где

$$\psi(M) = \int_a^b \left(\frac{3}{4} \frac{p^2 r^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{M^2}{r^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r}, \qquad k = \frac{E}{h^{m-1} \ln (b/a)} \tag{2.5}$$

В начальном упругом состоянии

$$M = M_0 = -\frac{1-2\nu}{4} \frac{p}{\cos\alpha} \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a} \tag{2.6}$$

В установившемся состоянии $M = 0$. При $\nu = 1/2$ постоянная M_0 также обращается в нуль, поэтому перераспределение напряжений будет иметь место, если $\nu \neq 1/2$. В этом случае

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M\psi(M)} = -k\Omega_1(t), \qquad \Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t)\, dt \tag{2.7}$$

Например, при $m = 1$ (линейная ползучесть) находим, интегрируя (2.7)

$$M = M_0 e^{-E\Omega_1(t)}$$

при $m = 3$

$$\frac{M^2 (3p^2a^2b^2 + 4M_0^2 \cos^2\alpha)}{M_0^2 (3p^2a^2b^2 + 4M^2\cos^2\alpha)} = \exp\left\{-\frac{E}{h^2 \ln b/a} \frac{3p^2(b^2-a^2)}{4\cos^2\alpha} \Omega_1(t)\right\}$$

Нетрудно рассмотреть аналогичную задачу при наличии кручения и ряд других.

Поступила 29 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ТЕОРИИ УПРОЧНЕНИЯ

А. П. Кузнецов, Л. М. Куршин
(Новосибирск)

Приводится решение некоторых задач устойчивости пластин оболочек в условиях ползучести при использовании уравнения состояния в виде

$$\Phi(\sigma_i, p_i, \dot{p}_i) = 0$$

Предполагается, что при пространственном напряженном состоянии справедлива теория деформаций. Таким образом, в уравнении состояния σ_i — интенсивность напряжений, а $p_i = \varepsilon_i - \sigma_i/E$, где ε_i — интенсивность деформаций.

§ 1. Устойчивость длинной пластины при сдвиге. Уравнение устойчивости пластины в рассматриваемой постановке дано в работе [1]

$$\frac{3}{4}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) PPw + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \triangle\triangle w + \frac{9\sigma_i}{(2h)^2} Pw = 0 \tag{1.1}$$

Оператор P имеет вид

$$P = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \qquad \left(\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}\right)$$

Символ A — интегральный оператор в уравнении

$$\delta\sigma_i = A\delta\varepsilon_i \tag{1.2}$$

эквивалентном уравнению состояния в вариациях

$$(E\lambda - \mu)\,\delta\sigma_i - \nu\delta\dot{\sigma}_i + E(\mu\delta\varepsilon_i + \nu\delta\dot{\varepsilon}_i) = 0 \tag{1.3}$$

где

$$\lambda = \partial\Phi/\partial\sigma, \qquad \mu = \partial\Phi/\partial p, \qquad \nu = \partial\Phi/\partial\dot{p}$$

Рассмотрим задачу устойчивости бесконечно длинной пластины шириной b при сдвиге.

Полагая

$$x_1 = \frac{x}{b}, \quad y_1 = \frac{y}{b}, \quad w_1 = \frac{w}{b}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и опуская индексы при x, y и w, приведем уравнение (1.1) к виду

$$\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{9b^2\sigma_i}{2\sqrt{3}h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (1.4)$$

Воспользуемся методом, примененным Саусвеллом к задаче устойчивости упругой пластинки при сдвиге; ищем решение поставленной задачи в виде

$$w = \tau(t) e^{i(\beta x + \gamma y)} \qquad (1.5)$$

где β — действительное число. Для τ получим уравнение

$$\beta^2\gamma^2 A\tau = \frac{9b^2\sigma_i}{2\sqrt{3}h^2} \beta\gamma\tau - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4)\tau \qquad (1.6)$$

Из условия $\tau = 0$ найдем уравнение границы устойчивости

$$E\frac{\mu}{E\lambda}\beta^2\gamma^2 + \left(1 - \frac{\mu}{E\lambda}\right)\left[\frac{9b^2\sigma_i}{2\sqrt{3}h^2}\beta\gamma - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4)\right] = 0 \qquad (1.7)$$

Приняв в качестве закона ползучести зависимость

$$\dot{p} p^\alpha = A\sigma^n$$

и введя обозначение $\alpha / n = c$, получим из (1.7) уравнение

$$\gamma^4 + \left(1 + \frac{c\varepsilon^\circ}{\varepsilon^\circ - \sigma^\circ + c\sigma^\circ}\right)\gamma^2\beta^2 - 2k\varepsilon^\circ\gamma\beta + \beta^4 = 0 \qquad (1.8)$$

Здесь

$$\varepsilon^\circ = \frac{E\varepsilon_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \sigma^\circ = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \sigma_{i\text{э}} = k\sqrt{3}\,\frac{E(2h)^2}{9b^2}$$

Решение уравнения (1.4) запишется в виде

$$w = \tau e^{i\beta x} \sum_{j=1}^{4} C_j e^{i\gamma_j y} \qquad (1.9)$$

где γ_j — корни уравнения (1.8). Эти корни удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0, \qquad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \beta^4$$
$$\gamma_3\gamma_4 + (\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_3 + \gamma_4) + \gamma_1\gamma_2 = \left(1 + \frac{c\varepsilon^\circ}{\varepsilon^\circ - \sigma^\circ + c\sigma^\circ}\right)\beta^2 \qquad (1.10)$$
$$(\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_3\gamma_4 + (\gamma_3 + \gamma_4)\gamma_1\gamma_2 = 2k\varepsilon^\circ\beta$$

Рассмотрим случай шарнирного опирания пластины ($k = 5.34\pi^2$). Подчиняя решение граничным условиям

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1$$

и полагая

$$\gamma_1 = r(1 + iq), \qquad \gamma_2 = r(1 - iq), \qquad \gamma_3 = s(1 + m), \qquad \gamma_4 = s(1 - m) \qquad (1.11)$$

из условия существования нетривиального решения получим уравнение

$$[(q^2 + m^2)^2 - 4(m^2 - q^2)] \sin sm \operatorname{sh} sq = 8mq [\cos 2s - \cos sm \operatorname{ch} sq] \qquad (1.12)$$

Здесь m и q — действительные числа, удовлетворяющие неравенству

$$0 < m^2, \quad q^2 < 1$$

Обозначив $p = \beta / s$, перепишем с учетом (1.11) систему (1.10), определяющую корни γ_j, (1.13)

$$m^2 - q^2 + 2 = -p^2\left(1 + \frac{c\varepsilon^\circ}{\varepsilon^\circ - \sigma^\circ + c\sigma}\right), \qquad s^2(m^2 + q^2) = k\varepsilon^\circ p, \qquad (1 + q^2)(1 - m^2) = p^4$$

Совместным решением уравнения (1.12) и системы (1.13) при любой заданной величине напряжения $\sigma^\circ (\sigma^\circ < 1)$ и произвольном задании одного из параметров, например m, вполне определяются величины q, s, p и значение деформации ε°. Наименьшее значение ε° при изменении m от 0 до 1 дает величину критической деформации, соответствующей заданному σ°. В предельном случае для $c = {}^1/_3$ при $\sigma^\circ = 0$ решение уравнений (1.12) и (1.13) с учетом условия минимума дает $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\min} = 0.88$.

Учитывая, что в случае упругой потери устойчивости $\beta = 2.7$, тогда как в рассмотренном предельном случае $\beta = 2.6$, можно заключить, что при потере устойчивости в условиях ползучести образуются волны несколько меньшей длины, чем при упругой потере устойчивости.

§ 2. Устойчивость длинной круговой цилиндрической оболочки при сжатии. Для смещений при потере устойчивости в соответствии с гипотезой Кирхгофа — Лява примем

$$u(x, y, z) = u(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = v(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(x, y, z) = w(x, y) \qquad (2.1)$$

Вариации деформаций имеют вид

$$\delta\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \delta\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \delta\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \qquad (2.2)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями выражаются зависимостью

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{ij}^* \qquad (2.3)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, а σ_{ij}^* — компоненты девиатора напряжений, или в вариациях,

$$\delta\sigma_{ij}^* = \alpha_{ij}^*\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\delta\varepsilon_i + \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\delta\varepsilon_{ij} \qquad (2.4)$$

Учитывая соотношения (2.2), для $\delta\varepsilon_i$ имеем выражение

$$\delta\varepsilon_i = \frac{2}{3}\left\{\frac{2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\} \qquad (2.5)$$

Из (2.5) с учетом (2.3) получим

$$\delta\varepsilon_i = \alpha_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) + \alpha_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\alpha_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)z \qquad (2.6)$$

Введем обозначения

$$Q(u, v, w) = \alpha_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right) + \alpha_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$P(w) = \alpha_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.6) примет вид

$$\delta\varepsilon_i = Q(u, v, w) - P(w)z \qquad (2.8)$$

Запишем усилия и моменты в оболочке

$$T_1 = \int_{-h}^{h}(2\delta\sigma_{11}^* + \delta\sigma_{22}^*)\,dz, \quad M_1 = \int_{-h}^{h}(2\delta\sigma_{11}^* + \delta\sigma_{22}^*)\,z\,dz, \quad S = \int_{-h}^{h}\delta\sigma_{12}\,dz$$
$$T_2 = \int_{-h}^{h}(2\delta\sigma_{22}^* + \delta\sigma_{11}^*)\,dz, \quad M_2 = \int_{-h}^{h}(2\delta\sigma_{22}^* + \delta\sigma_{11}^*)\,z\,dz, \quad H = \int_{-h}^{h}\delta\sigma_{12}\,z\,dz \qquad (2.9)$$

Вводя в (2.9) выражения (2.4), получим выражения для усилий и моментов в виде

$$T_1 = 2h\left[\alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)Q + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{w}{R}\right)\right]$$
$$T_2 = 2h\left[\alpha_{22}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)Q + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right)\right]$$
$$S = 2h\left[\alpha_{12}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)Q + \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \qquad (2.10)$$

$$M_1 = -\frac{2}{3} h^3 \left[\alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) P + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$M_2 = -\frac{2}{3} h^3 \left[\alpha_{22}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) P + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$H = -\frac{2}{3} h^3 \left[\alpha_{12}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) P + \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right]$$

Подставив в уравнения устойчивости

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{2.11}$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \overset{\circ}{T}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overset{\circ}{T}_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0$$

выражения (2.10), получим уравнения устойчивости в условиях ползучести в смещениях

$$\alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{2R}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \tag{2.12}$$

$$+ \alpha_{12}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

$$\alpha_{22}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right) +$$

$$+ \alpha_{12}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{R}\left[\alpha_{22}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) Q + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}\right)\right] +$$

$$+ \frac{h^2}{3}\left[\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) PPw + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\triangle\triangle w\right] - \sigma_i P w = 0$$

В случае продольного сжатия оболочки в уравнениях (2.12) следует положить

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{22} = \alpha_{12} = 0, \quad Q = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad P = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

а) Рассмотрим случай симметричной формы потери устойчивости длинной круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии.

Так как в этом случае $v = 0$, $u = u(x)$, $w = w(x)$, то уравнения устойчивости (2.12) примут вид

$$\left(A + \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{4}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R}\right) + \frac{h^2}{3}\left(A + \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2.13}$$

Ищем решение уравнений (2.13) в виде

$$w = \tau_1(t)\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad u = \tau_2(t)\cos\frac{\pi x}{l}$$

Вводя выражения для u и w и в уравнение (2.13), получим систему, которая соответствует уравнениям в дифференциальной форме

$$(E\lambda - \mu)\left[-\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\tau_2 + \frac{2}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{l}{\pi}\tau_1\right] + \nu\left[\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\dot{\tau}_2 - \frac{2}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{l}{\pi}\dot{\tau}_1\right] + E(\mu\tau_2 + \nu\dot{\tau}_2) = 0 \tag{2.14}$$

$$(E\lambda - \mu)\left[\frac{4}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{l}\tau_2 + \frac{1}{R}\tau_1\right) + \frac{h^2}{9}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\pi^4}{l^4}\tau_1 - \sigma_i\frac{\pi^2}{l^2}\tau_1\right] +$$

$$+ \nu\left[\frac{4}{3R}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{l}\dot{\tau}_2 - \frac{1}{R}\dot{\tau}_1\right) - \frac{h^2}{9}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\pi^4}{l^4}\dot{\tau}_1 + \sigma_i\frac{\pi^2}{l^2}\dot{\tau}_1\right] -$$

$$- E\left(\mu\frac{h^2}{3}\frac{\pi^4}{l^4}\tau_1 + \nu\frac{h^2}{3}\frac{\pi^4}{l^4}\dot{\tau}_1\right) = 0$$

Из условия $\dot{\tau}_1 = 0$ и $\dot{\tau}_2 = 0$ имеем уравнение границы устойчивости

$$\begin{vmatrix} (E\lambda-\mu)\dfrac{2}{3R}\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\dfrac{l}{\pi} & \dfrac{1}{3}(E\lambda-\mu)\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}-E\mu \\ (E\lambda-\mu)\left[\dfrac{4}{3R^2}\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}+\dfrac{h^2}{9}\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\dfrac{\pi^4}{l^4}-\sigma_i\dfrac{\pi^2}{l^2}\right]-E\mu\dfrac{h^2}{3}\dfrac{\pi^4}{l^4} & (E\lambda-\mu)\dfrac{2}{3R}\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\dfrac{\pi}{l} \end{vmatrix}=0 \qquad (2.15)$$

Используя закон ползучести в виде $\dot{p}p^{\alpha} = A\sigma^n$ и раскрывая определитель (2.15), получим

$$\frac{1}{3}\left[\varepsilon^\circ-\sigma^\circ\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right]^2\left[\frac{1}{4}-2\lambda\varepsilon^\circ\right]+\varepsilon^\circ\frac{\alpha}{n}\left[\varepsilon^\circ-\sigma^\circ\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right]\left[\frac{4}{3}\lambda^2+\frac{1}{2}-2\lambda\varepsilon^\circ\right]+\frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{n^2}\varepsilon^{\circ 2}=0 \qquad (2.16)$$

где

$$\sigma^\circ=\frac{\sigma_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \varepsilon^\circ=\frac{E\varepsilon_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \sigma_{i\text{э}}=\frac{4}{3}E\frac{h}{R}, \qquad \lambda=\frac{l^2}{l_\text{э}^2}=\frac{3l^2}{2Rh\pi^2}$$

а $l_\text{э}$ и l — длины полуволн соответственно при симметричной форме упругой потери устойчивости и при потере устойчивости в условиях ползучести.

Определим значение λ в зависимости от напряжения σ°. Для этого продифференцируем уравнение (2.16) по λ и используем условие минимума ε° ($\varepsilon^{\circ\prime}=0$). Получим уравнение

$$\frac{2}{3}\varepsilon^\circ\left[\varepsilon^\circ-\sigma^\circ\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right]^2-\frac{\alpha}{n}\varepsilon^\circ\left[\varepsilon^\circ-\sigma^\circ\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right]\left[\frac{8}{3}\lambda-2\varepsilon^\circ\right]=0 \qquad (2.17)$$

Так как $\alpha/n<1$, то, сокращая на множитель, не равный нулю, имеем из (2.17) соотношение

$$\lambda=\frac{3}{4}\frac{n}{\alpha}\left\{\frac{1}{3}\left[\varepsilon^\circ-\sigma^\circ\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right]+\frac{\alpha}{n}\varepsilon^\circ\right\} \qquad (2.18)$$

Вводя значение λ из (2.18) в уравнение (2.16), получим зависимость между σ°, α/n и ε°.

Для $\alpha/n = 1/3$ на фигуре построены зависимости $\varepsilon^\circ(\sigma^\circ)$ и $\lambda(\sigma^\circ)$.

б) Рассмотрим общую форму потери устойчивости сжатой оболочки. Уравнения устойчивости запишутся в виде

$$\begin{gathered}\left(A+\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\\ 4\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{4}{R}\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad (2.19)\\ \frac{1}{R}\frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}\right)+\frac{h^2}{3}\left[\left(A-\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\triangle\triangle w\right]+\sigma_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\end{gathered}$$

Разыскивая решение системы (2.19) в виде

$$w=\tau_1\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{my}{R}, \qquad u=\tau_2\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{my}{R}, \qquad v=\tau_3\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{my}{R}$$

получим систему уравнений для определения τ_1, τ_2, τ_3, переписав которую в дифференциальной форме и положив $\dot{\tau}_1=\dot{\tau}_2=\dot{\tau}_3=0$, получим

$$\begin{gathered}\frac{\pi^2}{l^2}E\mu\tau_2-\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(E\lambda-\mu)\left(\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{l^2}\tau_2+\frac{1}{3}\frac{m^2}{R^2}\tau_2+\frac{\pi}{l}\frac{m}{R}\tau_3-\frac{2}{3R}\frac{\pi}{l}\tau_1\right)=0\\ \frac{4}{3}\frac{m^2}{R^2}\tau_3+\frac{\pi}{l}\frac{m}{R}\tau_2+\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{l^2}\tau_3-\frac{4}{3}\frac{1}{R}\frac{m}{R}\tau_1=0\\ \frac{h^2}{3}\frac{\pi^4}{l^4}E\mu\tau_1+(E\lambda-\mu)\left\{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{1}{R}\left(\frac{2}{3}\frac{\pi}{l}\tau_2+\frac{4}{3}\frac{m}{R}\tau_3-\frac{4}{3}\frac{1}{R}\tau_1\right)+\right. \qquad (2.20)\\ \left.+\frac{h^2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left[\frac{\pi^4}{l^4}\tau_1-\frac{4}{3}\left(\frac{\pi^2}{l^2}+\frac{m^2}{R^2}\right)^2\tau_1\right]+\sigma_i\frac{\pi^2}{l^2}\tau_1\right\}=0\end{gathered}$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.20), получим уравнение границы устойчивости.

Для закона ползучести $\dot{p}p^{\alpha} = A\sigma^{n}$, вводя обозначения

$$\sigma^{\circ} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \varepsilon^{\circ} = \frac{E\varepsilon_i}{\sigma_{i\text{э}}}, \qquad \sigma_{i\text{э}} = \frac{4}{3}\frac{Eh}{R}, \qquad \lambda = \frac{l^2}{l_{\text{э}}^2} = \frac{3l^2}{2Rh\pi^2}, \qquad \gamma = \frac{2}{3}\frac{h}{R}m^2$$

и раскрыв определитель, будем иметь

$$\left(\varepsilon^{\circ} - \sigma^{\circ} + \sigma^{\circ}\frac{\alpha}{n}\right)\Big[^{2} - \frac{1}{4} + 2\varepsilon^{\circ}\lambda - \gamma\lambda + 8\varepsilon^{\circ}\gamma\lambda^2 + 6\gamma^2\lambda^2 + 8\varepsilon^{\circ}\gamma^2\lambda^3 -$$
$$- 4\gamma^3\lambda^3 - 4\gamma^4\lambda^4\Big] + \frac{\alpha}{n}\varepsilon^{\circ}\left(\varepsilon^{\circ} - \sigma^{\circ} + \sigma^{\circ}\frac{\alpha}{n}\right)\Big(-\frac{1}{2} + 2\varepsilon^{\circ}\lambda - \frac{4}{3}\lambda^2 -$$
$$- 2\gamma\lambda + 8\varepsilon^{\circ}\gamma\lambda^2 - 10\gamma^2\lambda^2 - 4\gamma^2\lambda^3\Big) - \frac{1}{3}\varepsilon^{\circ 2}\left(\gamma\lambda + \frac{1}{4}\right) = 0 \qquad (2.21)$$

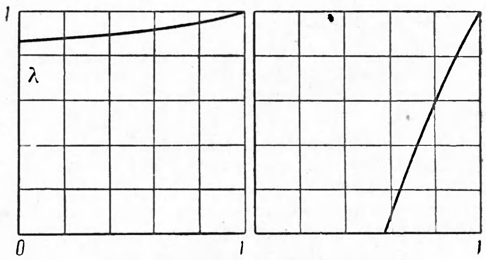
Уравнением (2.21) определяется значение ε° при заданном напряжении σ°. При этом значения γ и λ должны быть выбраны из условия минимума ε° с учетом дискретности γ. Интересно оценить, какая форма потери устойчивости, симметричная или несимметричная, должна осуществляться при продольном сжатии в условиях ползучести.

Рассмотрим, к примеру, случай $\alpha / n = 1/3$. Обозначив $s = \lambda\gamma$, перепишем уравнение (2.21) в виде

$$\lambda(1 + 2s^2)\varepsilon^{\circ 3} - \Big[\Big(\frac{1}{4} + s + s^2 + 2s^3 + s^4 + \frac{1}{3}\lambda^2\Big) + \frac{1}{3}\lambda\sigma^{\circ}(s - 4s + 8s^2)\Big]\varepsilon^{\circ 2} +$$
$$+ \Big[\frac{1}{3}\sigma^2\Big(\frac{1}{2} + 2s - s^2 + 6s^3 + 4s^4 + \frac{2}{3}\lambda^2\Big) + \frac{2}{9}\lambda\sigma^{\circ 2}(1 - 2s)^2\Big]\varepsilon^{\circ} -$$
$$- \frac{1}{9}\sigma^{\circ 2}\Big(\frac{1}{4} + s - 6s^2 + 4s^3 + 4s^4\Big) = 0 \qquad (2.22)$$

Уравнение (2.22) дает при $\sigma^{\circ} = 0$ следующее выражение для деформации

$$\varepsilon^{\circ} = \frac{\frac{1}{4} + s + s^2 + 2s^3 + s^4 + \frac{1}{3}\lambda^2}{\lambda(1 + 2s^2)}$$



Минимальное значение ε° достигается при

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad s = 0$$

Значение $s = 0$ соответствует, очевидно, случаю симметричной формы потери устойчивости.

Таким образом при продольном сжатии оболочки в условиях ползучести в предельном случае $\sigma^{\circ} = 0$ должна осуществляться симметричная форма потери устойчивости. Но так как в другом предельном случае, упругой потери устойчивости ($\sigma^{\circ} = 1$), одинаково возможна как симметричная, так и несимметричная формы потери устойчивости [2], то естественно предположить, что при ползучести и для промежуточных значений $\sigma^{\circ}(0 < \sigma^{\circ} < 1)$ должна осуществляться симметричная форма потери устойчивости. Заметим, что этот вывод сделан на основе принятой постановки, исходившей из справедливости уравнения состояния в вариациях.

Поступила 5 VIII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.