УДК 532.546

РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ТАЮЩЕМ СНЕГЕ

А. А. Папин

Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул
E-mail: papin@ab.ru

На основе уравнений двухфазной фильтрации Маскета — Леверетта рассматривается модельная задача о движении воды и воздуха в тающем снеге. Доказана теорема существования автомодельного решения.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, атомодельные решения, тепломассоперенос.

Введение. При решении задач о движении снежных лавин [1], вкладе снежного покрова в формирование стока на речном водосборе [2, 3], распространении загрязнений в тающем снеге [4, 5] используются различные модели снежного покрова. Задача о тепломассопереносе в тающем снеге актуальна при оценке водного стока на водосборе, а также при оценке переноса загрязнений.

При построении математических моделей снежного покрова в период снеготаяния применяются общие принципы динамики многофазной среды [6]. Особенностью этих моделей является обязательный учет фазовых переходов и использование фильтрационного приближения, поэтому основными уравнениями модели являются законы сохранения масс и энергии, а также закон Дарси для подвижных фаз [3, 4]. Данный подход применяется при исследовании тепловой двухфазной фильтрации [7], диссоциации гидратов, соседствующих со льдом в природных пластах [8], а также при изучении тепломассопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах [9].

1. Постановка задачи. Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют неподвижные частицы льда [3]. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды и воздуха. Тающий снег является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$). Для описания процесса используются уравнение сохранения массы для каждой фазы [6], система уравнений двухфазной фильтрации Маскета — Леверетта для воды и воздуха [7, 10], уравнение сохранения энергии для тающего снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом) [3. С. 144]:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1,2,3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v}_i = -K_0\,\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0\boldsymbol{g}), \quad i = 1,2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta), \quad \sum_{i=1}^{2} s_i = 1; \tag{2}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0 c_i\alpha_i\Big)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \Big(\sum_{i=1}^{2}\rho_i^0 c_i\boldsymbol{v}_i\Big)\nabla\theta = \operatorname{div}(\lambda_{\text{c}}\nabla\theta) + \nu\,\frac{\partial\rho_3^0\alpha_3}{\partial t}. \tag{3}$$

Здесь t — время; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} — интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\boldsymbol{v}_i = m s_i \boldsymbol{u}_i$ — скорости фильтрации воды и воздуха; m – пористость снега; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = m s_1$, $\alpha_2 = m s_2$, $\alpha_3 = 1 - m$); K_0 — тензор фильтрации; k_{0i} — относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geqslant 0$, $k_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); μ_i — динамическая вязкость; p_i — давления фаз; p_c — капиллярное давление; $\boldsymbol{g}$ — вектор ускорения свободного падения; θ — температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, 3$ [3, 7]); $c_i = \text{const} > 0$ — теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = \text{const} > 0$ — удельная теплота плавления льда; $\lambda_{\text{c}} = a_{\text{c}} + b_{\text{c}} \rho_{\text{c}}^2$ — теплопроводность снега; $\rho_{\text{c}} = \sum\limits_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i$; $a_{\text{c}} = \text{const} > 0$; $b_{\text{c}} = \text{const} > 0$ [3. С. 146].

Система (1)–(3) дополняется гипотезами $\boldsymbol{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [3]), $I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$, $I_{31} = I_{31}(\theta)$, $\rho_i^0 = \rho_i^0(\theta)$, $i = 1, 2, 3$.

Целью работы является построение точного решения системы уравнений (1)–(3) при естественных граничных условиях.

2. Простое решение. Введем конечные значения температуры θ^-, θ_1 и θ^+. Пусть $0 < \theta^- < \theta_1 < \theta^+$. Считаем, что для всех $\theta \in (0, \infty)$ имеют место соотношения $\alpha_3(\theta) = 0$ при $\theta \geqslant \theta^+$, $\alpha_3(\theta) = 1 - m^- - m_1(\theta - \theta_1)$ при $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta^+$, $\alpha_3(\theta) = 1 - m^-$ при $\theta \leqslant \theta_1$. Здесь $m^- = m(\theta^-) \in (0, 1)$, $m_1 = (1 - m^-)/(\theta^+ - \theta_1)$ — заданные параметры. Кроме того, предполагается, что пористая среда однородна ($K_0 = \text{const} > 0$), $\rho_i^0 = \text{const} > 0$ (эти условия не влияют на общность результатов), в системе координат xyz вектор $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$, входящие в систему (1)–(3) функции зависят от z, t. Исключая в (1) I_{31}, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(m s_1 \rho_1^0 + \rho_3^0 (1 - m)) + \frac{\partial}{\partial z}\,(\rho_1^0 v_1) = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(m s_2 \rho_2^0) + \frac{\partial}{\partial z}\,(\rho_2^0 v_2) = 0; \tag{5}$$

$$v_i = -K_0\, \frac{k_{0i}}{\mu_i} \Big(\frac{\partial p_i}{\partial z} - \rho_i^0 g\Big), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad s_1 + s_2 = 1; \tag{6}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i\Big) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Big(\sum_{i=1}^{2} \rho_i^0 c_i v_i\Big) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\lambda_{\text{c}}\, \frac{\partial \theta}{\partial z}\Big) - \nu \rho_3^0\, \frac{\partial m}{\partial t}. \tag{7}$$

Для системы (4)–(7) рассмотрим следующую задачу: снег занимает область $(-\infty, ct)$, $t > 0$. При $z = -\infty$ вода отсутствует ($s_1 = 0$, $v_1 = 0$), воздух неподвижен ($v_2 = 0$) и задана температура $\theta = \theta^-$ (ниже температуры плавления льда); при $z = ct$ известны скорости воды ($v_1 = v_1^+$), воздуха ($v_2 = v_2^+$), давление воздуха ($p_2 = p^+$) и задана температура $\theta = \theta^+$ (равная температуре плавления льда). Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = z - ct$ (c — неизвестная постоянная), из (4)–(7) получаем

$$-c\, \frac{d}{d\xi}\,(m s_1 \rho_1^0 + \rho_3^0 (1 - m)) + \frac{d}{d\xi}\,(\rho_1^0 v_1) = 0; \tag{8}$$

$$-c\, \frac{d}{d\xi}\,(m s_2 \rho_2^0) + \frac{d}{d\xi}\,(\rho_2^0 v_2) = 0; \tag{9}$$

$$v_i = -K_0\,\frac{k_{0i}}{\mu_i}\Big(\frac{dp_i}{d\xi} - \rho_i^0 g\Big), \qquad p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta), \qquad s_1 + s_2 = 1; \tag{10}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i (v_i - c\alpha_i)\Big)\frac{d\theta}{d\xi} - c\nu\rho_3^0\,\frac{dm}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\Big(\lambda_{\text{c}}\,\frac{d\theta}{d\xi}\Big); \tag{11}$$

$$s_1\big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad \theta\big|_{\xi\to-\infty} = \theta^-, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\Big|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad v_i\big|_{\xi\to-\infty} = 0; \tag{12}$$

$$p_2(0) = p^+, \quad \theta(0) = \theta^+, \quad v_i(0) = v_i^+, \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Искомыми являются функции $s_1(\xi)$, $v_i(\xi)$, $p_i(\xi)$ и постоянная c. Решение задачи (8)–(13) строится следующим образом. Интегрируя уравнения (8)–(10), находим постоянную c и получаем представления для скоростей фильтрации и температуры (см. подп. 2.1, 2.2). Используя эти представления и (10), получаем уравнение для насыщенности $s_1(\xi)$ (см. подп. 2.3). Исследование разрешимости задачи для $s_1(\xi)$ завершается построением решения задачи (8)–(13).

2.1. *Определение скоростей фильтрации.* Из (8), (9) следует, что

$$\rho_1^0 v_1 - c(ms_1\rho_1^0 + (1-m)\rho_3^0) = A_1 = \text{const}; \tag{14}$$

$$\rho_2^0 v_2 - cms_2\rho_2^0 = A_2 = \text{const}\,. \tag{15}$$

Из (14) и (12) имеем $A_1 = -c\rho_3^0(1-m^-)$, $m^- \equiv m(\theta^-)$, из (15) и (12) находим $A_2 = -c\rho_2^0 m^-$. Рассматривая (14), (15) при условиях (13), для неизвестных параметров c, s^+ ($s_1 \equiv s$, $s_2 \equiv 1-s$) получим систему уравнений

$$v_1^+ = c(s^+ - (\rho_3^0/\rho_1^0)(1-m^-)), \qquad v_2^+ = c(1 - s^+ - m^-),$$

где $m(\theta^+) = 1$; $\rho_3^0 < \rho_1^0$. Решение этой системы имеет следующий вид:

1) $s^+ = 1 - m^-$, $c = \dfrac{v_1^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_2^+ = 0$, $v_1^+ < 0$;

2) $s^+ = (1-m^-)\,\dfrac{\rho_3^0}{\rho_1^0}$, $c = \dfrac{v_2^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_1^+ = 0$, $v_2^+ < 0$;

3) $s^+(\lambda) = \dfrac{1-m^-}{1+\lambda}\Big(\lambda + \dfrac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big)$, $c = \dfrac{(1+\lambda)v_2^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0$ при $v_1^+ < 0$, $v_2^+ < 0$, где $\lambda \equiv v_1^+/v_2^+ > 0$.

Из (14), (15) получим представления для скоростей фильтрации

$$v_1 = cms + c(\rho_3^0/\rho_1^0)(m^- - m), \qquad v_2 = cm(1-s) - cm^-. \tag{16}$$

2.2. *Представление для температуры.* Из (16) имеем

$$\sum_{i=1}^{3} c_i\rho_i^0 (v_i - c\alpha_i) = c\rho_3^0(1-m)(c_1 - c_3) + A_1c_1 + A_2c_2,$$

поэтому из (11) следует

$$c\rho_3^0(c_1 - c_3)\int_0^\theta (1 - m(\zeta))d\zeta + (A_1c_1 + A_2c_2)\theta - \nu\rho_3^0 cm - \lambda_{\text{c}}\,\frac{d\theta}{d\xi} = \text{const}\,.$$

Используя условия (12), получаем

$$\lambda_{\text{c}} \frac{d\theta}{d\xi} = c\rho_3^0(c_1 - c_3)M(\theta) + (A_1c_1 + A_2c_2)(\theta - \theta^-) - \nu\rho_3^0 c(m - m^-) \equiv f_1(\theta), \qquad (17)$$

где

$$M(\theta) \equiv \int\limits_{\theta^-}^{\theta} (1 - m(\zeta))\,d\zeta = \begin{cases} (1 - m^-)(\theta^+/2 - \theta^- + \theta_1/2) = M_1, & \theta \geqslant \theta^+, \\ (1 - m^-)(\theta - \theta^-) - m_1(\theta - \theta_1)^2/2, & \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta^+, \\ (1 - m^-)(\theta - \theta^-), & \theta \leqslant \theta_1. \end{cases}$$

Для решения уравнения (17) справедлива оценка $\theta(\xi) \geqslant \theta^-$ для всех $\xi \in (-\infty, 0)$. Действительно, пусть $z(\xi) = \theta^- - \theta(\xi)$, $z^0(\xi) = \max\{z, 0\}$. В силу условий (12), (13) имеем $z^0\big|_{\xi=0} = 0$, $z^0\big|_{\xi=-\infty} = 0$. Кроме того, на множестве $\{\xi\colon \theta^- > \theta(\xi)\}$ функция $f_1(\theta) = B(\theta - \theta^-)$, где $B = -c(\rho_3^0(1 - m^-)c_3 + \rho_2^0 m^- c_2) > 0$. С учетом сказанного из уравнения (17) следует равенство

$$-\frac{1}{2}\,(z^0)^2\big|_{-\infty}^{0} = B\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{z}{\lambda_{\text{c}}}\,z^0\,d\xi = B\int\limits_{\xi|\theta^- > \theta(\xi)} \frac{1}{\lambda_{\text{c}}}\,(z^0)^2\,d\xi = 0.$$

Так как $\lambda_{\text{c}} > 0$, то $\theta(\xi) \geqslant \theta^-$ для почти всех ξ. Поэтому при $\theta \in [\theta^-, \infty)$ функции $m(\theta)$, $M(\theta)$ можно считать заданными, причем

$$f_1(\theta) = \begin{cases} c\rho_3^0(c_1 - c_3)M_1 + (A_1c_1 + A_2c_2)(\theta - \theta^-) - \nu c\rho_3^0(1 - m^-), & \theta(\xi) \geqslant \theta^+, \\ c\rho_3^0(c_1 - c_3)[(1 - m^-)(\theta - \theta^-) - m_1(\theta - \theta_1)^2/2] + \\ \quad + (A_1c_1 + A_2c_2)(\theta - \theta^-) - \nu c\rho_3^0 m_1(\theta - \theta_1), & \theta_1 \leqslant \theta(\xi) \leqslant \theta^+, \\ (c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2)(\theta - \theta^-), & \theta^- \leqslant \theta(\xi) \leqslant \theta_1. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точках $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta^+$ и $f_1(\theta^-) = 0$. Положим

$$\bar a = c\rho_3^0(c_1 - c_3)M_1 - \nu c\rho_3^0(1 - m^-) - \theta^-(A_1c_1 + A_2c_2),$$

$$\bar b = A_1c_1 + A_2c_2 = -c(\rho_3^0(1 - m^-)c_1 + \rho_2^0 m^- c_2), \qquad b_1 = -cm_1\rho_3^0(c_1 - c_3)/2,$$

$$d_1 = c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2 - \nu c\rho_3^0 m_1,$$

$$a_1 = (\theta_1 - \theta^-)(c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2),$$

$$b_2 = c\rho_3^0(c_1 - c_3)(1 - m^-) + A_1c_1 + A_2c_2.$$

Тогда

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \bar a + \bar b\theta, & \theta \geqslant \theta^+, \\ b_1(\theta - \theta_1)^2 + d_1(\theta - \theta_1) + a_1, & \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta^+, \\ b_2(\theta - \theta^-), & \theta^- \leqslant \theta \leqslant \theta_1. \end{cases}$$

Пусть данные задачи удовлетворяют условиям

$$0 < \rho_2^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0 < \infty, \qquad 0 < c_3 < c_1 < c_2 < \infty.$$

Из определения A_1, A_2, c, m_1 следует $b_2 = -c\rho_3^0 c_1((1 - m^-)c_3/c_1 + m^- c_3\rho_2^0/(c_1\rho_1^0)) > 0$, $a_1 = b_2(\theta_1 - \theta^-) > 0$, $b_1 > 0$, $\bar b > 0$, $d_1 = b_2 - \nu c\rho_3^0 m_1 > b_2 > 0$, поэтому при $\theta \in [\theta^-, \infty)$ функция $f_1(\theta)$ неотрицательна и монотонно возрастает, в частности $\theta(\xi) \in [\theta^-, \theta^+]$.

Замечание 1. Согласно [11] для реальных процессов $c_1 = 4{,}18$ Дж/(г · К), $c_2 = 29{,}2$ Дж/(г · К), $c_3 = 2{,}04$ Дж/(г · К), $\nu = 6009/18$ Дж/г, $\rho_1^0 = 10^3$ кг/м^3, $\rho_2^0 = 1{,}2928$ кг/м^3, $\rho_3^0 = 0{,}925 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение задачи (12), (13), (17) можно представить в виде

$$I(\theta) \equiv \int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{f_1(\zeta)} = \int\limits_{\xi}^{0} \frac{d\zeta}{\lambda_{\rm c}(\zeta)} \equiv \psi(\lambda_{\rm c}(\xi)), \qquad \theta(\xi) = I^{-1}(\psi(\lambda_{\rm c}(\xi))). \tag{18}$$

При $\theta \in [\theta_1, \theta^+]$ из (18) получаем

$$I(\theta) = \int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{b_1(\zeta-\theta_1)^2 + d_1(\zeta-\theta_1) + a_1} = \psi(\lambda_{\rm c}(\xi)).$$

Отметим, что условие

$$\nu/c_1 \geqslant (1 - c_3/c_1)(\theta_1 - \theta^-) \tag{19}$$

является достаточным для приведения функции $f_1(\theta)$ на отрезке $[\theta_1, \theta^+]$ к виду $b_1[(\theta-\theta_1+\alpha)^2 - \beta^2]$, $\alpha = d_1/(2b_1)$, $\beta^2 = (d_1^2 - 4a_1b_1)/(4b_1^2)$. Из замечания 1 следует, что $\nu/c_1 > 60$ К, $c_3/c_1 < 1/2$ и для реальных процессов $\theta_1 - \theta^- < 2\nu/c_1$, т. е. выполняется условие (19), с учетом которого имеем

$$I(\theta) = \frac{1}{b_1}\int\limits_{\theta}^{\theta^+} \frac{d\zeta}{(\zeta-\theta_1+\alpha)^2 - \beta^2} = \psi(\lambda_{\rm c}(\xi)), \qquad \theta \in [\theta_1, \theta^+]. \tag{20}$$

Вследствие монотонности $\theta(\xi)$ существует такая точка ξ_1, что $\theta(\xi_1) = \theta_1$. Из (20) вытекает условие для определения ξ_1: $I(\theta_1) = \psi(\lambda_{\rm c}(\xi_1))$.

При $\theta \in [\theta^-, \theta_1]$ из (18) получаем

$$\theta(\xi) = \theta^- + (\theta_1 - \theta^-)\exp\Big(-b_2\int\limits_{\xi}^{\xi_1} \frac{d\zeta}{\lambda_{\rm c}(\zeta)}\Big). \tag{21}$$

Таким образом, при заданной функции $\lambda_{\rm c}(s,\theta)$ представление (18) и его частные случаи (20), (21) определяют температуру для всех $\xi \in (-\infty, 0)$.

2.3. *Определение насыщенностей и давлений.* Из (10) и (16) имеем

$$v_1 = cms - c\,\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\,(m - m^-) = -K_0\,\frac{k_{01}}{\mu_1}\Big(\frac{dp_1}{d\xi} - \rho_1^0 g\Big),$$

$$v_2 = cm(1-s) - cm^- = -K_0\,\frac{k_{02}}{\mu_2}\Big(\frac{dp_2}{d\xi} - \rho_2^0 g\Big).$$

Исключая из этих соотношений p_1 и p_2 с помощью второго уравнения в (10), получаем

$$-k_{01}k_{02}K_0\,\frac{dp_c}{d\xi} = -\mu_1 v_1 k_{02} + \mu_2 v_2 k_{01} + K_0 k_{01}k_{02} g(\rho_1^0 - \rho_2^0).$$

Следуя [7], положим $p_c(s,\theta) = p_0(\theta)\gamma(s)$, $d\gamma/ds \equiv \gamma' < 0$. При $s \in (-\infty, +\infty)$ относительные фазовые проницаемости k_{0i} определим следующим образом: $k_{0i} = 0$ при $s_i \leqslant 1$, $k_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i,\theta)s_i^{n_i}$ при $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $k_{0i} = \bar{k}_{0i}(1,\theta)$ при $s_i \geqslant 1$. Здесь постоянные $n_i > 1$.

Предполагается, что функция $a(s) = -\gamma' k_{01} k_{02} > 0$ при $s \in (0,1)$ и $a(s) = 0$ при $s \leqslant 0$ и $s \geqslant 1$.

Используя уравнение для температуры (17), уравнение для насыщенности представим в виде

$$a_0(s)\,\frac{ds}{d\xi} = \varphi_1\varphi_2\gamma\,\frac{p_0'}{p_0}\,\frac{f_1}{\lambda_{\text{c}}} + \frac{1}{p_0}\,\bar g\varphi_1\varphi_2 + \frac{1}{p_0}\,|c|mAs - \frac{1}{p_0}\,|c|(m-m^-)B \equiv f_2(s,\theta), \qquad (22)$$

где $\varphi_i = 0$ при $s_i \leqslant 0$, $\varphi_i = s_i^{n_i}$ при $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $\varphi_i = 1$ при $s_i \geqslant 1$,

$$a_0 = -\varphi_1\varphi_2\gamma', \quad A = \bar\mu_1\varphi_2 + \bar\mu_2\varphi_1, \quad B = \bar\mu_1(\rho_3^0/\rho_1^0)\varphi_2 + \bar\mu_2\varphi_1, \quad \bar g = g(\rho_1^0 - \rho_2^0),$$

$$p_0' = \frac{dp_0}{d\theta}, \qquad \bar\mu_i = \frac{\mu_i}{K_0\bar k_{0i}}, \qquad i = 1,2.$$

Уравнение (22) рассматривается при $\xi < 0$ и условии $s(0) = s^+$ (см. условия 1–3 в подп. 2.1), т. е. для $s(\xi)$ рассматривается задача Коши, а условие $s\big|_{\xi=-\infty} = 0$ должно быть обосновано.

Для нахождения давлений p_1 и p_2 рассмотрим вытекающее из законов Дарси (первые уравнения в (10)) равенство

$$\sum_{i=1}^{2}(\bar\mu_i v_i - g\rho_i^0\varphi_i) = -(\varphi_1+\varphi_2)\Big(\frac{dp_2}{d\xi} - \frac{\varphi_1}{\varphi_1+\varphi_2}\,\frac{dp_c}{d\xi}\Big).$$

Положим [7]

$$p(\xi) \equiv p_2(\xi) - p_0(\theta)b(s), \qquad b(s) = \int\limits_0^s \frac{\varphi_1(\zeta)\gamma'(\zeta)}{\varphi_1(\zeta)+\varphi_2(\zeta)}\,d\zeta.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{dp}{d\xi} = -\frac{1}{\varphi_1(s)+\varphi_2(s)}\Big[\sum_{i=1}^{2}(\bar\mu_i v_i(\xi) - g\rho_i^0\varphi_i) - \\ - p_0'(\theta)\,\frac{f_1}{\lambda_{\text{c}}}\,\big(\varphi_1(s)\gamma(s) + b(s)(\varphi_1(s)+\varphi_2(s))\big)\Big] \equiv f_3(s,\theta), \\ p(0) = p^+ - p_0(\theta^+)b(s^+).\end{gathered} \qquad (23)$$

Из (23) следует

$$\begin{gathered}p(\xi) = p^+ - p_0(\theta^+)b(s^+) - \int\limits_\xi^0 f_3(s(\zeta),\theta(\zeta))\,d\zeta, \\ p_2(\xi) = p(\xi) + p_0(\theta)b(s), \qquad p_1(\xi) = p_2(\xi) - p_c(s(\xi),\theta(\xi)).\end{gathered} \qquad (24)$$

Если функции $s(\xi)$ и $\theta(\xi)$ найдены, то скорости фильтрации $v_i(\xi)$ и давления $p_i(\xi)$ определяются по формулам (16), (24).

Определение. Слабым решением задачи (8)–(13) называются функции $\theta(\xi)$, $s(\xi)$, $v_i(\xi)$, $p_i(\xi)$ и фиксированный параметр c, если:

1) функция $\theta(\xi)$ имеет непрерывную производную, удовлетворяет уравнению (17) и условиям $\theta(0) = \theta^+$, $\theta\big|_{\xi\to-\infty} = \theta^-$, $\partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;

2) функция $s(\xi)$ имеет непрерывную производную с весом $a(s)$, удовлетворяет уравнению (22) и условиям $s(0) = s^+$, $s\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;

3) функции $v_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам (16) и условиям $v_i(0) = v_i^+$, $v_i\big|_{\xi\to-\infty} = 0$;

4) функции $p_i(\xi)$ удовлетворяют равенствам (24) и условию $p_2(0) = p_2^+$.

Следуя [7] (с учетом обозначений пространств в этой работе), в дополнение к условиям 1–3 (см. подп. 2.1) и условиям на постоянные ρ_i^0, c_i и ν (см. подп. 2.2) будем считать, что функции $\bar{\mu}_i(s,\theta)$, $\bar{k}_{0i}(s,\theta)$, $p_0(\theta)$, $\gamma(s)$, $a_0(s)$ удовлетворяют следующим условиям ($\bar{\Omega}^* = [0,1]\times[\theta^-,\theta^+]$):

а) $0 < \nu_0^{-1} \leqslant \Big(\mu_i(s,\theta), \bar{k}_{0i}(s,\theta), p_0(\theta), \Big|\dfrac{d\gamma(s)}{ds}\Big|\Big) \leqslant \nu_0$, $\frac{a_0(s)}{s}\Big|_{s=0} = 0$;

б) $\Big(\Big\|\dfrac{d\gamma}{ds}\Big\|_{C[0,1]}, \Big\|\dfrac{dp_0}{d\theta}\Big\|_{C[\theta^-,\theta^+]}, \|\mu_i(s,\theta), \bar{k}_{0i}(s,\theta)\|_{C(\bar{\Omega}^*)}\Big) \leqslant \nu_0$.

Теорема. *При выполнении условий “а”, “б” и условия* $s^+ \in (0,1]$ *существует по крайней мере одно слабое решение задачи* (8)–(13). *Это решение (дополнительно к определению) обладает свойствами*

$$0 \leqslant s(\xi) \leqslant 1, \qquad \theta^- \leqslant \theta(\xi) \leqslant \theta^+, \qquad c = \frac{(1+\lambda)v_2^+}{(1-m^-)(1-\rho_3^0/\rho_1^0)} < 0.$$

Существует точка $\xi_* \in (-\infty, \xi_1]$, *такая что* $s(\xi) = 0$ *для всех* $\xi \leqslant \xi_*$.

Для доказательства теоремы достаточно установить разрешимость (см. определение слабого решения для $s(\xi)$ и $\theta(\xi)$) задачи

$$a_0(s)\,\frac{ds}{d\xi} = f_2(s,\theta), \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{f_1(\theta)}{\lambda_{\text{c}}(s,\theta)}, \quad \xi < 0, \quad s(0) = s^+, \quad \theta(0) = \theta^+ \tag{25}$$

и показать, что $s(\xi) \equiv 0$ при $\xi \leqslant \xi_*$. Тогда все условия, входящие в определение слабого решения задачи (8)–(13), будут выполнены.

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, $a_\varepsilon(s) \equiv a_0(s) + \varepsilon > 0$. При $\xi < 0$ вместо (25) рассмотрим задачу

$$a_\varepsilon(s^\varepsilon)\,\frac{ds^\varepsilon}{d\xi} = f_2(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon), \quad \frac{d\theta^\varepsilon}{d\xi} = \frac{f_1(\theta^\varepsilon)}{\lambda_{\text{c}}(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)}, \quad s^\varepsilon(0) = s^+, \quad \theta(0) = \theta^+. \tag{26}$$

Локальная разрешимость задачи (26) при каждом $\varepsilon > 0$ следует из известных результатов [12. С. 21]. Получим равномерные по ε оценки $s^\varepsilon(\xi)$, $\theta^\varepsilon(\xi)$. (Заметим, что результаты, полученные в подп. 2.2 для $\theta(\xi)$, справедливы для $\theta^\varepsilon(\xi)$.)

Следующее утверждение уточняет свойства функций A и B, входящих в правую часть уравнения (22).

Лемма 1. *Если* $n_1 > 1$, $n_2 > 1$, $\alpha > 0$ *и* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *то*

$$\min(1,\alpha,\pi_\mu) \leqslant \pi(x) \equiv \alpha x^{n_1} + (1-x)^{n_2} \leqslant \max(1,\alpha),$$

где $\pi_\mu = \alpha(1+\beta)^{-n_1/\mu} + \beta^{n_2}(1+\beta)^{-n_2}$ *при* $\mu \leqslant 1$, $\pi_\mu = \alpha(1+\beta)^{-n_1} + \beta^{n_2}(1+\beta)^{-n_2\mu}$ *при* $\mu \geqslant 1$; $\mu = (n_1-1)/(n_2-1)$; $\beta = (n_1\alpha/n_2)^{1/(n_2-1)}$.

Доказательство. Имеем $\pi(1) = \alpha$, $\pi(0) = 1$, $\pi'' = \alpha n_1(n_1-1)x^{n_1-2} + n_2(n_2-1)(1-x)^{n_2-2} > 0$, т. е. в точке x_* локального минимума $x_* + \beta x_*^\mu = 1$. Ясно, что $x_* \in (0,1)$. Более того, если $\mu = 1$, то $x_* = 1/(1+\beta)$. При $\mu < 1$ имеем $x_*(1+\beta) \leqslant 1$ и $1 \leqslant x_*^\mu(1+\beta)$, т. е. $(1+\beta)^{-1} \leqslant x_*^\mu \leqslant (1+\beta)^{-\mu}$. При $\mu > 1$ имеем $x_*^\mu(1+\beta) \leqslant 1$ и $1 \leqslant x_*(1+\beta)$, т. е. $(1+\beta)^{-\mu} \leqslant x_*^\mu \leqslant (1+\beta)^{-1}$. Поэтому $\pi(x_*) = \alpha x_*^{n_1} + \beta^{n_2} x_*^{n_2\mu}$, т. е. $\pi(x_*) = \alpha(1+\beta)^{-n_1} + \beta^{n_2}(1+\beta)^{-n_2}$ при $\mu = 1$, $\pi(x_*) \geqslant \alpha(1+\beta)^{-n_1/\mu} + \beta^{n_2}(1+\beta)^{-n_2}$ при $\mu < 1$, $\pi(x_*) \geqslant \alpha(1+\beta)^{-n_1} + \beta^{n_2}(1+\beta)^{-n_2\mu}$ при $\mu > 1$, что и завершает доказательство.

Лемма 2. *Если* $s^\varepsilon(\xi)$ — *решение задачи* (26) *и* $s^+ \in [0,1]$, *то* $0 \leqslant s^\varepsilon(\xi) \leqslant 1$.

Доказательство. Из (26) получаем

$$\frac{ds^\varepsilon}{d\xi} - Rs^\varepsilon = -Q,$$

где

$$R = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}\Big(|c|mA + \bar g\,\frac{\varphi_1(s^\varepsilon)}{s^\varepsilon}\varphi_2 + \frac{\varphi_1(s^\varepsilon)}{s^\varepsilon}\varphi_2\gamma\,\frac{f_1}{\lambda_{\rm c}}(p_0')^+\Big),$$

$$Q = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}\Big(|c|(m-m^-)B + \varphi_1\varphi_2\gamma\,\frac{f_1}{\lambda_{\rm c}}(p_0')^-\Big),$$

$$(p_0')^+ = \max\,(0,p_0'), \qquad (p_0')^- = -\min\,(0,p_0'), \qquad p_0' = (p_0')^+ - (p_0')^-.$$

В силу леммы 1 имеем $A > 0$, $B > 0$ и, следовательно, $R > 0$, $Q \geqslant 0$. Поэтому

$$s^\varepsilon(\xi) = \Big(s^+ + \int\limits_\xi^0 Q(x)\exp\Big(-\int\limits_0^x R(\zeta)\,d\zeta\Big)dx\Big)\exp\Big(\int\limits_0^\xi R(\zeta)\,d\zeta\Big) \geqslant 0.$$

Для функции $1 - s^\varepsilon(\xi)$ из (26) находим

$$\frac{d\,(1-s^\varepsilon)}{d\xi} - R_1(1-s^\varepsilon) = -Q_1,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}\Big(|c|mA + \frac{\varphi_2(s^\varepsilon)}{1-s^\varepsilon}\,\varphi_1\gamma\,\frac{f_1}{\lambda_{\rm c}}\,(p_0')^-\Big) > 0,$$

$$Q_1 = \frac{1}{p_0 a_\varepsilon}\Big[|c|\Big(m\bar\mu_1\varphi_2\Big(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big) + m^-B\Big) + \bar g\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2\gamma\,\frac{f_1}{\lambda_{\rm c}}\,(p_0')^+\Big] > 0.$$

Тогда

$$1 - s^\varepsilon(\xi) = \Big(1 - s^+ + \int\limits_\xi^0 Q_1(x)\exp\Big(-\int\limits_0^x R_1(\zeta)\,d\zeta\Big)dx\Big)\exp\Big(\int\limits_0^\xi R_1(\zeta)\,d\zeta\Big) \geqslant 0,$$

что и завершает доказательство.

Положим $v^\varepsilon \equiv \int\limits_0^{s^\varepsilon} a_\varepsilon(\zeta)\,d\zeta$. Тогда $dv^\varepsilon/ds^\varepsilon = a_0(s^\varepsilon) + \varepsilon > 0$ и $s^\varepsilon = s(v^\varepsilon)$. Рассмотрим задачу

$$\frac{dv^\varepsilon}{d\xi} = f_2(s(v^\varepsilon),\theta^\varepsilon), \qquad \frac{d\theta^\varepsilon}{d\xi} = \frac{f_1(\theta^\varepsilon)}{\lambda_{\rm c}(s(v^\varepsilon),\theta^\varepsilon)}, \qquad \xi < 0,$$
$$v^\varepsilon(0) = \int\limits_0^{s^+} a_\varepsilon(\zeta)\,d\zeta \equiv v_\varepsilon^+, \qquad \theta^\varepsilon(0) = \theta^+. \tag{27}$$

В силу свойств $\bar\mu_1$, $\bar\mu_2$, p_0 и леммы 2 функции f_2 и $f_1/\lambda_{\rm c}$ непрерывны по переменным ξ, s^ε, θ^ε и ограничены равномерно по ε. Поэтому решение задачи (27) существует и может быть продолжено на любой конечный интервал [12. С. 24]. В частности, для любой точки $\xi \in [\xi_1, 0]$ имеем $|dv^\varepsilon/d\xi| \leqslant C(\nu_0, n_1, n_2, g_\mu)$. Таким образом, семейство функций $\{v^\varepsilon(\xi)\}$ равностепенно-непрерывно и равномерно ограничено для всех $\xi \in [\xi_1, 0]$. Аналогичное свойство для $\{\theta^\varepsilon(\xi)\}$ следует из второго уравнения в (27), а для $\{s^\varepsilon(\xi)\}$ — из неравенства $|s^\varepsilon(\xi_1) - s^\varepsilon(\xi_2)| \leqslant 4^{-\alpha}\alpha K|v^\varepsilon(\xi_1) - v^\varepsilon(\xi_2)|^\alpha$, полученного в [7. С. 95] при $a_0(s) \geqslant K(s(1-s))^\varkappa$, $\varkappa = \text{const} > 0$, $K = \text{const} > 0$, $\alpha = (1+\varkappa)^{-1}$.

Согласно теореме Арцела из последовательностей $\{v^\varepsilon(\xi)\}$, $\{s^\varepsilon(\xi)\}$ и $\{\theta^\varepsilon(\xi)\}$ можно выбрать равномерно сходящиеся к $v(\xi)$, $s(\xi)$ и $\theta(\xi)$ подпоследовательности. В силу непрерывности $f_2(s,\theta)$ и $f_1(\theta)/\lambda_c(s,\theta)$ в равенствах

$$v_\varepsilon^+ - v^\varepsilon(\xi) = \int\limits_\xi^0 f_2(s^\varepsilon(\zeta),\theta^\varepsilon(\zeta))\,d\zeta, \qquad \theta^+ - \theta^\varepsilon(\xi) = \int\limits_\xi^0 \frac{f_1(\theta^\varepsilon(\zeta))}{\lambda_c(s^\varepsilon(\zeta),\theta^\varepsilon(\zeta))}\,d\zeta$$

можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$. Таким образом, предельные функции удовлетворяют соответствующим интегральным уравнениям, т. е. являются решением задачи (25).

Функция $s(\xi)$ непрерывна на отрезке $[\xi_1, 0]$, и, следовательно, существует значение $s^1 \equiv s(\xi_1) \in [0,1]$. Поэтому можно рассмотреть задачу

$$a_0(s)\,\frac{ds}{d\xi} = f_2(s,\theta), \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{f_1(\theta)}{\lambda_c(s,\theta)}, \quad \xi < \xi_1, \quad s(\xi_1) = s^1, \quad \theta(\xi_1) = \theta_1, \tag{28}$$

где

$$f_2 = \varphi_1\varphi_2\gamma\,\frac{p_0'}{p_0}\,\frac{f_1}{\lambda_c} + \frac{1}{p_0}\,\bar g\varphi_1\varphi_2 + \frac{1}{p_0}\,|c|m^- As.$$

Замечание 2. Справедливо следующее утверждение: если $s^+ > 0$, то $s(\xi) > 0$ в любой внутренней точке отрезка $[\xi_1, 0]$. Для доказательства рассмотрим систему уравнений (26) на интервале $I_\tau = [\xi_\tau, 0]$, где $\xi_\tau = \xi_1 + \tau$; $\tau > 0$ — малое число. На этом интервале

$$\min_{\xi\in I_\tau}\Big(\frac{1}{p_0}\,|c|(m-m^-)B\Big) \equiv B_\tau > 0$$

в силу определения $m(\theta)$ и монотонности $\theta(\xi)$. Тогда на множестве $A_\delta = \{\xi \in I_\tau, s^\varepsilon < \delta\}$ функция

$$-f_2(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon) \geqslant B_\tau - \delta\max_{\xi\in I_\tau}\Big(\frac{1}{p_0}\Big(\varphi_1\varphi_2\gamma|p_0'|\,\frac{f_1}{s\lambda_c} + \bar g\varphi_1\varphi_2\,\frac{1}{s} + |c|mA\Big)\Big) \geqslant \frac{1}{2}\,B_\tau$$

при $0 < \delta \leqslant \delta_0$, где

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\,B_\tau\Big[\max_{\xi\in I_\tau}\Big(\frac{1}{p_0}\Big(\varphi_1\varphi_2\gamma|p_0'|\,\frac{f_1}{s\lambda_c} + \bar g\varphi_1\varphi_2\,\frac{1}{s} + |c|mA\Big)\Big)^{-1}\Big].$$

Рассмотрим функцию $z^\delta(\xi) = \max\{\delta - s^\varepsilon, 0\}$, $\delta < \min(s^+, \delta_0)$. Имеем $z^\delta(0) = 0$. Умножая первое уравнение в (26) на $z^\delta(\xi)/a_\varepsilon$ и интегрируя полученное равенство по ξ от $\xi_0 \in I_\tau$ до нуля, получим

$$(z^\delta(\xi_0))^2 - 2\int\limits_{\xi_0}^0 \frac{z^\delta f_2}{a_\varepsilon}\,d\zeta = 0.$$

Отсюда следует, что $z^\delta(\xi) = 0$, поэтому $s^\varepsilon(\xi) \geqslant \delta$ при всех $\xi \in I_\tau$ и при любом $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \to 0$ получим аналогичное неравенство для $s(\xi)$.

Лемма 3. *Пусть $s(\xi)$ — решение задачи (28) и выполнено условие $\varphi_1(s)\gamma(s)/s \leqslant \nu_0$, $s \in [0,1]$. Тогда существует точка $\xi_* \leqslant \xi_1$, такая что $s(\xi) \equiv 0$ при всех $\xi \leqslant \xi_*$. Если $s^1 = 0$ и $\varphi_1(s)\gamma(s)/s\big|_{s=0} = 0$, то $\xi_* = \xi_1$.*

Доказательство. Из (28) следует

$$\frac{du}{d\xi} + D_1(s,\theta) = D_2(s,\theta), \qquad u = \int\limits_0^s \frac{a_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta. \tag{29}$$

Здесь

$$D_1(s,\theta) = \frac{\varphi_1(s)}{s}\,\varphi_2\gamma(p_0')^-\,\frac{f_1}{p_0\lambda_{\text{c}}}, \qquad f_1 = b_2(\theta-\theta^-) \geqslant 0,$$

$$D_2(s,\theta) = \frac{1}{p_0}\Big(|c|m^-A + \bar g\,\frac{\varphi_1}{s}\,\varphi_2 + \frac{\varphi_1(s)}{s}\,\varphi_2\gamma(p_0')^+\,\frac{f_1}{\lambda_{\text{c}}}\Big).$$

Согласно лемме 1

$$D_2(s,\theta) \geqslant |c|m^-A\min_{s,\theta}(\bar\mu_1/p_0)\min(1,\alpha,\pi_\mu) \equiv D_2^0 > 0,$$

где $\alpha = \min\limits_{s,\theta}\bar\mu_1/\bar\mu_2 > 0$, $\theta\in[\theta^-,\theta^+]$, $s\in[0,1]$. Используя представление (21) для функции $\theta(\xi)\in[\theta^-,\theta_1]$, получаем

$$|D_1| \leqslant D_1^0\exp\Big(-\frac{1}{\lambda_{\text{c}}^+}(\xi_1-\xi)\Big), \qquad \int\limits_{\xi}^{\xi_1}|D_1(\zeta)|\,d\zeta \leqslant \frac{1}{\lambda_{\text{c}}^+}\,D_1^0,$$

где

$$D_1^0 = \frac{1}{\lambda_{\text{c}}^-}\,b_2(\theta_1-\theta^-)\max_{s,\theta}\Big(\frac{1}{p_0}\,\frac{\varphi_1(s)}{s}\,\varphi_2\gamma(p_0')^-\Big) \leqslant \frac{1}{\lambda_{\text{c}}^-}\,b_2(\theta_1-\theta^-)\nu_0^3,$$

$$\lambda_{\text{c}}^- = a_{\text{c}} + b_{\text{c}}(\rho_2^0m^-)^2, \qquad \lambda_{\text{c}}^+ = a_{\text{c}} + b_{\text{c}}(\rho_1^0m^- + \rho_3^0(1-m^-))^2.$$

Интегрируя уравнение (29) по ξ от произвольного значения ξ до ξ_1, получаем

$$u(s(\xi_1)) + D_1^0/\lambda_{\text{c}}^+ \geqslant D_2^0(\xi_1-\xi) + u(s(\xi)). \tag{30}$$

Здесь $u(s(\xi_1)) = 0$ при $s(\xi_1) = 0$ и $u(s(\xi_1)) \leqslant \int\limits_0^1 \frac{a_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$ при $s(\xi_1) > 0$. Последний интеграл сходится в силу предположений леммы 3, поэтому $u(s(\xi)) \leqslant 0$ при всех $\xi \leqslant \xi_*$, где ξ_* удовлетворяет условию

$$D_2^0\xi_* = D_2^0\xi_1 - \frac{1}{\lambda_{\text{c}}^+}\,D_1^0 - \int\limits_0^1\frac{a_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

Тогда из определения $u(s)$ следует, что $u(s(\xi)) \equiv 0$ при $\xi \leqslant \xi_*$.

Пусть $s(\xi_1) = 0$, $\varphi_1(s)\gamma(s)/s\big|_{s=0} = 0$ (в этом случае $s(\xi) = 0$ удовлетворяет первому уравнению в (28)). Если $s(\xi)$ — решение (28), то в силу леммы 2 функции $u(\xi)$, $s(\xi)$ непрерывны по ξ. Рассмотрим малую окрестность точки ξ_1, предположив, что в точке $\xi = \xi_1 - \delta$, $\delta > 0$ имеет место неравенство $s(\xi) > 0$. При $\xi\in[\xi_1-\delta,\xi_1]$ из уравнения (29) получаем

$$\frac{du}{d\xi} \geqslant D_2^0 - \min_{s,\theta}\Big((p_0')^-\,\frac{f_1}{p_0\lambda_{\text{c}}}\Big)\frac{\varphi_1(s)}{s}\,\varphi_2\gamma \geqslant \frac{1}{2}\,D_2^0$$

за счет соответствующего выбора δ. Тогда $0 = u(s(\xi_1)) \geqslant D_2^0\delta/2 + u(s(\xi))$, т. е. $u(s(\xi)) < 0$ и, следовательно, $s(\xi) = 0$. Повторяя этот процесс, на k-м шаге получаем $s(\xi_k) = 0$, $\xi_k = \xi_1 - k\delta$, $k > 1$. При достижении значения k, при котором выполняется неравенство $D_1^0 \leqslant \lambda_{\text{c}}D_2^0k\delta$, используя (30), получим $s(\xi_k) = 0$, $\xi\in(-\infty,\xi_1]$. Лемма доказана.

С учетом леммы 3 задача (28) рассматривается аналогично задаче (25).

Таким образом, существуют функции $s(\xi)$ и $\theta(\xi)$, удовлетворяющие определению слабого решения задачи (8)–(13). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Blagovechshenskiy V., Eglit M., Naaim M.** The calibration of avalanche mathematical model using field data // Natur. Hazards. 2002. N 2. P. 203–209.
2. **Anderson E. A.** Hydro 17 — snow model. NWSRES users manual, pt 11.2. Silver Spring (MD): NOAA Nat. Weather Service, 1996.
3. **Кучмент Л. С.** Формирование речного стока. Физико-математические модели / Л. С. Кучмент, В. Н. Демидов, Ю. Г. Мотовилов. М.: Наука, 1983.
4. **Fowler A. C.** An introduction to mathematical modeling. Oxford: Oxford Univ., 2002.
5. **Rankinen K., Karvonen T., Butterfield D.** A simple model for predicting soil temperature in snow-cover and seasonally forozen soil: model description and testing // Hydrology Earth System Sci. 2004. N 8. P. 706–716.
6. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
7. **Жумагулов Б. Т.** Гидродинамика нефтедобычи / Б. Т. Жумагулов, В. Н. Монахов. Алматы: Каз. гос. ин-т науч.-техн. информ., 2001.
8. **Цыпкин Г. Г.** Математическая модель диссоциации газовых гидратов, сосуществующих с газом в пластах // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 1. С. 56–59.
9. **Васильев В. И.** Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах / В. И. Васильев, А. М. Максимов, Е. Е. Петров, Г. Г. Цыпкин. М.: Наука, 1997.
10. **Бэр Я.** Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. М.: Мир, 1971.
11. **Рабинович В. А.** Краткий химический справочник / В. А. Рабинович, З. Я. Хавин. М.: Химия, 1978.
12. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 31/III 2006 г.,
в окончательном варианте — 5/III 2008 г.