], в которой рассмотрен этот эффект, являются ошибочными.

Следует отметить, что сформулированная в терминах A_k эта задача подобна рассмотренной нами задаче о возникновении гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика при включении вертикального поля [7].

В данной работе показано, что при слабонадкритической конвекции матричный элемент U отличен от нуля благодаря двум слабым эффектам — эффекту конечной деформации свободной поверхности и термокапиллярному при слабой неизотермичности свободной поверхности. Именно это обстоятельство обеспечивает при слабой надкритичности существование устойчивых гексагональных ячеек. При больших надкритичностях ячейки становятся неустойчивыми, в то время как одномерные структуры (валы) обретают устойчивость.

2. Основные уравнения. Для описания конвекции воспользуемся безразмерными уравнениями Буссинеска [3] для скорости и возмущения температуры T, отсчитываемой от равновесного значения $T_0 = -Az + B$ $(A > 0)$:

$$\mathrm{Pr}^{-1} d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Ra} T \mathbf{e}_z; \tag{2.1}$$

$$\partial T/\partial t + (\mathbf{v}\nabla) T = \Delta T + v_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.2}$$

где $\mathrm{Ra} = \beta g A h^4/\nu\chi$ — число Рэлея; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathbf{e}_z$— единичный вектор, направленный по оси z; β — коэффициент теплового расширения; ν, χ — коэффициенты вязкости и температуропроводности; h — размер по оси z. В этих уравнениях время измеряется в единицах h^2/χ, скорость — χ/h, температура — Ah.

Будем в дальнейшем предполагать $\mathrm{Pr} \gg 1$. Например, для воды $\mathrm{Pr} = 5$, а для масел число Прандтля достигает 10^2, иногда 10^3. Поэтому в уравнении (2.1) можно пренебречь инерционным членом.

Сформулируем теперь граничные условия. На нижней границе будем различать два типа граничных условий. Первые, так называемые рэлеевские граничные условия:

$$v_z = 0,\ \partial \mathbf{v}_\perp/\partial z = 0,\ T = 0 \text{ при } z = 0, \tag{2.3}$$

вторые — с твердой границей:

$$\mathbf{v} = 0,\ T = 0 \text{ при } z = 0. \tag{2.4}$$

На свободной деформируемой поверхности $z = 1 + \zeta(r_\perp, t)$ первое граничное условие представляет собой кинематическую связь

$$\partial\zeta/\partial t = v_z - (\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp)\zeta, \tag{2.5}$$

второе — равенство сил

$$\left[-\zeta + W\Delta_\perp\zeta - \frac{\mu\mathrm{Ra}}{2}\zeta^2\right]n_i = \mu\left[-p\delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right]n_k \tag{2.6}$$

и третье — условие изотермичности

$$T|_{z=1+\zeta} = \zeta, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности; $W = \alpha/\rho g h^2$; $\mu = \nu\chi/gh^3$. Из этих граничных условий видно, что в пределе $\mu \to 0$ условия (2.5) — (2.7) переходят в рэлеевские граничные условия.

Для не очень узких слоев параметр μ действительно мал, в чем можно убедиться, представив μ в виде

$$\mu = (\gamma_g/\omega_g)^2\mathrm{Pr}^{-1},$$

где $\gamma_g = \nu/h^2$; $\omega_g = (g/h)^{1/2}$ — затухание и частота гравитационной поверхностной волны с $k \sim h^{-1}$. Входящее сюда отношение ω_g/γ_g представляет собой добротность волн, которая, как правило, велика. По этой причине мал параметр μ.

Другой возможный эффект, который существует на свободной поверхности, связан с зависимостью коэффициента поверхностного натяжения α от температуры [8]. Естественно, что этот эффект возможен лишь при неизотермичности свободной поверхности. Неизотермичность поверхности можно моделировать интерполяционным условием [3]

$$-\varkappa\partial T/\partial n = a(T - T_2),$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; T_2 — температура верхнего массива при $z \to \infty$.

Будем предполагать неизотермичность слабой, что соответствует условию $b = ah/\varkappa \gg 1$. Поэтому ясно, что при термокапиллярном эффекте не следует учитывать деформацию свободной поверхности, которая характеризуется другим малым параметром μ.

Полагая далее $\alpha = \alpha_0 - \sigma T$ и переходя к возмущениям, приходим к следующим граничным условиям:

$$v_z = 0,\quad \frac{\partial v_\perp}{\partial z} = -B\nabla_\perp T,\quad T = \frac{1}{b}\frac{\partial T}{\partial z} \text{ при } z = 1,$$

где $B = A\sigma h^2/\rho\nu\chi$. Подчеркнем, что при $b \to \infty$ эти граничные условия снова переходят в рэлеевские.

Обратимся к вычислению γ, U и $T_{kk_1k_2k_3}$. Вначале кратко обсудим линейную теорию конвективной неустойчивости. Отметим, что оператор

$$L\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Ra}\, T\mathbf{e}_z \\ \Delta T + v_z \end{pmatrix} = L\Psi$$

при $\mu = 0$ и $b = \infty$ является самосопряженным, если определить скалярное произведение в виде

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \left(\mathrm{Ra}\, T_1^* T_2 + \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2\right) d\mathbf{r}.$$

Отсюда, в частности, следует, что неустойчивость является апериодической. Очевидно, что при $\mu \ll 1$ и $b \gg 1$ эта неустойчивость также остается апериодической.

Считая граничные условия на нижней поверхности рэлеевскими и $\mu = 0$ и $b = \infty$, выпишем выражение для инкремента (ср. с [3]):

$$\gamma_{kn} = \frac{k^2(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{kn})}{(k^2 + \pi^2 n^2)^2}, \tag{2.8}$$

для собственных функций температуры: $\Theta_{kn} = \sin n\pi z$, скорости:

$$u_{zkn} = \frac{\mathrm{Ra}\, k^2}{(k^2 + \pi^2 n^2)^2} \sin n\pi z, \quad \mathbf{u}_{\perp kn} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \frac{\partial u_{zkn}}{\partial z},$$

где $\mathrm{Ra}_{kn} = (k^2 + n^2\pi^2)^3/k^2$.

Из выражения (2.8) следует, что порог неустойчивости достигается при $n = 1$, $k = k_0 = \pi/\sqrt{2}$, $\mathrm{Ra}_c = 27\ \pi^4/4$. Поэтому вблизи порога неустойчивости $\gamma \sim \mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c$. Отметим, что точно так же ведет себя инкремент, когда нижняя поверхность является твердой. Согласно [3], порог неустойчивости в этом случае достигается при $n = 1$, $k_0 = 2{,}682$, $\mathrm{Ra}_c = 1100{,}657$. При этом нейтральная собственная функция имеет вид

$$\Theta_{k1} = \sin \varkappa_1 (1 - z) - 2 \sin \varkappa_1 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i\pi/3} \frac{\sin \varkappa_2 (1 - z)}{\sin \varkappa_2}\right],$$

где

$$\varkappa_1 = 3{,}569; \ \varkappa_2 = 1{,}895 + i4{,}555; \quad (\varkappa_{1,2}^2 + k_0^2)^3 = k_0^2 \mathrm{Ra}_c.$$

В дальнейшем через Θ_0, u_0 будем обозначать собственные функции линейной задачи при $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_c$, $k = k_0$, $\mu = 0$ и $b = \infty$.

Перейдем теперь к вычислению матричных элементов. Сначала рассмотрим случай $\mu = 0$ и $b = \infty$. В этом пределе, как отмечалось, оператор L является самосопряженным, а граничные условия — линейными. Поэтому единственным нелинейным членом является слагаемое в уравнении (2.1) $(\mathbf{v}\nabla)T$. Разлагая далее Ψ по собственным функциям линейной задачи

$$\Psi = \sum_n \int \psi_{kn}(r_\perp) A_{kn}(t)\, dk \quad (A_{kn}^* = A_{-kn}),$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial A_{kn}}{\partial t} = \gamma_{kn} A_{kn} + \frac{1}{2} \sum_{n_1 n_2} \int U_{k\,k_1 k_2}^{n\,n_1 n_2} A_{k_1 n_1}^* A_{k_2 n_2}^* \delta_{k+k_1+k_2}\, dk_1 dk_2.$$

Из самосопряженности оператора L и $v_z = 0$ при $z = 0{,}1$ следует важный вывод о том, что матричный элемент $U_{kk_1k_2}$ равен нулю на поверхности $|\mathbf{k}_i| = k_0$. Действительно, в силу тождества

$$0 = \int (\mathbf{v}\nabla)\frac{T^2}{2}dr = -2\sum_{nn_1n_2}\int \Big(U_k^n\Big|_{k_1k_2}^{n_1n_2} A^*_{kn}A^*_{k_1n_1}A^*_{k_2n_2} + $$
$$+ \text{к. с.}\Big)\,\delta_{k+k_1+k_2}dk_1dk_2dk$$

и произвольности A_{kn} возникает соотношение на матричные элементы:

$$\Big(U_k^n\Big|_{k_1k_2}^{n_1n_2} + U_{k_1}^{n_1}\Big|_{kk_2}^{nn_2} + U_{k_2}^{n_2}\Big|_{k_1k}^{n_1n}\Big)\,\delta_{k+k_1+k_2} = 0.$$

Полагая в этом равенстве $n = n_1 = n_2 = 1$ и $|\mathbf{k}_i| = k_0$, приходим к $U = 0$. Таким образом, в разложении (1.1) при $\mu = 0$ и $b = \infty$ отсутствуют трехчастичные члены. Подчеркнем, что этот вывод также справедлив, когда верхняя поверхность является жесткой. Последнее означает, что разложение в (1.1) начинается с четырехчастичного члена. Это, в свою очередь, приводит к мягкому режиму возбуждения в полном соответствии с экспериментом [4] и теорией Ландау [5, 9]*. Поэтому в приближении Буссинеска матричный элемент U может быть отличен от нуля только за счет свободной поверхности. Здесь можно выделить два фактора. Во-первых, нелинейность граничных условий, во-вторых, несамосопряженность оператора L. Поскольку $\mu \ll 1$ и $b \gg 1$, оба эффекта (эффект деформируемой поверхности и термокапиллярный) могут быть рассмотрены по отдельности.

3. Вычисление матричных элементов. Вычислим вначале вклад в матричный элемент U за счет конечной деформации поверхности. Прежде всего сделаем несколько упрощений. Напомним, что матричный элемент U определен вблизи поверхности $|\mathbf{k}_i| = k_0$, т. е. при трехчастичном взаимодействии волновые векторы возмущений с хорошей точностью образуют правильный треугольник. Поэтому, например, $(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp)T \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial z}T$ при $z = 1$. Очевидно также, что матричный элемент U за счет конечной деформации пропорционален μ. Поэтому в (2.5) необходимо пренебречь слагаемым $\partial\zeta/\partial t$. Разлагая далее все функции при $z = 1 + \zeta$ в ряд по ζ, приходим к следующим граничным условиям:

$$v_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial z}T; \tag{3.1}$$

$$(-1 + W\Delta_\perp)\Big(T + T\frac{\partial T}{\partial z}\Big) = \mu\Big(-p + 2\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big); \tag{3.2}$$

$$\nabla_\perp v_z + \frac{\partial v_\perp}{\partial z} = -2\frac{\partial v_z}{\partial z}\nabla_\perp T - T\frac{\partial^2 v_\perp}{\partial z^2}, \tag{3.3}$$

которые в линейном по амплитуде приближении имеют вид

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_\perp}{\partial z} = 0, \quad (-1 + W\Delta_\perp)T = \mu\Big(-p + 2\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big). \tag{3.4}$$

При таких линейных граничных условиях оператор L уже не является самосопряженным, т. е. граничные условия на свободной поверхности для собственной функции сопряженной задачи $\overline{\Psi}$ уже не совпадают с ана-

---

* Следует подчеркнуть, что для конвекции знак матричного элемента T, как будет показано ниже, положителен.

логичными для Ψ. Они определяются из равенства

$$(\overline{\Psi}, L\Psi) - (L\overline{\Psi}, \Psi) = 0.$$

Можно проверить, что разность этих интегралов сводится к интегралу по поверхности $z = 1$, откуда можно получить

$$(3.5)\qquad (-1 + W\Delta_\perp)\bar{u}_z = \mu \mathrm{Ra}\, \partial\overline{\Theta}/\partial z,\ \overline{\Theta} = 0,\ \partial\bar{u}_\perp/\partial z + \nabla_\perp \bar{u}_z = 0.$$

Граничные условия для сопряженной задачи на нижней поверхности те же, что и для прямой задачи.

Перейдем теперь к выводу уравнений для амплитуд A_k. Отметим, что матричный элемент T в этих уравнениях возникает во втором порядке по $U_k^n\big|_{k_1k_2}^{n_1n_2}$, который не связан с малыми параметрами μ и b^{-1}, в то же время матричный элемент U пропорционален им. Поэтому при надкритичностях $(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c)^{1/2} \sim \mu,\ b^{-1}$ все члены в (1.1) оказываются одного порядка. Таким образом, решение уравнений (2.1), (2.2) вблизи порога следует искать в виде асимптотического ряда по степеням надкритичности:

$$\Psi = \Psi_1 + \delta\Psi,$$

где Ψ — точное решение линейной задачи; $\delta\Psi$ — возмущение более высокого порядка.

Разлагая далее $\mathbf{v}$ и T по собственным функциям линейной задачи, из (2.1), (2.2) приходим к уравнению

$$\mathrm{Ra}\ \partial A_k/\partial t\langle\overline{\Theta}_k|\Theta_k\rangle = (\overline{\psi}_k, L\Psi) - \mathrm{Ra}\langle\overline{\Theta}_k|(\mathbf{v}_1\nabla T_1)_k\rangle -$$
$$- \mathrm{Ra}\langle\overline{\Theta}_k|(\mathbf{v}_1\nabla\delta T)_k\rangle - \mathrm{Ra}\langle\overline{\Theta}_k|(\delta\mathbf{v}\nabla T_1)_k\rangle,$$

где $\langle\,|\,\rangle$ означают интегрирование по z.

В этом уравнении последние два члена после итерации отвечают четырехчастичному взаимодействию, не содержащему в главном порядке малых параметров μ и b^{-1}. В частности, последнее слагаемое на поверхности $|\mathbf{k}_i| = k_0$ в главном порядке равно нулю. Поэтому при нахождении δT и $\delta\mathbf{v}$ из уравнений

$$(3.6)\qquad 0 = -\nabla\delta p + \Delta\delta\mathbf{v} + \mathrm{Ra}\,\delta T\mathbf{e}_z,\ \mathbf{v}_1\nabla T_1 = \Delta\delta T + \delta v_z$$

достаточно воспользоваться при $z = 1$ рэлеевскими граничными условиями:

$$\delta v_z = 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\delta v_z) = 0,\quad \delta T = 0.$$

Если к первому уравнению (3.6) применить операцию rotrot и перейти к фурье-компонентам, то получатся соотношения

$$(\mathbf{v}_1\nabla T_1)_k = \frac{1}{2\pi}\int g(\varphi)\, A_{k_1}A_{k_2}\delta_{k-k_1-k_2}dk_1dk_2,$$

$$\delta T_k = \frac{1}{2\pi}\int \tau(\varphi)\, A_{k_1}A_{k_2}\delta_{k-k_1-k_2}dk_1dk_2,$$

где функция

$$g(\varphi) = \frac{1-\cos\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial z}(u_{0zk}\Theta_{0k}) + \frac{1+\cos\varphi}{2}\left(u_{0zk}\frac{\partial\Theta_{0k}}{\partial z} - \frac{\partial u_{0zk}}{\partial z}\Theta_{0k}\right)$$

связана с $\tau(\varphi)$ уравнениями

$$(3.7)\qquad 0 = -\Delta^2 w_z + k^2\mathrm{Ra}\,\tau,\ g = \Delta\tau + w_z$$

Граничные условия при $z=0$	$\frac{U_d\left(1+Wk_0^2\right)}{\mu \mathrm{Ra}}$	$\frac{U_{\mathrm{т}} b}{B}$	T_0	$T_{\pi/6}$	$T_{\pi/4}$	$T_{\pi/3}$	$T_{\pi/2}$
$v_z=0,\ \frac{dv_{\perp}}{dz}=0$	3,202	−0,205	5,552	5,153	4,753	4,351	3,950
$v_z=0,\ v_{\perp}=0$	3,207	−0,225	10,225	9,364	8,506	7,569	6,810

с граничными условиями (2.3), (2.4) и (3.4) при $\mu = 0$, а φ — угол между векторами k_1 и k_2 $\left(k^2 = 2k_0^2(1+\cos\varphi)\right)$ и $\Delta = \partial^2/\partial z^2 - k^2$.

Отметим, что в случае рэлеевской нижней границы частное решение системы (3.7) удовлетворяет граничным условиям. В случае же твердой нижней поверхности к частному решению следует добавить соответствующее решение однородной системы.

Подставляя далее δT в интеграл $-\mathrm{Ra}\langle\bar{\Theta}_k|(\mathbf{v}_1\nabla\delta T)_k\rangle$, получим

$$-\frac{\mathrm{Ra}^2}{(2\pi)^2}\int I(\varphi_{12}) A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}\delta_{k-k_1-k_2-k_3}dk_1dk_2dk_3,$$

где $I(\varphi) = -\int g(\varphi)\tau(\varphi)\,dz$; φ_{12} — угол между векторами k_1 и k_2.

Матричный элемент четырехчастичного взаимодействия получается отсюда симметризацией по всем волновым векторам. Для рэлеевских граничных условий на поверхности $|\mathbf{k}_i| = k_0$ матричный элемент

$$T_\varphi = T_{k_1k_2-k_1-k_2} =$$

$$= \frac{9\pi^2}{32}\left[1 + \frac{4(5+\cos\varphi)^2(1-\cos\varphi)^2}{4(5+\cos\varphi)^3 - 27(1+\cos\varphi)} + \frac{4(5-\cos\varphi)^2(1+\cos\varphi)^2}{4(5-\cos\varphi)^3 - 27(1-\cos\varphi)}\right].$$

Для твердой нижней границы значения T_φ приведены в таблице.

Обратимся теперь к вычислению матричного элемента U. Он отличен от нуля, как говорилось выше, из-за нелинейных граничных условий и несамосопряженности оператора L. Вклад первого эффекта определяется из интеграла

$$(\bar{\psi}_k, L\Psi) = (L\bar{\psi}_k, \Psi) + (\bar{\psi}_k, L\Psi) - (L\bar{\psi}_k, \Psi),$$

где первый член приводит к линейному слагаемому по амплитуде:

$$\mathrm{Ra}\,\gamma_k\langle\bar{\Theta}_k|\Theta_k\rangle A_k,$$

а разность двух последних сводится к интегралу по поверхности $z = 1$ и отлична от нуля в силу нелинейных граничных условий (3.1)—(3.3). Используя их явное выражение, эту разность можно привести к виду

$$\int d\mathbf{r}_{\perp}\left[\mathrm{Ra}\frac{\partial\Theta_0^*}{\partial z}T\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{2k_0^2}\frac{\partial u_{0z}^*}{\partial z}\frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3}T - \frac{1}{2}p_0^*\frac{\partial v_z}{\partial z}T\right].$$

В этом выражении разложим T и v_z в ряд по собственным функциям линейной задачи. В итоге вклад в матричный элемент U за счет нелинейных граничных условий имеет вид

$$U_N = \frac{\mu\left(3u'_{0zk} - \frac{1}{k_0^2}u'''_{0zk}\right)}{\pi\,\mathrm{Ra}\,\langle\Theta_{0k}|\Theta_{0k}\rangle(1+Wk_0^2)}\left\{\frac{1}{2}u'_{0zk}\left(\frac{2}{k_0^2}u''_{0zk} - u_{0zk}\right) - \mathrm{Ra}_c(\Theta'_{0k})^2\right\}\Bigg|_{z=1}.$$

Рассмотрим теперь вклад в U за счет интеграла $-\mathrm{Ra}\langle\overline{\Theta}_k|(\mathbf{v}_1\nabla T_1)_k\rangle$. Этот интеграл при $\mu=0$ в силу самосопряженности оператора L равен нулю (см. п. 2). Поэтому разложим собственные функции прямой и сопряженной задач в ряд по μ. Ограничиваясь при этом членами первого порядка по μ ($\delta\overline{\psi}$, $\delta\psi\sim\mu$), получим

$$-\mathrm{Ra}\langle(\delta\overline{\Theta}_k-\delta\Theta_k)|(\mathbf{u}_0\nabla\Theta_0)_k\rangle\int A_{k_1}A_{k_2}\delta_{k-k_1-k_2}dk_1dk_2.$$

Стоящее здесь выражение $(\mathbf{u}_0\nabla\Theta_0)_k$ есть в точности введенная нами функция $g(\varphi)$ при $\varphi=2\pi/3$, поэтому матричный элемент

$$-\mathrm{Ra}\langle(\delta\overline{\Theta}_k-\delta\Theta_k)|(\mathbf{u}_0\nabla\Theta_0)_k\rangle=(\overline{\delta\psi_k}-\delta\psi_k,\ L\Phi),$$

где $\Phi=(\tau,w_z)$ — решение системы (3.7) при $\varphi=2\pi/3$. Интегрированием по частям этот матричный элемент приводится к сумме поверхностных членов при $z=1$. Используя далее граничные условия (3.4), (3.5), приходим к выражению

$$U_s=\frac{\mu}{\pi\langle\Theta_{0k}|\Theta_{0k}\rangle(1+Wk_0^2)}\left\{\Theta_{0k}'\left(3w_z'-\frac{w_z'''}{k_0^2}\right)-\tau'\left(3u_{0zk}'-\frac{u_{0zk}''}{k_0^2}\right)\right\}\Bigg|_{z=1}.$$

Таким образом, матричный элемент U за счет конечной деформации равен

$$U_d=U_N+U_s,$$

в частности, при рэлеевских граничных условиях на нижней поверхности

$$U_d=\frac{1124\,\mu\,\mathrm{Ra}_0}{351\,(1+Wk_0^2)}.$$

При твердой нижней границе значение U_d приведено в таблице.

Аналогичным образом вычисляется матричный элемент за счет термокапиллярного эффекта:

$$U_\tau=\frac{B}{\pi b\,\mathrm{Ra}\,\langle\Theta_{0k}|\Theta\ \rangle}(\Theta_{0k}'w_z'-\tau'u_{0zk}')|_{z=1} \tag{3.8}$$

(см. таблицу). Полный матричный элемент U за счет свободной поверхности представляет собой сумму U_d+U .

Приведем выражение для матричного элемента U_η, связанного с зависимостью коэффициента вязкости от температуры:

$$U_\eta=\frac{2\xi}{\mathrm{Ra}\,\langle\Theta_{0k}|\Theta_{0k}\rangle}\int\left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_l}\right)_k^*\left[\Theta_0\left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_l}+\frac{\partial u_{0l}}{\partial x_i}\right)\right]_k dz, \tag{3.9}$$

где $\xi=-\frac{d\ln\eta}{dT}Ah$.

4. Стационарные решения и их устойчивость. Перейдем теперь к изучению стационарных решений, при этом ограничимся рассмотрением только периодических решений с векторами q обратной решетки, длины которых равны критическому значению k_0.

В силу двумерности уравнение (1.1) имеет только три стационарных периодических решения в виде гексагональных ячеек

$$A_k=A_3\sum_{i=1}^{3}(\delta_{k-q_i}+\delta_{k+q_i}),\quad \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0,$$

квадратных ячеек

$$A_k=A_2(\delta_{k-q_1}+\delta_{k+q_1}+\delta_{k-q_2}+\delta_{k+q_2}),\quad (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)=0,$$

и валов

$$A_k = A_1(\delta_{k-q} + \delta_{k+q}),$$

амплитуды которых составляют соответственно

$$A_3 = \frac{U}{4T_{\pi/3} + T_0} + \operatorname{sgn} U \left[\frac{2\gamma_{k_0}}{4T_{\pi/3} + T_0} + \left(\frac{U}{4T_{\pi/3} + T_0}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$A_2 = \left(\frac{2\gamma_{k_0}}{2T_{\pi/2} + T_0}\right)^{1/2}, \quad A_1 = \left(\frac{2\gamma_{k_0}}{T_0}\right)^{1/2}.$$

Первое решение характеризуется жестким режимом возбуждения с величиной скачка при $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_c$

$$A_3 = 2U/(4T_{\pi/3} + T_0),$$

два других — с мягким режимом:

$$A_{1,2} \sim \sqrt{\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c}.$$

Устойчивость этих режимов определяется из линеаризованного уравнения (1.1) для амплитуд a_k:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \gamma_k a_k + U \int A_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 - \tag{4.1}$$

$$- \frac{1}{2} \int T_{-kk_1k_2k_3} A_{k_1} A_{k_2} a_{k_3} \delta_{k-k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Как и в работе [7], ограничимся рассмотрением возмущений $a_k(t) = a_k e^{\Gamma t}$ с волновыми числами порядка k_0 ($k - k_0 \sim \sqrt{\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c}$), наиболее опасных с точки зрения устойчивости. Для таких возмущений

$$\gamma_k = c\varepsilon - f(k - k_0)^2,$$

где

$$c = \frac{\langle u_{0zk} | \Theta_{0k} \rangle}{\langle \Theta_{0k} | \Theta_{0k} \rangle}; \quad \varepsilon = \mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c; \quad f = \frac{c}{2} \frac{\partial^2 \mathrm{Ra}_k}{\partial k^2}.$$

Вначале подробно исследуем устойчивость валов. Здесь и далее для возмущений a_k, волновые векторы которых лежат в слое $k - k_0 \sim \sqrt{\varepsilon}$, выделим три области. В первой области угол φ между вектором возмущения k и вектором обратной решетки не близок ни к одному из значений 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π (внешняя устойчивость, нерезонансные возмущения), во второй — вектор k близок к одному из векторов обратной решетки q, $-q$ (внутренняя устойчивость), и в третьей — угол φ близок к $\pi/3$ или $2\pi/3$, когда возмущения резонансно связаны между собой трехчастичным взаимодействием.

В первом случае собственными модами являются плоские волны, для которых дисперсионное соотношение имеет вид

$$\Gamma = \gamma_k - T_\varphi A_1^2,$$

где φ — угол между векторами k и q. Относительно таких возмущений валы устойчивы.

Во второй области собственные функции уравнения (4.1) представляют собой комбинацию двух возмущений:

$$a_k = a_1 \delta_{k-q-\varkappa} + a_{-1} \delta_{k+q-\varkappa}.$$

Система уравнений для амплитуд a_1, a_{-1} распадается на два уравнения — для четных ($c_+ = (a_1 + a_{-1})/2$) и нечетных ($c_- = (a_1 - a_{-1})/2i$) возмущений. Их собственные значения равны соответственно (ср. с [10]):

$$\Gamma_+ = -2c\varepsilon - f\varkappa^2 \cos^2 \varphi < 0, \quad \Gamma_- = -f\varkappa^2 \cos^2 \varphi < 0,$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\mathbf{q}$.

В третьей области собственные функции представляют собой комбинацию также двух возмущений:

$$a_k = a_1 \delta_{k-k_1-\varkappa} + a_2 \delta_{k-k_2-\varkappa}$$

($\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}$) с собственными значениями:

$$\Gamma = \left(\frac{T_0}{2} - T_{\pi/2}\right) A_1^2 - \frac{f\varkappa^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) \pm \left[(UA_1)^2 + \frac{3}{16} f^2 \varkappa^4 \sin^2 2\varphi\right]^{1/2}.$$

Условие

$$\Gamma_{\max} = \left(\frac{T_0}{2} - T_{\pi/3}\right) A_1^2 + |U| A_1 < 0$$

определяет область устойчивости валов

$$c(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c) > \frac{2T_0}{(2T_{\pi/3} - T_0)^2} U^2 = c\varepsilon_1.$$

Аналогичным образом проводится исследование устойчивости квадратных и гексагональных ячеек.

Квадратные ячейки оказываются всегда неустойчивыми. Принципиально, что они неустойчивы относительно возмущений с волновыми векторами из второй области; для этих возмущений

$$\Gamma_{\max} = (2T_{\pi/2} - T_0) A_2^2 > 0.$$

Что касается гексагональных ячеек, то они устойчивы относительно нерезонансных

$$\Gamma = c\varepsilon - f(k - k_0)^2 - (T_\varphi + T_{\varphi+\pi/3} + T_{\varphi-\pi/3}) A_3^2 < 0$$

и нечетных резонансных возмущений

$$\Gamma = -f\varkappa^2/2 \pm f\varkappa^2/4 < 0, \quad \Gamma = -3UA_3 - f\varkappa^2/2 < 0.$$

Для четных резонансных возмущений собственные значения имеют вид

$$\Gamma = 2c\varepsilon - 2(T_0 + T_{\pi/3}) A_3^2 - \frac{f\varkappa^2}{2} \pm \frac{f\varkappa^2}{4},$$

$$\Gamma = -c\varepsilon - \frac{1}{2}(T_0 + 4T_{\pi/3}) A_3^2 - \frac{f\varkappa^2}{2}.$$

Условие $\Gamma < 0$ определяет область устойчивости гексагональных ячеек

$$-\frac{1}{2}\frac{U^2}{T_0 + 4T_{\pi/3}} < c\varepsilon < 4\frac{T_0 + T_{\pi/3}}{(2T_{\pi/3} - T_0)^2} U^2 = c\varepsilon_2.$$

Отсюда следует, что в интервале надкритичностей $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ устойчивы как гексагональные ячейки, так и валы. Переход от одного состояния к другому является жестким.

Таким образом, при слабой надкритичности первой бифуркацией является переход к гексагональным ячейкам с жестким режимом возбуждения. Этот переход обязан трехчастичному взаимодействию, матричный элемент которого отличен от нуля при свободной верхней границе за счет термокапиллярного эффекта и деформации поверхности. Естественно, что при учете температурной зависимости вязкости все эти три эффекта дают аддитивный вклад в U. Относительный вклад каждого определяется параметрами $U_т/U_\eta$, U_d/U_η. Для первого из них, согласно (3.8), (3.9),

$$U_т/U_\eta \sim \left(\frac{\omega_\alpha}{\gamma_\alpha}\right)^2 \frac{\Pr}{b} \frac{d\ln\alpha}{d\ln\eta},$$

где ω_α, γ_α — частота и затухание капиллярной волны с $k \sim h^{-1}$. Отсюда видно, что это отношение за счет множителя $(\omega_\alpha/\gamma_\alpha)^2\Pr$ может быть больше единицы. Например, для воды с $h = 1$ см $U_т/U_\eta \sim 10^4/b$, т. е. оба эти эффекта сравниваются при неизотермичности $b \sim 10^4$. Следует подчеркнуть, что термокапиллярный эффект, характеризующийся параметром B, влияет на конвективную неустойчивость. В очень узких слоях $h \ll h_c = (\sigma/\rho g\beta)^{1/2}$ эта неустойчивость перестраивается и переходит в термокапиллярную [9]. Поэтому наше рассмотрение справедливо при $h \gg h_c$.

Что касается эффектов деформации, то они существенны при $d\ln\rho/d\ln\eta \sim 1$. Однако практически для всех жидкостей этот параметр мал $\sim 10^{-1}$, 10^{-2}. Он становится порядка единицы в окрестности точки инверсии T_c, где $\partial\eta/\partial T = 0$. Например, для серы $T_c = 153°$С.

Поступила 25 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Palm E.** On the tendency towards hexagonal cells in steady convection.— J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, N 2.
2. **Busse F. H.** The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, N 4.
3. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., Наука, 1972.
4. **Berge P., Dubois M.** Convective velocity field in the Rayleigh — Benard instability: experimental results.— Phys. Rev. Lett., 1974, vol. 32, p. 1041.
5. **Ландау Л. Д.** Собрание трудов. Т. 1. М., Наука, 1969.
6. **Scanlon J. W., Segel L. A.** Finite amplitude cellular convection induced by surface tension.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, N 1.
7. **Кузнецов Е. А., Спектор М. Д.** О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, № 1.
8. **Pearson J. K. A.** On convective cells induced by surface tension.— J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, N 5.
9. **Горьков Л. П.** Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 2.
10. **Newell A. C., Whitehead J. A.** Finite bandwidth, finite amplitude convection.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, N 2.

УДК 536.25

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ ВОЗДУХА ОКОЛО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

В. А. Беляков, П. М. Брдлик, Ю. П. Семенов

(*Москва*)

Теплообмен при смешанной конвекции около горизонтального цилиндра играет существенную роль в ряде технологических процессов. Кроме того, цилиндр является удобной моделью для фундаментального исследования процесса. К настоящему времени опубликовано несколько работ по этой задаче. Выполнены численные решения уравнений пограничного слоя, записанных в приближении Буссинеска, для области цилиндра, где возможно применение