

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

А. П. Трифонов, Р. В. Куцов
(Воронеж)

ОБНАРУЖЕНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОСТРАНСТВЕННО
ПРОТЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА
НА ФОНЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ*

Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения изображения движущегося пространственно протяженного объекта с неизвестной интенсивностью при наличии фона с неизвестной интенсивностью для аппликативной модели взаимодействия полезного изображения и фона.

В последнее время существенно возросла разрешающая способность систем дистанционного наблюдения, что стимулировало развитие теории обнаружения объектов по их изображениям с учетом затенения фона. Вопросы обнаружения пространственно протяженных объектов (ППО) рассматриваются в [1–5] и других работах. В [2, 3] показано, что использование аддитивной модели взаимодействия ППО и фона может приводить к недостоверным результатам. В [2–4] на основе аппликативной модели, учитывающей эффекты затенения объектом участка фона, получены характеристики обнаружения неподвижного ППО. В работе [5] исследованы потенциальные возможности обнаружения и маскирования средствами камуфляжа движущегося детерминированного ППО, наблюдаемого на неравномерном детерминированном фоне. Однако на практике часто возникают ситуации, когда параметры изображения движущегося ППО и неподвижного фона априори неизвестны.

Целью работы является синтез и анализ квазиправдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения движущегося ППО по его изображению с неизвестными параметрами при наличии фона с неизвестными параметрами.

Пусть в двумерной области в течение интервала времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $x(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей D , а t – время. Положим [5], что при гипотезе H_1 поле $x(\mathbf{r}, t)$ содержит изображения

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Министерства науки и образования РФ (проект № VZ-010-00).

движущегося со скоростью V объекта $s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$, неподвижного фона $n(\mathbf{r}, t)$ и аддитивный гауссовский пространственно-временной белый шум $n(\mathbf{r}, t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_n(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle n(\mathbf{r}_1, t_1)n(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = N_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(t_1 - t_2)/2,$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность белого шума.

В соответствии с аппликативной моделью, учитывающей эффекты затенения объектом участка фона, полагаем, что изображение объекта занимает часть S области Ω , а фоновое излучение формируется оставшейся частью области наблюдения. При отсутствии объекта фон занимает всю область наблюдения. Тогда в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдению доступна реализация изображения в картинной плоскости

$$x(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a})n(\mathbf{r}, t): H_0; \\ s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0)I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + n(\mathbf{r}, t): H_1, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 – истинные значения векторов неизвестных параметров полезного изображения и фона соответственно; $I_s(\mathbf{r}) = 1$ при $\mathbf{r} \in S$ и $I_s(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \notin S$ – индикаторная функция, описывающая форму изображения объекта.

Для решения задачи проверки гипотезы H_1 против альтернативы H_0 необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). В работах [6–9] приведены выражения для ФОП в случаях, когда при одной из гипотез наблюдаемое поле представляет собой реализацию гауссовского белого шума. Введем вспомогательную гипотезу H , при которой $x(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, что ФОП при проверке гипотезы H_1 против H_0 есть отношение ФОП при проверке гипотез H_1 и H_0 против простой альтернативы H , т. е. $[H_1 | H_0] = [H_1 | H] / [H_0 | H]$. Следовательно, логарифм ФОП $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ln [H_1 | H_0] = L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - L_0(\mathbf{b})$, где

$$L_0(\mathbf{b}) = \ln [H_0 | H] = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} x(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r}; \mathbf{b}) d\mathbf{r} dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} s^2(\mathbf{r}; \mathbf{b}) d\mathbf{r} dt, \quad (2)$$

$$L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ln [H_1 | H]$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} x(\mathbf{r}, t) \{s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a})I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + n(\mathbf{r}, t)\} d\mathbf{r} dt \\ & - \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} \{s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a})I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + s^2(\mathbf{r}; \mathbf{b})[1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)]\} d\mathbf{r} dt \end{aligned} \quad (3)$$

– логарифмы ФОП при проверке гипотез H_0 и H_1 против альтернативы H соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} x(\mathbf{r}, t) [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}) + n(\mathbf{r}, t)] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \\ & - \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} [s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}) + s^2(\mathbf{r}; \mathbf{b})] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt. \end{aligned}$$

Если истинные значения параметров полезного изображения \mathbf{a}_0 и фона \mathbf{b}_0 априори известны, то решение о наличии объекта в области наблюдения выносится на основе сравнения величины $L = L(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ с порогом h , определяемым выбранным критерием оптимальности [6–10]:

$$L \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} h. \quad (4)$$

При неизвестных истинных значениях параметров изображения и фона возможно применение квазиправдоподобного обнаружителя (КПО) [7]. Для синтеза КПО вместо истинных значений $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ используются ожидаемые (прогнозируемые) значения неизвестных параметров $\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*$. Решение о наличии или отсутствии объекта в области наблюдения выносится путем сравнения величины $L_* = L(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*)$ с порогом в соответствии с правилом (4). В общем случае $\mathbf{a}_* \neq \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_* \neq \mathbf{b}_0$, однако при $\mathbf{a}_* = \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_* = \mathbf{b}_0$ КПО переходит в оптимальный обнаружитель. Определим, в какой степени рассогласование между истинными $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ и прогнозируемыми $\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*$ значениями параметров изображения объекта и фона ухудшает характеристики обнаружения.

Обычно эффективность алгоритма обнаружения характеризуется величинами вероятностей ложной тревоги и пропуска объекта (или вероятностью правильного обнаружения $P_0 = 1 - \alpha$). Поскольку логарифм ФОП представляет собой линейное преобразование гауссовского поля, величина L_* подчиняется гауссовскому закону распределения. Отсюда

$$L_* \sim N\left[\frac{1}{N_0} \int_0^T [s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) - s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_*)]^2 dt, \frac{1}{N_0} \int_0^T [s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)]^2 dt\right], \quad (5)$$

где $\int_0^T (x) \exp(-y^2/2) dy / \sqrt{2} -$ интеграл вероятности; $m_i = \langle L_* | H_i \rangle$; $\sigma_i^2 = \langle L_*^2 | H_i \rangle - m_i^2$. Выполняя усреднение, находим

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} [s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) - s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} [s^2(\mathbf{r}, \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt, \\ m_1 &= \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) [s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} [s^2(\mathbf{r}, \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt, \\ \sigma_0^2 &= \sigma_1^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} [s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}, \mathbf{b}_*)]^2 I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt. \end{aligned}$$

Положим, что используется критерий оптимальности Неймана – Пирсона. Тогда при заданной вероятности ложной тревоги α порог $h = h(\alpha, q_1)$, где $q_1 = \arcsin(1 - \alpha)$ (здесь $\arcsin(\cdot)$ – функция, обратная ин-

тегралу вероятности). Подставляя порог h в выражение для вероятности пропуска объекта, получим $q_1 = 1 - (q_0 - q_1)$, где

$$q_1^2 = \frac{m_1 - m_0}{2}$$

$$q_0^2 = \frac{\int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) - (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0)][s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - (\mathbf{r}; \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}{N_0 \int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - (\mathbf{r}; \mathbf{b}_*)]^2 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}$$

– параметр обнаружения при использовании КПО. В случае оптимального обнаружителя (при известных значениях $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$) для заданной вероятности ложной тревоги q_0 вероятность пропуска объекта $q_1 = 1 - (q_0 - q_1)$, где параметр обнаружения [5]

$$q_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) - (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0)]^2 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \frac{z^2}{z_F^2} (z_F^2 - 2z_F - 1).$$

Здесь

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \quad (6)$$

– отношение сигнал/шум (ОСШ) для изображения объекта;

$$z_F^2 = \frac{z^2}{z^2} \int_0^T s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \bigg/ \int_0^T (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \quad (7)$$

– отношение сигнал/фон (ОСФ);

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \quad (8)$$

– отношение фон/шум (ОФШ), а величина $z_F^2 \in [0, 1]$ определяет степень корреляции изображения объекта и фона в просмотренной области Ω_1 :

$$z_F^2 = \frac{\int_0^T s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}{\sqrt{\int_0^T s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \int_0^T (\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}} \quad (9)$$

Положим, что область наблюдения и скорость движения объекта таковы, что за время T объект не пересекает границ области наблюдения. Тогда ОСШ (6) можно переписать в виде

$$z^2 = \frac{2T}{N_0} \int_{\Omega_1} s^2(\mathbf{r}; \mathbf{a}_0) d\mathbf{r} = 2E_s/N_0,$$

где $E_s = T \int s^2(\mathbf{r}; \mathbf{a}_0) d\mathbf{r}$ – энергия изображения объекта, наблюдаемая за время T .

При вычислении интеграла в (8) необходимо учесть, что следящее окно, описываемое функцией $I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$, перемещается со временем, просматривая все новые участки фона, причем общая площадь просмотренного участка фона S_1 равна $S_s + VTl$, где S_s – площадь объекта, V – модуль скорости движения объекта, l – размер объекта в направлении, перпендикулярном движению. Тогда величину интеграла в (8) приближенно можно оценить по формуле [5]

$$z^2 \frac{2T}{N_0} \frac{S_s}{S_s + VTl} \int s^2(\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

В силу монотонной зависимости вероятности обнаружения от величины параметра q , ухудшение качества обнаружения можно характеризовать отношением

$$\frac{q_0}{q_*} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{\sqrt{\int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_*)]^2 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt} \sqrt{\int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) - s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_0)]^2 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}}{\int_0^T [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) - s(\mathbf{r})][s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}},$$

где R – коэффициент корреляции между пространственно-временными сигналами $[s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_*) - s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_*)] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ и $[s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t; \mathbf{a}_0) - s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_0)] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$.

Рассмотрим величину R в случае, когда сигнал и фон известны с точностью до амплитудных множителей $s(\mathbf{r}; \mathbf{a}_0) = a_0 s_1(\mathbf{r})$, $s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_0) = b_0 s_1(\mathbf{r})$, в то время как ожидаются $s(\mathbf{r}; \mathbf{a}_*) = a_* s_1(\mathbf{r})$ и $s(\mathbf{r}; \mathbf{b}_*) = b_* s_1(\mathbf{r})$, где $s_1(\mathbf{r})$ – известные функции, причем $\max s_1(\mathbf{r}) = 1$, $\max s_1(\mathbf{r}) = 1$. Тогда

$$R = \frac{\sqrt{(1 - 2 z_F z_F^2)(z_F^2 - 2 z_F z_F^2) / [z_F(1 - z_F^2)]}}{\sqrt{(1 - 2 z_F z_F^2)(z_F^2 - 2 z_F z_F^2) / [z_F(1 - z_F^2)]}}, \quad (11)$$

где

$$z_F = \frac{a_0 b_* / a_* b_0}{\sqrt{\int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \sqrt{\int_0^T [s_1^2(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt]}}; \quad (12)$$

Для сравнения качества работы различных алгоритмов обнаружения используем значение порогового ОСШ z_t , при котором вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска объекта равны заданной величине $P = 1/2$ [6]:

$$P. \quad (13)$$

Решая систему уравнений (5), (13), находим пороговые ОСШ для оптимального z_{0t} и квазиправдоподобного z_{*t} алгоритмов:

$$z_{0t} = 2z_F \arccos(1 - P) / \sqrt{z_F^2 - 2z_F + 1}, \quad (14)$$

$$z_{*t} = 2z_F \arccos(1 - P) \sqrt{z_F^2 - 2z_F + 1} / [(1 - P)z_F - z_F^2]. \quad (15)$$

Проигрыш в величине порогового ОСШ для КПО по сравнению с оптимальным обнаружителем z_{*t}/z_{0t} определяется выражением (11), формально совпадающим с аналогичным выражением, полученным в [4], для неподвижного объекта.

Обнаружение движущегося объекта по его изображению с неизвестной интенсивностью при наличии детерминированного фона. С целью повышения качества обнаружения при неизвестных параметрах объекта и фона можно одновременно производить оценку неизвестных параметров. Заменяя значения неизвестных параметров на их оценки максимального правдоподобия, получаем обобщенный алгоритм максимального правдоподобия (АМП) [7–9].

Пусть неизвестна интенсивность объекта. Проводя максимизацию логарифмов ФОП (2), (3):

$$L_0(b) = \frac{2b}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt - \frac{b^2}{N_0} \int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt, \quad (16)$$

$$L_1(a, b) = \frac{2a}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt - \frac{2b}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt - \frac{a^2}{N_0} \int_0^T s_1^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt - \frac{b^2}{N_0} \int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt, \quad (17)$$

по неизвестному параметру a [9], получим

$$L_{m1} = \sup_a L_1(a, b_0) = L_0(b_0) + \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}{\int_0^T s_1^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt} - \frac{\frac{2b_0}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}{2}, \quad (18)$$

где

$$z^2 = \frac{2b_0^2 T}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} s_1^2(\mathbf{r}, t) I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \quad (19)$$

– ОФШ. В отличие от КПО и оптимального алгоритма обнаружения АМП является существенно нелинейным.

Решение о наличии или отсутствии объекта по-прежнему выносится на основе сравнения логарифма ФОП (18) с порогом h в соответствии с правилом (4). Найдем вероятности ложной тревоги и пропуска объекта (5). Для этого получим закон распределения достаточной статистики (18). Введем в рассмотрение стандартные гауссовские случайные величины

$$(p, m_p) / \sigma_p; \quad (q, m_q) / \sigma_q, \quad (20)$$

где

$$p = \frac{2a_0^2 T}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt;$$

$$q = \frac{2b_0^2 T}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt;$$

$m_p, m_q, \sigma_p^2, \sigma_q^2$ – математические ожидания и дисперсии случайных величин p и q . Величины s_1, s_2 являются центрированными гауссовскими случайными величинами с единичной дисперсией и коэффициентом корреляции R . Подставляя в (18) реализацию наблюдаемых данных (1), запишем значения логарифма ФОП при гипотезах H_0 и H_1 с учетом обозначений (20):

$$L_{m1}[H_0] = (z - m_p)^2 / 2 - z^2 / 2,$$

$$L_{m1}[H_1] = (z - m_q)^2 / 2 - z^2 / 2 - zz,$$

где

$$z^2 = \frac{2a_0^2 T}{N_0} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} s_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt - \frac{2a_0^2 T}{N_0} \int_{\mathbf{r}} s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

– ОСШ, а z определено в (12).

Записав совместную плотность вероятности величин z, y и пользуясь методом функционального преобразования плотностей вероятностей [6], найдем выражения для плотностей вероятности логарифма ФОП при обеих гипотезах. На их основе получим точные выражения для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта:

$$P_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{y_0(h)}^{\infty} \exp(-y^2/2) \frac{(z - y) \sqrt{2h - 2yz - z^2}}{\sqrt{1 - R^2}} dy$$

$$\frac{(z-y) \sqrt{2h-2yz-z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dy, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-y^2/2) \frac{z-y \sqrt{2h-2yz-2zz-z^2}}{\sqrt{1-z^2}} \frac{z-y \sqrt{2h-2yz-2zz-z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dy, \quad (22)$$

где $Y_0(h) = (h/z - z/2)$, $Y_1(h) = (h/z - z - z/2)$.

Для определения порогового ОСШ z_m , при котором $P_1 = P$, необходимо подставить выражения (21), (22) в систему уравнений

$$P_1(z_m, h) = P; \quad P_2(z_m, h) = P. \quad (23)$$

Решить систему (23) затруднительно, поэтому получим приближенное выражение для z_m . С этой целью представим значение логарифма ФОП при гипотезе H_i , $i = 0, 1$, в виде $L_{m1}[H_i] = w_i^2/2$, где $w_i^2/2$ – негауссовская случайная величина с математическим ожиданием $m_w = 1/2$ и дисперсией $\sigma_w^2 = 1/2$, а ξ_i – гауссовские случайные величины с математическими ожиданиями

$$m_0 = z^2(1-z^2)/2; \quad m_1 = (z^2 - z^2 - 2zz)/2 \quad (24)$$

и дисперсиями

$$\sigma_0^2 = 2m_0; \quad \sigma_1^2 = 2m_1. \quad (25)$$

Если $z^2 \ll 1$, $z^2 \ll 1$, то $\frac{m_i}{\sigma_i^2} = \min(\frac{m_0}{\sigma_0^2}, \frac{m_1}{\sigma_1^2})$, поэтому $L_{m1}[H_i] \approx 1/2 \xi_i^2$, а логарифм ФОП (18) можно приближенно считать гауссовской случайной величиной с математическими ожиданиями и дисперсиями

$$m_i = 1/2 m_i; \quad \sigma_i^2 = \sigma_i^2. \quad (26)$$

Используя выражения (24)–(26), находим гауссовские аппроксимации для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта:

$$P_1 = 1 - \Phi\left(\frac{2h - 1 - z^2(1-z^2)}{2z \sqrt{1-z^2}}\right); \quad (27)$$

$$P_2 = 1 - \Phi\left(\frac{2h - 1 - z^2 - z^2 - 2zz}{2\sqrt{z^2 - z^2 - 2zz}}\right).$$

Подставляя (27) в систему уравнений (23) с учетом соотношения z/z_F и решая ее относительно z_m , находим выражение для порогового ОСШ в гауссовском приближении: $z_m = z_{1G}$, где

$$z_{1G} = \frac{2z_F \arccos(1-P) \sqrt{1-z_F^{-2}} \sqrt{z_F^2 - 2z_F - 1}}{[(z_F)^2 - 2(1-z_F^2)]}. \quad (28)$$

Точность формулы (28) растет с уменьшением вероятности ошибки P , т. е. с ростом порогового ОСШ.

Приигрыш в пороговом ОСШ для АМП в гауссовском приближении по сравнению с пороговым ОСШ для оптимального обнаружителя (14) запишется в виде

$$I_{1G} = z_{1G}/z_{0t} = \frac{\sqrt{1-2z_F/z_F^2} \sqrt{1-z_F^{-2}} \sqrt{z_F^2 - 2z_F - 1}}{[(z_F)^2 - 2(1-z_F^2)]}. \quad (29)$$

Обнаружение детерминированного изображения движущегося объекта при наличии фона с неизвестной интенсивностью. Пусть теперь неизвестна интенсивность фона. Проводя максимизацию логарифмов ФОП (16), (17) по неизвестному параметру b [9], получим

$$L_{m2} = \sup_b L_1(a_0, b) = \sup_b L_0(b) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt$$

$$= \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt}{N_0 \int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt} = \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt}{N_0 T \int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} = \frac{z}{2}. \quad (30)$$

Решение о наличии или отсутствии объекта выносится на основе сравнения логарифма ФОП (30) с порогом h в соответствии с правилом (4). Введем в рассмотрение стандартные гауссовские случайные величины

$$(p = m_p)/p; \quad (q = m_q)/q; \quad (l = m_l)/l, \quad (31)$$

где

$$p = \frac{2b_0}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt;$$

$$q = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt; \quad l = \frac{2b_0}{N_0} \int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt;$$

$m_p, m_q, m_l, \sigma_p^2, \sigma_q^2, \sigma_l^2$ – математические ожидания и дисперсии случайных величин p, q и l . Случайные величины p, q и l имеют нулевые математиче-

ские ожидания $\sigma = 0$, единичные дисперсии и коэффициенты взаимной корреляции $R = 0$, $R = \sqrt{(1-\rho)/2}$ и $R = \rho/\sqrt{2}$, где

$$T = \int_0^T \int_{\mathbf{r}} I_s(\mathbf{r}, \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt \quad (32)$$

– отношение энергии фона во всей области наблюдения, принятой за время T , к энергии фона в просмотренной за это время области (1) . Подставляя в (30) реализацию наблюдаемых данных (1), запишем значения логарифма ФОП при гипотезах H_0 и H_1 с учетом обозначений (31):

$$L_{m2}[H_0] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \left(\frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right)^2 / 2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \left(\frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right)^2 / 2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} z^2 / 2,$$

$$L_{m2}[H_1] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \left(\frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right)^2 / 2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \left\{ \left[\frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right]^2 / 2 - \frac{z^2}{2} \right\}.$$

Записав совместную плотность вероятности величин x , y и z и пользуясь методом функционального преобразования плотностей вероятностей [6], найдем выражения для плотностей вероятности логарифма ФОП при обеих гипотезах. На их основе получим точные выражения для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта:

$$P_{fa} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{C_0(h)} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho)} \left(y^2 + x^2 - 2yx \frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{1-\rho}} - \frac{xz}{2} \right)^2 \right\} \sqrt{2h - 2yz - (x - z\sqrt{1-\rho})^2 - \frac{z^2}{2}} dx dy, \quad (33)$$

$$P_{miss} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{C_1(h)} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho)} \left(y^2 + x^2 - 2yx \frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{1-\rho}} - \frac{xz}{2} \right)^2 \right\} \sqrt{2h - 2yz - \left(x - \frac{z}{\sqrt{1-\rho}} \right)^2 - \frac{z^2}{2}} dx dy,$$

$$\sqrt{1 - z} \frac{y - x\sqrt{z}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{1 - z^2}} \sqrt{2h - 2yz - x \frac{z}{\sqrt{z}} - z \frac{1 - z^2}{\sqrt{z}}}$$

$$\sqrt{1 - z} \frac{y - x\sqrt{z}}{2} dx dy. \quad (34)$$

В выражениях (33), (34) области интегрирования $C_0(L)$ и $C_1(L)$ определяются неравенствами

$$C_0(L): 2L - 2yz - (x - z\sqrt{z})^2 - zz - z^2/2 \geq 0,$$

$$C_1(L): 2L - 2yz - \{x - [z - z(1 - z)]/\sqrt{z}\}^2 - z^2/2 \geq 0.$$

Найти точное решение системы уравнений

$$m_0(z_m, h) = P; \quad m_1(z_m, h) = P \quad (35)$$

не удастся, поэтому получим приближенное выражение для порогового ОСШ z_m . С этой целью представим значение логарифма ФОП при гипотезе H_i , $i = 0, 1$, в виде $L_{m2}[H_i] = w_i$, где $w = (z^2 - z^2)/2$ – негауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\frac{2}{w} - 1$, а i – гауссовские случайные величины с математическими ожиданиями

$$m_0 = (z^2 - z^2 - 2zz)/2;$$

$$m_1 = \{z^2 - z^2(1 - [z - z(1 - z)]^2/\sqrt{z})\}/2 \quad (36)$$

и дисперсиями

$$\sigma_0^2 = 2m_0; \quad \sigma_1^2 = 2m_1. \quad (37)$$

Если $z^2 \ll 1$, $z^2 \ll 1$, то $\frac{2}{w} = \min(\frac{2}{\sigma_0^2}, \frac{2}{\sigma_1^2})$, поэтому $L_{m2}[H_i] = i$, а сам логарифм ФОП (30) можно приближенно считать гауссовской случайной величиной с математическими ожиданиями и дисперсиями

$$m_i = m_i; \quad \sigma_i^2 = \sigma_i^2. \quad (38)$$

Используя выражения (36)–(38), находим гауссовские аппроксимации для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта:

$$P_{2G} = 1 - \frac{2h - z^2 - z^2 - 2zz}{2\sqrt{z^2 - z^2 - 2zz}},$$

$$z_{2G} = \frac{2h \sqrt{z^2 - z^2(1 - [z/z_F - 1]^2)}}{2\sqrt{z^2 - z^2(1 - [z/z_F - 1]^2)}}.$$

Подставляя выражения для z_2 и z_{2G} с учетом соотношения $z = z/z_F$ в систему уравнений (35) и решая ее относительно z_m , находим выражение для порогового ОСШ в гауссовском приближении: $z_m = z_{2G}$, где

$$z_{2G} = \frac{2 \arcsin \left((1 - P) z_F \sqrt{z_F^2 - 1 - (z_F - 1)^2} \right) \sqrt{z_F^2 - 2 z_F - 1}}{[2 z_F - 2 z_F^2 - (z_F - 1)^2]}. \quad (39)$$

Точность формулы (39) растет с уменьшением вероятности ошибки P , т. е. с ростом порогового ОСШ. Проигрыш в пороговом ОСШ для АМП в гауссовском приближении по сравнению с пороговым ОСШ (14) при оптимальном обнаружении запишется в виде

$$z_{2G} = \frac{z_{2G}}{z_{0t}} = \frac{\sqrt{1 - 2 z_F - z_F^2} \sqrt{z_F^2 - 1 - (z_F - 1)^2} \sqrt{z_F^2 - 2 z_F - 1}}{2 z_F - 2 z_F^2 - (z_F - 1)^2}. \quad (40)$$

Обнаружение движущегося объекта по его изображению с неизвестной интенсивностью при наличии фона с неизвестной интенсивностью. Пусть теперь неизвестны интенсивности объекта и фона. Проводя максимизацию логарифмов ФОП (16), (17) по неизвестным параметрам a, b [9], получим

$$L_{m3} = \frac{\sup_{a,b} L_1(a,b) \sup_b L_0(b)}{N_0} = \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt}{\int_0^T s_1^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt} = \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt}{\int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)] d\mathbf{r} dt} = \frac{\int_0^T x(\mathbf{r}, t) s_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt}{\int_0^T s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt}. \quad (41)$$

Решение о наличии или отсутствии объекта по-прежнему выносится на основе сравнения логарифма ФОП (41) с порогом h в соответствии с правилом (4). При этом вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска объекта определяются формулами [4]

$$P_3 = 1 - \frac{\sqrt{C_0(h)}}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} (y^2 + x^2 - 2yx \sqrt{1 - C_0(h)}) \right]$$

$$z = \frac{(y\sqrt{1 - C_0(h)} - x\sqrt{C_0(h)}) \sqrt{2h - (y - z\sqrt{1 - C_0(h)})^2 - (x - z\sqrt{C_0(h)})^2}}{\sqrt{1 - C_0(h)^2}}$$

$$\int_{C_0(L)} \frac{z (y\sqrt{1-z^2} - x\sqrt{1-z^2}) \sqrt{2h (y-z\sqrt{1-z^2})^2 (x-z\sqrt{1-z^2})^2}}{\sqrt{1-z^2}} dx dy, \quad (42)$$

$$3 \int_{C_1(L)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} (y^2 - x^2 - 2yx\sqrt{1-z^2}) \right\}$$

$$\frac{z (y\sqrt{1-z^2} - x\sqrt{1-z^2}) \sqrt{2h (y-z\sqrt{1-z^2})^2 [x - (z-z\sqrt{1-z^2})/\sqrt{1-z^2}]^2}}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int_{C_1(L)} \frac{z (y\sqrt{1-z^2} - x\sqrt{1-z^2}) \sqrt{2h (y-z\sqrt{1-z^2})^2 [x - (z-z\sqrt{1-z^2})/\sqrt{1-z^2}]^2}}{\sqrt{1-z^2}} dx dy. \quad (43)$$

В выражениях (42), (43) области интегрирования $C_0(L)$ и $C_1(L)$ определяются неравенствами

$$C_0(L): 2L (y - z\sqrt{1-z^2})^2 (x - z\sqrt{1-z^2})^2 \leq 0,$$

$$C_1(L): 2L (y - z\sqrt{1-z^2})^2 \{x - [z - z\sqrt{1-z^2}]/\sqrt{1-z^2}\}^2 \leq 0.$$

При $z^2 \ll 1$, $z^2 \ll 1$ приведем гауссовские аппроксимации для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта [4]:

$$3 \int_{3G} 1 - \frac{2h (1 - z^2(1 - z^2))}{2z \sqrt{1-z^2}},$$

$$3 \int_{3G} \frac{2h (1 - z^2) z^2 (z - 1) [z - z(1 - z^2)]^2 / \sqrt{1-z^2}}{2 \sqrt{z^2 - z^2(1 - z^2) [z - z(1 - z^2)]^2 / \sqrt{1-z^2}}},$$

так что пороговое ОСШ в гауссовском приближении

$$z_{3G} = \frac{2z_F \arcsin(1 - P) \sqrt{z_F^2 - 2z_F - 1 - (z_F - 1)^2} / \sqrt{1-z^2}}{[(z_F - 1)^2 - 2(1 - z^2) - (z_F - 1)^2]}. \quad (44)$$

Точность формулы (44) растет с уменьшением вероятности ошибки P , т. е. с увеличением порогового ОСШ. Проигрыш в пороговом ОСШ в гауссовском приближении по сравнению с пороговым ОСШ для оптимального обнаружителя (14) запишется в виде

$$3G \quad z_{3G} / z_{0t} = \frac{\sqrt{1 - 2z_F - z_F^2} \sqrt{z_F^2 - 2z_F - 1 - (z_F - 1)^2} / \sqrt{1-z^2}}{[(z_F - 1)^2 - 2(1 - z^2) - (z_F - 1)^2]}. \quad (45)$$

Обнаружение движущегося объекта с линейчатой текстурой на структурно-подобном фоне. Для примера рассмотрим обнаружение изображения прямоугольного объекта, движущегося параллельно одной из своих сторон (вдоль оси X), с линейчатой текстурой рисунка, ориентированной перпендикулярно направлению движения

$$s(x - Vt, y) = a_0 [1 - m_s \sin(2\pi(x - Vt)/L)] / (1 - m_s)$$

на структурно-подобном фоне

$$(x, y) = b_0 [1 - m \sin(2\pi x/N)] / (1 - m),$$

где L/N – период полос (L – длина объекта в направлении движения, N – натуральное число); $0 < m_s < 1$; $0 < m < 1$. При движении объекта со скоростью V коэффициент корреляции изображения объекта и фона (12)

$$r = \frac{1 - \frac{m_s m}{2} \frac{\sin(2\pi VT/L)}{2}}{\sqrt{(1 - \frac{m_s^2}{2})(1 - \frac{m^2}{2})}},$$

где VT/L – отношение пути, пройденного объектом за время наблюдения, к периоду текстуры изображения объекта. Для неподвижного объекта коэффициент корреляции

$$r_0 = (1 - m_s m / 2) / \sqrt{(1 - m_s^2 / 2)(1 - m^2 / 2)}.$$

Для объекта, движущегося относительно быстро (проходящего за время наблюдения путь порядка 4–6 периодов текстуры изображения объекта), коэффициент корреляции

$$r \approx 1 / \sqrt{(1 - m_s^2 / 2)(1 - m^2 / 2)}.$$

На рис. 1 показаны зависимости проигрыша в пороговом ОСШ в гауссовском приближении из-за незнания интенсивностей объекта и фона от z_F в случае $m_s = 0,9$, $m = 0,5$ и $L/N = 2$. Линии 1 соответствуют обнаружению неподвижного объекта, линии 2 – обнаружению быстро движущегося объекта. Пунктирными линиями показаны зависимости величины проигрыша $\beta_{1G}(z_F)$ при неизвестной интенсивности изображения объекта и известной интенсивности фона, рассчитанные по формуле (29); штриховыми линиями показаны зависимости величины проигрыша $\beta_{2G}(z_F)$ при неизвестной интенсивности фона и известной интенсивности изображения объекта, рассчитанные по формуле (40); сплошными линиями показаны зависимости величины проигрыша $\beta_{3G}(z_F)$ при априори неизвестных интенсивностях изображения объекта и фона, рассчитанные по формуле (45). Как видно, АМП обеспечивает относительно небольшой проигрыш в пороговом ОСШ по сравнению со случаем априори известных интенсивностей изображения объекта и фона, причем минимальное значение проигрыша достигается при значениях ОСФ z_F , близких к единице. Сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 1 позволяет определить влияние движения объекта на величину проигрыша в эффективности обнаружения.

Зависимости отношения порогового ОСШ для быстро движущегося объекта к пороговому ОСШ для неподвижного объекта в гауссовском при-

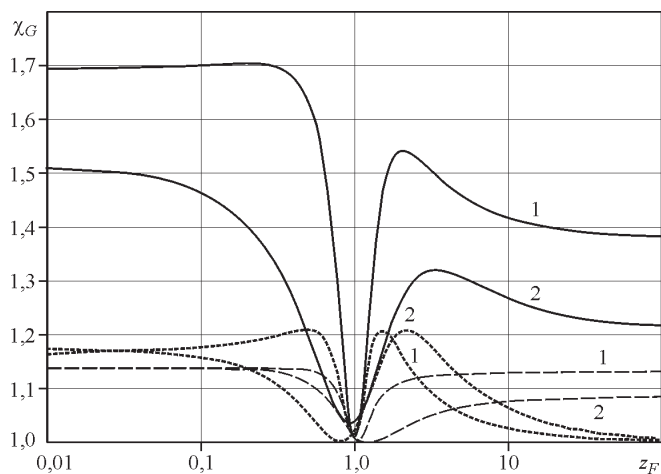


Рис. 1

ближении $\left| \frac{z_{jG}}{z_{jG}} \right| \left| \frac{z_{jG}}{z_{jG}} \right|_0$, $j = \overline{1,3}$, от z_F в случае $m_s = 0,9$, $m = 0,5$ и

2 показаны на рис. 2. Пунктирной линией показана зависимость $\gamma_1(z_F)$ при неизвестной интенсивности изображения объекта и известной интенсивности фона, рассчитанная по формуле (28); штриховой линией показана зависимость $\gamma_2(z_F)$ при неизвестной интенсивности фона и известной интенсивности изображения объекта, рассчитанная по формуле (39); сплошной линией показана зависимость $\gamma_3(z_F)$ при априори неизвестных интенсивностях изображения объекта и фона, рассчитанная по формуле (44); штрихпунктирной линией показана зависимость величины $\left| \frac{z_{0t}}{z_{0t}} \right| \left| \frac{z_{0t}}{z_{0t}} \right|_0$

от z_F для оптимального алгоритма (при априори известных интенсивностях изображения объекта и фона), рассчитанная по формуле (14). Как видно, движение объекта приводит к уменьшению порогового ОСШ. Значит, неравномерно окрашенный движущийся объект, наблюдаемый на неравномерном фоне, может обнаруживаться лучше, чем неподвижный объект, наблюдаемый в тех же условиях.

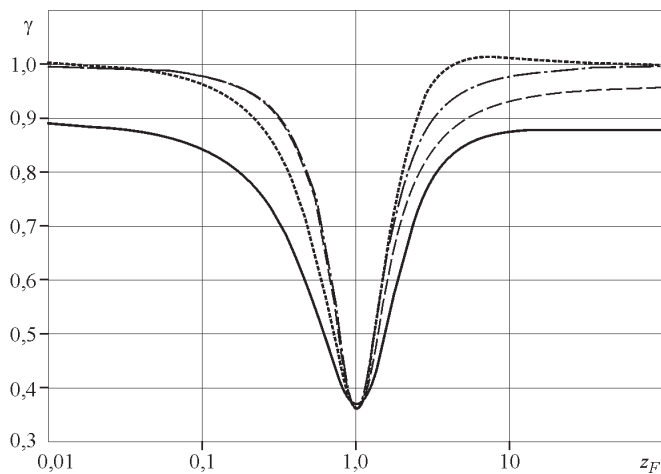


Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Островитянов Р. В., Басалов В. Ф. Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. М.: Радио и связь, 1982.
2. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение случайных изображений пространственно протяженных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2000. № 4. С. 14.
3. Бычков А. А., Понькин В. А. Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33.
4. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение квазидетерминированного изображения при наличии фона с неизвестными параметрами // Автометрия. 2002. 38, № 4. С. 19.
5. Ефремов В. В., Ковалев Г. С., Лаптев И. В., Понькин В. А. Потенциальные возможности обнаружения и маскирования движущихся объектов на неравномерных фонах // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2003. № 4. С. 24.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
7. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами /Под ред. А. П. Трифонова. Воронеж: ВГУ, 1991.
8. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов /Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
9. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
10. Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др. Прикладная теория случайных процессов и полей /Под ред. К. К. Васильева, В. А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995.

Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru

Поступила в редакцию
22 марта 2004 г.