

УДК 532.135, 532.5

РАСЧЕТ ПРОЦЕССА СБЛИЖЕНИЯ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ, НАХОДЯЩИХСЯ В СРЕДЕ БИНГАМА

Ю. В. Пивоваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Проведено математическое моделирование наблюдаемого в эксперименте процесса сближения двух одинаковых масляных капель, находящихся в равноплотном спиртово-водном растворе (матрице) и движущихся циклически в режиме покой — разгон — торможение с временем цикла порядка 0,01 с. Нарушение баланса сил на границах капель в состоянии покоя обусловлено тем, что касательные напряжения на них не могут превышать предел текучести матрицы, при этом нормальные напряжения определяются из решения задачи теории упругости, поскольку межмолекулярные связи в покоящейся матрице делают ее подобной твердому телу. Проведено сравнение результатов расчета и эксперимента и отмечено, что они хорошо согласуются.

Ключевые слова: регуляризация, неньютоновская жидкость, конформное отображение, уравнения Стокса, вихрь, функция тока.

Введение. В работе [1] изучено поведение капель из вазелинового, подсолнечного и индустриального масел, находящихся в равноплотном спиртово-водном растворе (матрице), и обнаружено, что если расстояние между двумя каплями порядка их размеров, то независимо от масштаба системы происходит их медленное сближение с последующим сливанием в одну каплю. Экспериментальная установка, используемая в [1], была изолирована от внешних силовых и тепловых воздействий. В экспериментах установлено, что сближение наблюдается только в том случае, если обе капли обладают достаточно большим поверхностным натяжением. (На практике значительного уменьшения поверхностного натяжения капли можно достичь путем введения на ее поверхность мыльного раствора. В этом случае сближения капель не происходит.)

Средой Бингама называется среда, которая остается в состоянии покоя, если сдвиговые напряжения не превышают некоторого значения, называемого пределом текучести. В противном случае она ведет себя как неньютоновская жидкость, вязкость которой зависит от второго инварианта тензора скоростей деформаций.

В работе [2] предложен алгоритм вычисления силы взаимодействия капель на начальном этапе их разгона. Под действием поверхностного натяжения капли сжимаются и тянут за собой частицы матрицы, что приводит к возникновению полей напряжений и перемещений, обусловленному наличием в каплях и матрице молекулярных связей, делающих их подобными упругим твердым телам. В [2] показано, что вследствие наличия у материала матрицы предела текучести под действием полей напряжений и перемещений возникает

Работа выполнена в рамках Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (код проекта 2.13.2) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00149-а).

сила, приводящая к сближению капель. В работе [3] проведено моделирование процесса сближения капель под влиянием этой силы, действующей в течение малого промежутка времени, так как в результате движения капли молекулярные связи в матрице, делающие ее подобной твердому телу, быстро разрушаются. Капля движется циклически в режиме покой — разгон — торможение. Гидродинамическое влияние второй капли в [3] не учитывалось.

В настоящей работе проведено моделирование процесса сближения капель с учетом их гидродинамического взаимодействия. Использование в данной задаче бисферической системы координат является неэффективным, так как при конечных размерах области течения отрезок оси симметрии позади капли исключается из рассмотрения. Эту проблему можно решить, заменив соответствующий участок границы бисферической системы координат на кривую, частично совпадающую с осью симметрии и пересекающуюся с плоскостью симметрии между двумя каплями под прямым углом. Если заменить систему двух капель на эквивалентную (в силу симметрии задачи) систему капля — зеркальная плоскость, то область течения будет представлять собой криволинейный четырехугольник, у которого все углы прямые. Следовательно, с использованием метода, изложенного в работах [4, 5], эту область можно конформно отобразить на прямоугольник с заранее неизвестным отношением сторон.

В настоящей работе строится 11 ортогональных разностных сеток, каждая из которых соответствует определенному расстоянию между центрами капель; для трех значений расстояния между центрами капель выполняется подгонка значений средней скорости под экспериментальные данные. При этом варьируются три параметра: предел текучести материала матрицы, соотношение модулей сдвига материалов капли и матрицы и расстояние, после прохождения которого каплей внешняя сила, действующая на нее, исчезает. Для найденного набора параметров проводится расчет 11 циклов движения капель. Для каждого цикла вычисляется средняя скорость движения капли, а для совокупности всех циклов строится зависимость расстояния, пройденного каплей, от макроскопического времени. Построенная зависимость сравнивается с экспериментально полученной кривой.

1. Построение ортогональных разностных сеток. При построении ортогональных разностных сеток сначала выполняется вспомогательное конформное отображение области течения на область, в которой удобно строить неортогональную разностную сетку методом трансфинитной интерполяции с границы. Затем эта сетка ортогонализуется и осуществляется обратное конформное отображение.

1.1. Вспомогательное конформное отображение. На рис. 1 показана схема процесса сближения капель. Здесь D — область, в которой ищется решение задачи, Γ_i ($i = \overline{1, 4}$) — участки границы области D : Γ_1 — граница капли, Γ_2 — часть оси симметрии перед каплей, Γ_3 — проекция плоскости симметрии на плоскость рисунка, Γ_4 — кривая, частично совпадающая с осью симметрии Oz и пересекающая отрезок Γ_3 под прямым углом. Кривая Γ_4 состоит из трех участков: прямолинейного участка длиной $l = 4r_0$, $1/4$ окружности радиусом $r_3 = 8r_0$ с центром в точке $r = r_3$, $z = r_1/2 + r_0 + l$ и $1/4$ окружности радиусом $r_2 = r_1/2 + r_0 + l + r_3$ с центром в точке $r = r_3$, $z = 0$ (r_0 — радиус капли; r_1 — расстояние между центрами капель).

Введя полярные координаты

$$\rho = \sqrt{(z - z_1)^2 + r^2}, \quad \varphi = \arccos(-(z - z_1)/\rho)$$

(r, z — цилиндрические координаты (см. рис. 1); $z_1 = r_1/2$ — координата z центра капли), осуществим конформное отображение области D в плоскости (ρ, φ) на область \bar{D} в плоскости $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$:

$$\bar{\rho} = \rho^{1/4}, \quad \bar{\varphi} = \varphi/4,$$

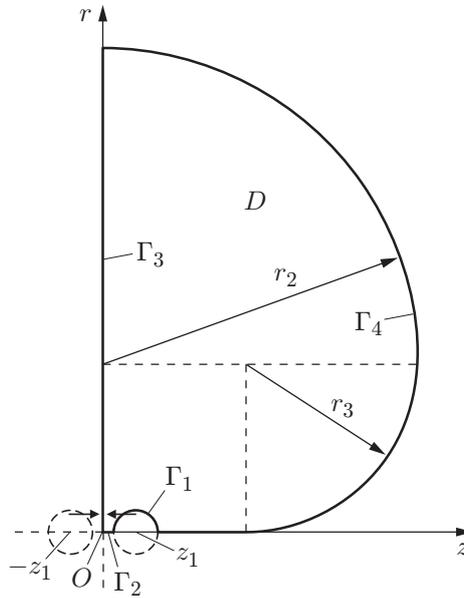


Рис. 1. Схема задачи и система координат

а затем вновь перейдем к цилиндрическим координатам \bar{r} , \bar{z} :

$$\bar{r} = \bar{\rho} \sin \bar{\varphi}, \quad \bar{z} = z_1 - \bar{\rho} \cos \bar{\varphi}.$$

Обозначим через $\bar{\Gamma}_i$ образы границ Γ_i , $i = \overline{1, 4}$. Система координат (\bar{r}, \bar{z}) удобна тем, что в ней границы $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_3$ однозначно проецируются на ось \bar{r} , а границы $\bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_4$ — на ось \bar{z} (см. подп. 1.3). Это позволяет построить неортогональную разностную сетку в области \bar{D} без самопересечений, используя формулы трансфинитной интерполяции [5–7], и выполнить ее ортогонализацию [4, 5].

1.2. *Построение одномерной сетки, сгущающейся на концах отрезка $[0, 1]$.* Пусть N — четное число, означающее количество разбиений отрезка $[0, 1]$; $h_{1\min}, h_{2\min}$ — не превышающие $1/N$ заданные вещественные положительные числа, означающие шаги сетки на левом и правом концах отрезка $[0, 1]$. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ зададим сетку x_n , $n = \overline{0, N}$:

$$x_n = \begin{cases} h_{1\min}(z_{01}^n - 1)/(z_{01} - 1), & 0 \leq n \leq N/2, \\ 1 - h_{2\min}(z_{02}^{N-n} - 1)/(z_{02} - 1), & N/2 \leq n \leq N \end{cases} \quad (1)$$

(z_{01}, z_{02} — подлежащие определению вещественные числа, бóльшие единицы). Положим

$$z_{01} = 1 + 2k_1/N, \quad z_{02} = 1 + 2k_2/N \quad (2)$$

и обозначим через $\alpha = x_{N/2}$ точку стыковки сеток при $n \leq N/2$ и $n \geq N/2$. Из условий стыковки следует

$$k_1 = ((1 + 2k_1/N)^{N/2} - 1)Nh_{1\min}/(2\alpha); \quad (3)$$

$$k_2 = ((1 + 2k_2/N)^{N/2} - 1)Nh_{2\min}/(2(1 - \alpha)). \quad (4)$$

Решая эти уравнения методом деления отрезка пополам при заданном значении α , определим k_1, k_2 . После этого z_{01} и z_{02} восстанавливаются по формулам (2). Для определения α введем дополнительное условие

$$x_{N/2+1} - x_{N/2} = x_{N/2} - x_{N/2-1} = h_{\max}$$

(h_{\max} — максимальный шаг рассматриваемой сетки). Из определения h_{\max} , z_{01} , z_{02} следует

$$h_{\max} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{z_{01}} + \dots + \frac{1}{z_{01}^{N/2-1}} \right) = h_{\max} \frac{1 - 1/z_{01}^{N/2}}{1 - 1/z_{01}} = \alpha; \quad (5)$$

$$h_{\max} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{z_{02}} + \dots + \frac{1}{z_{02}^{N/2-1}} \right) = h_{\max} \frac{1 - 1/z_{02}^{N/2}}{1 - 1/z_{02}} = 1 - \alpha. \quad (6)$$

Исключая из (5), (6) путем деления одного выражения на другое неизвестную h_{\max} и выражая α , получаем

$$\alpha = 1 / \left(1 + \frac{(1 - 1/z_{01})(1 - 1/z_{02}^{N/2})}{(1 - 1/z_{02})(1 - 1/z_{01}^{N/2})} \right). \quad (7)$$

В силу (2)–(4) z_{01} и z_{02} зависят от α , следовательно, (7) представляет собой нелинейное уравнение для определения α . Это уравнение нетрудно решить итерационно: полагая $\alpha = 0,5$, находим значения z_{01} , z_{02} , подставляя затем их в (7), вычисляем новое значение α , и т. д.

Из формул (2), (3), (5) следует, что если k_{10} — отличный от нуля корень уравнения

$$k_{10} = (e^{k_{10}} - 1)c_1 / (2\alpha),$$

где $c_1 = \text{const} = h_{1\min} N < 1$, то

$$h_{\max} \rightarrow \frac{c_1 e^{k_{10}}}{N + 2k_{10}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

В численных расчетах при каждом решении уравнений (3), (4), а также при решении уравнения (7) в процессе построения сетки используется по 100 итераций. Таким образом, значения функций в правых частях (3), (4) вычисляются 10 000 раз.

Решив уравнения (7), (3), (4) с учетом (2), по формулам (1) построим сетку слева направо, используя разложение

$$\frac{z_{01}^n - 1}{z_{01} - 1} = \sum_{m=0}^{n-1} z_{01}^m.$$

Величина x_N отличается от единицы менее чем на $4 \cdot 10^{-9}$, что свидетельствует о высоком качестве построенной сетки. После построения сетки эта величина заменяется на единицу. В качестве исходных данных нужно задать N , $h_{1\min}$, $h_{2\min}$.

1.3. *Построение ортогональной сетки в области D при $r_1 = 2,5$.* Сначала опишем процесс построения ортогональной разностной сетки с помощью конформного отображения прямоугольника с заранее неизвестным соотношением сторон на область \bar{D} на примере сетки, соответствующей расстоянию между центрами капель $r_1 = 2,5$ (в качестве масштаба переменной r_1 принят радиус капель r_0).

Введем единичный квадрат K : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, в котором построим равномерные сетки x_n ($n = \bar{0}, \bar{N}$), y_m ($m = \bar{0}, \bar{M}$) при $N = 4$, $M = 4$. Затем поставим в соответствие границам $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ квадрата K границы $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3$, $\bar{\Gamma}_4$ области \bar{D} . На проекциях кривых $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_3$ на ось \bar{r} и на проекциях кривых $\bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_4$ на ось \bar{z} введем равномерные сетки. Затем методом трансфинитной интерполяции с границы [5–7] построим в области \bar{D} сетку $(\bar{r}_{nm}, \bar{z}_{nm})$ и ортогонализуем ее методом, описанным в [4, 5]. Для этого необходимо решить разностные аналоги уравнений Лапласа для функций $x(\bar{r}, \bar{z})$, $y(\bar{r}, \bar{z})$

(первый итерационный процесс), которые после взаимозамены зависимых и независимых переменных и деления на $((\partial\bar{r}/\partial y)^2 + (\partial\bar{z}/\partial y)^2)((\partial\bar{r}/\partial x)^2 + (\partial\bar{z}/\partial x)^2)^{1/2}$ принимают вид

$$a \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial y^2} = 0, \quad a \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{(\partial\bar{r}/\partial y)^2 + (\partial\bar{z}/\partial y)^2}{(\partial\bar{r}/\partial x)^2 + (\partial\bar{z}/\partial x)^2}}, \quad c = \frac{1}{a},$$

$$b = \frac{(\partial\bar{r}/\partial x)(\partial\bar{r}/\partial y) + (\partial\bar{z}/\partial x)(\partial\bar{z}/\partial y)}{\sqrt{((\partial\bar{r}/\partial y)^2 + (\partial\bar{z}/\partial y)^2)((\partial\bar{r}/\partial x)^2 + (\partial\bar{z}/\partial x)^2)}},$$

и уравнения на границе области \bar{D} (второй итерационный процесс)

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial x} \frac{\partial\bar{r}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial x} \frac{\partial\bar{z}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

при

$$\begin{aligned} (\bar{r}(x, 0), \bar{z}(x, 0)) &\in \bar{\Gamma}_1, & (\bar{r}(0, y), \bar{z}(0, y)) &\in \bar{\Gamma}_2, \\ (\bar{r}(x, 1), \bar{z}(x, 1)) &\in \bar{\Gamma}_3, & (\bar{r}(1, y), \bar{z}(1, y)) &\in \bar{\Gamma}_4. \end{aligned}$$

Искомое конформное отображение строится путем многократного чередования этих итерационных процессов.

Ясно, что если заданы сетки x_n ($n = \overline{0, N}$), y_m ($m = \overline{0, M}$) и произвольная сетка x'_n ($n = \overline{0, N'}$) (или y''_m ($m = \overline{0, M''}$)) на отрезке $[0, 1]$, то, имея двумерную сетку $(\bar{r}_{nm}, \bar{z}_{nm})$, $n = \overline{0, N}$, $m = \overline{0, M}$, с помощью формул второго порядка точности можно построить сетку $(\bar{r}'_{nm}, \bar{z}'_{nm})$, $n = \overline{0, N'}$, $m = \overline{0, M}$ (или $(\bar{r}''_{nm}, \bar{z}''_{nm})$, $n = \overline{0, N}$, $m = \overline{0, M''}$). При этом используемая интерполяция является одномерной. Итак, пусть построена ортогональная сетка с размерностью 4×4 , как это описано выше. Преобразуем эту сетку к размерности 4×10 и ортогонализуем ее. Аналогично построим сетку с размерностью 10×10 , а затем одномерную сетку y''_m , $m = \overline{0, M''}$, где $M'' = 24$, сгущающуюся вблизи границы $y = 0$, при $h_{y1 \min} = 0,2/M''$, $h_{y2 \min} = 1/M''$. Преобразуем построенную двумерную сетку с размерностью 10×10 к размерности 10×24 и ортогонализуем ее. Далее построим одномерную сетку на оси x квадрата K , сгущающуюся на границе $x = 1$, при $h_{x1 \min} = 1/N'$, $h_{x2 \min} = 0,25/N'$, где $N' = 24$. После этого преобразуем двумерную сетку с размерностью 10×24 к размерности 24×24 и ортогонализуем ее.

При решении задачи (8), (9) имеют место равенства $a \equiv Y$, $c \equiv 1/Y$, $b \equiv 0$, где $Y = \text{const}$, но на разностном уровне эти равенства выполняются лишь приближенно. Поэтому определим Y как среднее арифметическое значение a по квадрату K :

$$Y = \int_0^1 dx \int_0^1 a(x, y) dy.$$

Чтобы уравнения (8) перешли в уравнения Лапласа, необходимо выполнить замену $x' = x$, $y' = Yy$. Тогда с помощью функций $\bar{r}'(x', y') = \bar{r}(x', y'/Y)$, $\bar{z}'(x', y') = \bar{z}(x', y'/Y)$ можно приближенно выполнить конформное отображение прямоугольника Π : $0 \leq x' \leq 1$, $0 \leq y' \leq Y$ на \bar{D} (далее штрихи над переменными \bar{r} , \bar{z} , x , y опускаются).

Следует отметить, что описанная выше последовательность действий при построении ортогональной разностной сетки в области \bar{D} не является универсальной. Иногда для

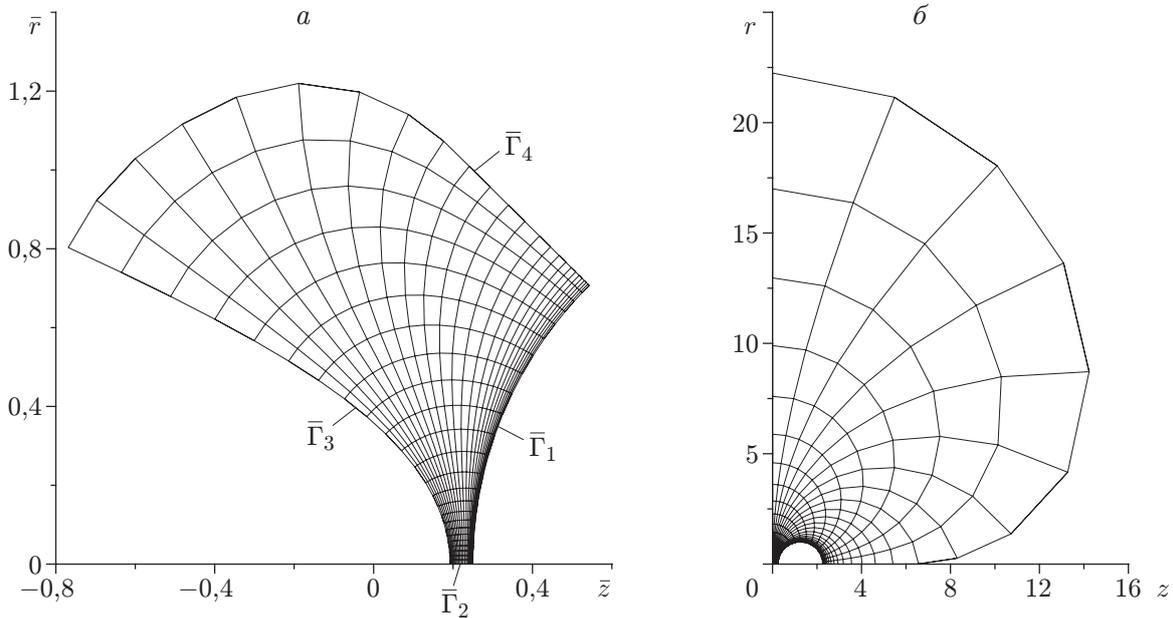


Рис. 2. Ортогональные разностные сетки в областях \bar{D} (а) и D (б) при $r_1 = 2,5$

исключения авста программы строилась сетка, сгущающаяся на одной из сторон квадрата K не при $N = 10$, $M = 24$, а при меньших значениях N, M . Однако необходимая последовательность действий сохранялась для всех значений r_1 .

Заключительным этапом построения ортогональной разностной сетки является совместное решение уравнений Лапласа для функций \bar{r} , \bar{z} и уравнения (9).

На рис. 2,а показана построенная описанным выше способом ортогональная разностная сетка в области \bar{D} при $r_1 = 2,5$. Видна однозначная проецируемость участков границы на соответствующие координатные оси (см. подп. 1.1). Далее вернемся к исходным переменным r, z в области D :

$$\bar{\rho} = \sqrt{(\bar{z} - z_1)^2 + \bar{r}^2}, \quad \bar{\varphi} = \arccos(-(\bar{z} - z_1)/\bar{\rho}),$$

$$\rho = (\bar{\rho})^4, \quad \varphi = 4\bar{\varphi}, \quad r = \rho \sin \varphi, \quad z = z_1 - \rho \cos \varphi.$$

На рис. 2,б приведена построенная ортогональная разностная сетка в исходной области D при $r_1 = 2,5$. Ниже показано, что эта сетка сгущается внутри зоны, в которой среда ведет себя как жидкость, и разрежается вне ее.

1.4. Особенности построения сеток при всех рассмотренных значениях r_1 . При $r_1 = 2,01$ задавалось значение $h_{x2 \min} = 0,0625/N$, при $r_1 \in [2,1; 2,4]$ — $h_{x2 \min} = 0,125/N$, а при $r_1 \in [2,5; 3,0]$ — значение $h_{x2 \min} = 0,25/N$. Параметры $h_{x1 \min} = 1/N$, $h_{y1 \min} = 0,2/M$, $h_{y2 \min} = 1/M$ были одни и те же для всех значений r_1 .

Уравнения (8) с граничными условиями первого рода при заданных функциях a, b, c решались попеременно-треугольным методом [8] с числом итераций, равным 512 для всех вариантов расчета. При этом невязка в решении уравнений (8) составляла $10^{-15} \div 10^{-12}$. При решении уравнения (9) число итераций, определяемое как остаток от деления номера внешних итераций на 20, менялось от 0 до 19, а количество чередований первого и второго итерационных процессов на заключительном этапе построения сеток составляло 2000 для $r_1 = 2,01$, 1000 для $r_1 = 2,1$ и 100 для остальных значений r_1 .

Таблица 1

Зависимость параметров сетки от расстояния между центрами капель

r_1	S_α	$\sigma_\alpha, \%$	Y	$\sigma_a, \%$	$\sigma_1, \%$	$\sigma_2, \%$
2,01	0,999 210	0,032 90	0,042 55	0,3349	31,028	3,556
2,1	0,999 909	0,005 09	0,100 98	0,1710	3,151	1,756
2,2	0,999 959	0,003 46	0,140 81	0,1903	2,270	1,656
2,3	0,999 977	0,002 83	0,172 02	0,2237	2,938	1,424
2,4	0,999 968	0,002 74	0,198 08	0,2217	1,986	1,556
2,5	0,999 975	0,003 88	0,220 96	0,3743	2,285	1,290
2,6	0,999 978	0,003 45	0,241 33	0,3839	2,213	1,261
2,7	0,999 981	0,003 14	0,259 89	0,3933	2,000	1,242
2,8	0,999 982	0,002 92	0,277 01	0,4029	1,901	1,229
2,9	0,999 982	0,002 76	0,292 97	0,4139	1,780	1,245
3,0	0,999 984	0,002 63	0,307 08	0,4224	1,771	1,209

Введя в рассмотрение синус угла между координатными линиями

$$\sin \alpha = -\frac{(\partial r/\partial x)(\partial z/\partial y) - (\partial r/\partial y)(\partial z/\partial x)}{\sqrt{((\partial r/\partial y)^2 + (\partial z/\partial y)^2)((\partial r/\partial x)^2 + (\partial z/\partial x)^2)}}$$

и относительные погрешности при выполнении условий Коши — Римана

$$S_1 = \frac{\partial r/\partial x + \partial z/\partial y}{\sqrt{(\partial r/\partial x)^2 + (\partial r/\partial y)^2}} \cdot 100 \%, \quad S_2 = \frac{\partial r/\partial y - \partial z/\partial x}{\sqrt{(\partial r/\partial x)^2 + (\partial r/\partial y)^2}} \cdot 100 \%,$$

вычислим следующие интегральные характеристики: среднее значение величины $\sin \alpha$ и среднеквадратичное отклонение от него:

$$S_\alpha = \frac{1}{Y} \iint_{\Pi} \sin \alpha \, dx \, dy, \quad \sigma_\alpha = \left(\frac{1}{Y} \iint_{\Pi} (\sin \alpha - S_\alpha)^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \cdot 100 \%,$$

среднеквадратичное отклонение от среднего значения величины a

$$\sigma_a = \left(\frac{1}{Y} \iint_{\Pi} (a - Y)^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \cdot 100 \%$$

и среднеквадратичные отклонения от нуля величин S_1, S_2 :

$$\sigma_1 = \left(\frac{1}{Y} \iint_{\Pi} S_1^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{1}{Y} \iint_{\Pi} S_2^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}.$$

Здесь учтено, что площадь прямоугольника Π равна Y .

В табл. 1 приведены значения описанных выше параметров, характеризующих качество построенных сеток. Наихудшим качеством обладает сетка, построенная при $r_1 = 2,01$, что объясняется малостью длины отрезка Γ_2 . Качество остальных сеток достаточно хорошее.

2. Параметры задачи и искомые функции. Размерными параметрами задачи являются радиус капель $r_0 = 0,005$ м, характерная скорость капель $V_0 = 10^{-6}$ м/с, характерное время процесса сближения капель $t_0 = 10^{-2}$ с, плотность капель $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, масса каждой из капель $m = (4/3)\pi r_0^3 \rho_0 = 5,24 \cdot 10^{-4}$ кг, кинематическая вязкость материала матрицы $\nu_0 = 10^{-6}$ м²/с, предел текучести материала матрицы $k_0 = 10^{-4} \div 10^{-3}$ Па (эти значения k_0 получены в эксперименте С. В. Стебновского), эффективная вязкость

материала матрицы (вязкость, обусловленная наличием у нее предела текучести) $\nu_1 = k_0 r_0 / (\rho_0 V_0) = 5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, расстояние, пройденное каждой из капель за время действия разгоняющей силы, $z_0 \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ (размер молекулы воды), поверхностное натяжение каплей $\gamma_0 = 0,04 \text{ Н/м}$, модули сдвига материалов каплей $G_1 \approx 10^9 \text{ Па}$ и матрицы $G_2 = 5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ (это значение получается, если положить число Пуассона материала матрицы равным 2,6, как это сделано ниже), коэффициенты объемного сжатия материалов каплей $K_1 = (1/6) \cdot 10^{10} \text{ Па}$ и матрицы $K_2 = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$, расстояние между центрами каплей $r_1 = 2r_0 \div 3,2r_0$ (при $r_1 = 2r_0$ капли соприкасаются, а при $r_1 > 3,2r_0$ сближение каплей прекращается), параметры $l = 4r_0$, $r_3 = 8r_0$, $r_2 = r_1/2 + r_0 + l + r_3$, определяющие геометрию области (см. подп. 1.1).

Параметры k_0 , z_0 , G_1/G_2 являются подгоночными параметрами модели, выбираемыми с учетом условия соответствия результатов расчетов экспериментальным данным, описывающим зависимость расстояния между центрами каплей от времени. Эти данные были переданы автору С. В. Стебновским.

Числа Пуассона (обратные коэффициенты Пуассона) определяются равенствами

$$m_k = \frac{6K_k + 2G_k}{3K_k - 2G_k}, \quad k = 1, 2,$$

причем $2 \leq m_k < \infty$, значение $m_k = 2$ соответствует несжимаемому материалу k -й среды. При заданных значениях $m_2 = 2,6$, $K_1/K_2 = 5/6$, G_1/G_2 величина m_1 определяется следующим образом:

$$m_1 = \left(2 \frac{G_2}{G_1} \frac{K_1}{K_2} + \frac{m_2 - 2}{m_2 + 1} \right) / \left(\frac{G_2}{G_1} \frac{K_1}{K_2} - \frac{m_2 - 2}{m_2 + 1} \right).$$

Поэтому, для того чтобы существовало положительное значение m_1 , должно выполняться условие

$$\frac{G_1}{G_2} < \frac{K_1(m_2 + 1)}{K_2(m_2 - 2)} = 5.$$

Заметим, что характерные значения V_0 , k_0 получены в эксперименте, K_1 , K_2 взяты из справочника, а t_0 , m_2 — из работы [2].

Искомые функциями являются компоненты вектора скорости u , v в направлениях x , y ; функция тока Ψ и завихренность ω , связанные с компонентами вектора скорости и коэффициентом Ламе H следующим образом:

$$u = \frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial(uH)}{\partial y} - \frac{\partial(vH)}{\partial x} \right); \quad (10)$$

$$H = \sqrt{(\partial r / \partial x)^2 + (\partial r / \partial y)^2}; \quad (11)$$

компоненты тензора скоростей деформаций D

$$D_{xx} = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{rH^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \right],$$

$$D_{yy} = \frac{1}{H} \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{rH^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right],$$

$$D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 H^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}
D_{xy} &= \frac{1}{2H} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{rH^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{rH^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right], \\
&\quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, Y), \\
D_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \quad D_{yy} = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\partial r / \partial x) H} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial r / \partial x}{2H^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\partial r / \partial x)^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \quad D_{xy} = 0, \quad x = 0, \quad y \in (0, Y), \quad (12) \\
D_{xx} &= 0, \quad D_{yy} = 0, \quad D_{\varphi\varphi} = 0, \quad D_{xy} = \omega/2, \quad y = 0, \quad x \in [0, 1], \\
D_{xx} &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right), \quad D_{yy} = \frac{1}{H} \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{rH^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right], \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2 H^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad D_{xy} = 0, \quad y = Y, \quad x \in [0, 1], \\
D_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \quad D_{yy} = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\partial r / \partial x) H} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \\
D_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial r / \partial x}{2H^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\partial r / \partial x)^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \quad D_{xy} = 0, \quad x = 1, \quad z \leq 5, \\
D_{xx} &= 0, \quad D_{yy} = 0, \quad D_{\varphi\varphi} = 0, \quad D_{xy} = 0, \quad x = 1, \quad z > 5
\end{aligned}$$

(значения переменной z приведены в безразмерном виде); модуль (корень из второго инварианта) тензора скоростей деформаций

$$|D| = \sqrt{D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{\varphi\varphi}^2 + 2D_{xy}^2}; \quad (13)$$

функция вязкости матрицы $\nu(|D|)$; гидродинамическое давление p на поверхности капли; касательные P_{xy} и нормальные P_{yy} напряжения на границе капли, обусловленные наличием гидродинамического течения вокруг нее; составляющие силы, действующей на каплю, обусловленные действием нормальных G_{z1} и касательных G_{z2} напряжений при наличии гидродинамического течения вокруг капли; нормальная компонента тензора напряжений $T_{yy}^{(2)}$, обусловленная наличием поверхностного натяжения каплей, создающего в покоящейся матрице поле напряжений (см. [2]); сила F_{z1} , обусловленная действием напряжений $T_{yy}^{(2)}$ на поверхности капли; суммарная сила G'_z , действующая на каплю; скорость капли $V(t)$ (t — время, отсчитываемое с момента начала цикла); расстояние $z_2(t)$, пройденное каплей; средняя скорость V_c капли в течение одного цикла, включающего разгон капли, ее торможение и состояние покоя; время цикла t_c ; расстояние $z_2(t_c)$, пройденное каплей в течение одного цикла. Величины V_c , t_c , $z_2(t_c)$ являются функциями расстояния r_1 между центрами каплей.

Установим следующую связь размерных (отмеченных знаком “ \sim ”) и безразмерных величин:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= r_0 H, \quad \tilde{u} = V_0 u, \quad \tilde{v} = V_0 v, \quad \tilde{\Psi} = r_0^2 V_0 \Psi, \quad \tilde{\omega} = \frac{V_0}{r_0} \omega, \quad \tilde{D}_{ij} = \frac{V_0}{r_0} D_{ij}, \\
|\tilde{D}| &= \frac{V_0}{r_0} |D|, \quad \tilde{p} = k_0 p, \quad \tilde{P}_{xy} = k_0 P_{xy}, \quad \tilde{P}_{yy} = k_0 P_{yy}, \quad \tilde{T}_{yy}^{(2)} = k_0 T_{yy}^{(2)}, \\
\tilde{G}_{z1} &= \pi^2 r_0^2 k_0 G_{z1}, \quad \tilde{G}_{z2} = \pi^2 r_0^2 k_0 G_{z2}, \quad \tilde{F}_{z1} = \pi^2 r_0^2 k_0 F_{z1}, \quad \tilde{G}_z = \pi^2 r_0^2 k_0 G_z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t) &= V_0 V(t), \quad \tilde{z}_2 = z_0 z_2, \quad \tilde{t} = t_0 t, \quad \tilde{V}_c = V_0 V_c, \quad \tilde{t}_c = t_0 t_c, \\ \tilde{z}_2(\tilde{t}_c) &= z_0 z_2(t_c), \quad \tilde{r}_1 = r_0 r_1, \quad \tilde{l} = r_0 l, \quad \tilde{r}_2 = r_0 r_2, \quad \tilde{r}_3 = r_0 r_3, \quad \tilde{\nu} = \nu_1 \nu.\end{aligned}$$

3. Безразмерные критерии подобия. Из уравнений задачи, записанных в безразмерном виде, следуют критерии подобия $Re = r_0^2/(\nu_1 t_0) = 0,5 \div 5,0$ — число Рейнольдса; $\alpha = \nu_0/\nu_1 = 2 \cdot 10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-3}$ — отношение кинематической и эффективной вязкостей (число, обратное числу Бингама); $A = t_0 \pi^2 r_0^2 k_0 / (m V_0) = 0,471 \div 4,710$ — отношение характерной силы к произведению массы капли и ее ускорения; $B = t_0 V_0 / z_0 \approx 33$ — кинематический параметр; $G_{12} = G_1 / G_2 = 1 \div 5$ — отношение модулей сдвига материалов капли и матрицы; $K_{12} = K_1 / K_2 = 5/6$ — отношение коэффициентов объемного сжатия материалов капли и матрицы; $m_1 \approx 4$, $m_2 = 2,6$ — числа Пуассона материалов капли и матрицы; $r_1 = 2,0 \div 3,2$ — безразмерное расстояние между центрами капель; $l = 4$, $r_3 = 8$, $r_2 = r_1/2 + 1 + l + r_3$ — параметры, определяющие границу области D ; $\Gamma = \gamma_0 / (\pi r_0 k_0) = 8000/\pi \div 80\,000/\pi$ — отношение напряжений, вызванных влиянием поверхностного натяжения капель, к напряжениям, обусловленным наличием у материала матрицы предела текучести.

4. Постановка задачи. Вследствие малости параметра $Re' = V_0 r_0 / \nu_1 = 10^{-6} \div 10^{-5}$ нелинейные конвективные члены в уравнении для завихренности можно опустить. Тогда это уравнение принимает вид [9]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{Re H^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \nu \omega) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r \nu \omega) \right) \right] = G.$$

Регуляризованная функция вязкости $\nu(|D|)$ имеет вид [10]

$$\nu = \begin{cases} \alpha + 1/(\sqrt{2}|D|), & |D| > 3\delta/2, \\ f(|D|), & \delta/2 \leq |D| \leq 3\delta/2, \\ \alpha + 1/(\sqrt{2}\delta), & |D| < \delta/2. \end{cases}$$

Здесь δ — малое число; величина $|D|$ определяется формулами (10)–(13); $f(|D|)$ — полином пятой степени, осуществляющий “склеивку” значений функции $\nu(|D|)$, а также ее первых и вторых производных в точках $|D| = \delta/2$ и $|D| = 3\delta/2$:

$$\begin{aligned}f(|D|) &= \alpha + 1/(\sqrt{2}\delta) - 17\sqrt{2}(|D| - \delta/2)^3/(27\delta^4) + \\ &\quad + 35\sqrt{2}(|D| - \delta/2)^4/(54\delta^5) - 5\sqrt{2}(|D| - \delta/2)^5/(27\delta^6).\end{aligned}$$

Правая часть уравнения для завихренности определяется выражением

$$\begin{aligned}G &= \frac{2}{Re H^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \left(-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{rH^3} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \nu}{\partial y} \left(-\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{rH^3} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \nu}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{rH^3} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \nu}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rH} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{rH^3} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = H^2 \omega.$$

Таблица 2

Значения эмпирической функции $L(r_1)$

r_1	L	r_1	L	r_1	L
2,0	4,0195	2,5	2,4182	3,0	1,8464
2,1	3,5871	2,6	2,2563	3,1	1,7802
2,2	3,1926	2,7	2,1243	3,2	1,7231
2,3	2,8724	2,8	2,0152	—	—
2,4	2,6191	2,9	1,9238	—	—

Граничные условия для функции тока и завихренности следующие:

$$\begin{aligned}
 y = 0: \quad \Psi &= 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \\
 x = 0: \quad \Psi &= 0, \quad \omega = 0, \\
 y = Y: \quad \Psi &= V(t)r^2/2, \quad \omega = 0, \\
 x = 1: \quad \Psi &= V(t)r^2/2, \quad \omega = 0.
 \end{aligned}$$

(система координат движется вместе с каплей). Здесь первая пара условий — условия прилипания на границе Γ_1 , вторая — условия симметрии на границе Γ_2 , третья пара — условие движения границы Γ_3 со скоростью $V(t)$ для функции тока и условие симметрии для завихренности, последняя пара — условия симметрии на прямолинейном участке границы Γ_4 , т. е. при $r = 0$, и условия твердотельного движения со скоростью $V(t)$ на криволинейном участке границы Γ_4 , т. е. при $r > 0$.

Начальные условия:

$$t = 0: \quad \Psi = 0, \quad \omega = 0, \quad V(t) = 0.$$

Скорость капли $V(t)$ вычисляется следующим образом. Пусть $T_{yy}^{(2)}$ — нормальная компонента тензора напряжений в матрице на поверхности капли, являющегося решением задачи об упругом равновесии среды, содержащей две капли, обладающие поверхностным натяжением. Тогда суммарная сила, обусловленная действием этих напряжений, равна

$$F_{z1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T_{yy}^{(2)} \cos x \sin x dx.$$

В работе [2] выведена приближенная формула

$$F_{z1} \approx \frac{48\Gamma(G_{12} - 1)(m_2 - 2)(m_2 + 1)r_1^{-7}L(r_1)}{(2m_2 - 4 + K_{12}(m_2 + 1))((7 + 8G_{12})m_2 - 5 - 10G_{12})}$$

(безразмерные параметры Γ , G_{12} , K_{12} , m_2 описаны в п. 3). Значение этого выражения для любого фиксированного значения r_1 является максимальным при $m_2 = 2,569\,712\,266$ и максимальном для этого значения m_2 значении параметра G_{12} . Значения эмпирической функции $L(r_1)$ представлены в табл. 2.

При $m_2 \geq 3$ величина F_{z1} слабо зависит от m_2 , поэтому оптимизацию решения по параметру m_2 проводить не нужно. Положим $m_2 = 2,6$. Номинальным значением G_{12} является $G_{12} = 2$ (тогда $m_1 = 4$). При $m_2 < 2,6$ значения F_{z1} , меньшие по сравнению со значениями F_{z1} при $m_2 = 2,6$, можно получить, уменьшая параметр G_{12} , а большие — увеличивая его. Вообще говоря, допустимыми являются значения $G_{12} \in (1, 5)$, но оптимизацию будем проводить в более узком диапазоне $G_{12} \in [2, 4]$.

Выражения для нормальных и касательных напряжений на границе капли, обусловленных наличием гидродинамического течения вокруг нее, имеют вид

$$P_{yy} = -p, \quad P_{xy} = \nu\omega,$$

где p — гидродинамическое давление:

$$p = \int_0^x \frac{1}{r} \frac{\partial(r\nu\omega)}{\partial y} dx.$$

Составляющие силы, обусловленные наличием нормальных и касательных напряжений в гидродинамическом течении вокруг капли, равны

$$G_{z1} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 P_{yy} \frac{\partial r}{\partial x} r dx, \quad G_{z2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 P_{xy} \frac{\partial r}{\partial y} r dx.$$

Суммарная сила, действующая на каплю, определяется по формуле

$$G'_z = \xi(z_2)F_{z1} + (1 - \xi(z_2))G_{z1} + G_{z2},$$

где

$$\xi(z_2) = \begin{cases} 1 - z_2, & z_2 < 1, \\ 0, & z_2 \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

доля неразрушенных молекулярных связей в матрице, за счет которых она приобрела свойства твердого тела. Из (14) следует, что эта величина линейно зависит от расстояния, пройденного каплей, и обращается в нуль, когда оно становится приближенно равным размеру одной молекулы воды. Заметим, что сила F_{z1} является разгоняющей, сила G_{z2} — тормозящей, а сила G_{z1} может быть как разгоняющей, так и тормозящей.

Скорость капли определяется по формуле

$$V(t) = A \int_0^t G'_z(t) dt.$$

Расстояние, пройденное каплей, равно

$$z_2(t) = B \int_0^t V(t) dt.$$

Пусть t_c — момент времени, в который значение $|D|$ во всей области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq Y$ становится меньше $\delta/2$. Тогда средняя скорость капли в течение одного цикла определяется соотношением

$$\tilde{V}_c = V_0 \frac{z_2(t_c)}{Bt_c}.$$

В эксперименте с каплями подсолнечного масла установлено, что при $r_1 = 3$ $\tilde{V}_c = 1,8925 \cdot 10^{-7}$ м/с, при $r_1 = 2,8$ $\tilde{V}_c = 2,4752 \cdot 10^{-7}$ м/с, а при $r_1 = 2,6$ $\tilde{V}_c = 2,6274 \cdot 10^{-7}$ м/с. Таким образом, поставлена задача о подборе параметров G_{12} , k_0 , z_0 , обеспечивающих вычисление значений средней скорости, максимально близких к трем заданным экспериментальным значениям. Набор этих параметров, доставляющий минимум некоторому функционалу (см. п. 5), будем называть оптимальным.

Численный метод решения задачи подробно описан в работе [3].

В качестве тестового примера решена задача о движении капли при большом значении r_1 на постоянной сетке, т. е. проведен расчет процесса сближения капель без учета их гидродинамического взаимодействия. Результаты расчета совпали с приведенными в работе [3].

5. Порядок расчетов и их результаты. Несмотря на то что путем введения параметра δ выполнена регуляризация задачи, она является плохо обусловленной вследствие малости параметра $\alpha \sim 10^{-3}$. В [3] показано, что вследствие малости временного шага и большого числа разбиений области время расчета одного варианта при таком значении α составляет порядка 1 сут. Если заменить приведенное выше значение α на значение $\alpha = 0,1$, то время расчета одного варианта составит порядка 1 мин, при этом значения средней скорости будут различаться лишь на 10 %.

При расчете одного варианта задавались следующие исходные данные: $\alpha = 0,1$, $N = 24$, $M = 24$, $r_0 = 0,005$ м, $k_0 = 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 2 \div 4$, $z_0 = 3 \cdot 10^{-10} \div 7 \cdot 10^{-10}$ м, $r_1 = 2 \div 3$, безразмерный временной шаг $\tau = 10^{-4}$, относительная точность решения задачи для функции тока $\varepsilon = 10^{-9}$.

В расчетах определялся минимум функционала

$$F_* = [0,25(\tilde{V}_c|_{r_1=2,6} - 2,6274 \cdot 10^{-7})^2 + 0,75(\tilde{V}_c|_{r_1=2,8} - 2,4752 \cdot 10^{-7})^2 + (\tilde{V}_c|_{r_1=3} - 1,8925 \cdot 10^{-7})^2] \cdot 10^{14}. \quad (15)$$

При этом подгоночные параметры задачи принимали следующие значения: $k_0 = 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-4}$; $4 \cdot 10^{-4}$; $5 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 2,0$; $2,5$; $3,0$; $3,5$; $4,0$, $z_0 = 3 \cdot 10^{-10}$; $4 \cdot 10^{-10}$; $5 \cdot 10^{-10}$; $6 \cdot 10^{-10}$; $7 \cdot 10^{-10}$ м. Таким образом задача решалась $3 \cdot 125 = 375$ раз.

При поиске минимума функционала, заданного формулой (15), при $\delta = 0,2$ на приведенном выше множестве подгоночных параметров оптимальным оказался следующий набор параметров: $k_0 = 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 3,5$, $z_0 = 6 \cdot 10^{-10}$ м. Однако при расчете зависимости скорости капель от времени оказалось, что при $r_1 = 2,2$; $2,3$ счет является неустойчивым. Затем была решена аналогичная задача оптимизации при $\delta = 0,3$. При этом оптимальным оказался набор параметров $k_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 4$, $z_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ м. При этом $\tilde{V}_c|_{r_1=2,6} = 2,8309 \cdot 10^{-7}$ м/с, $\tilde{V}_c|_{r_1=2,8} = 2,3116 \cdot 10^{-7}$ м/с, $\tilde{V}_c|_{r_1=3} = 1,9475 \cdot 10^{-7}$ м/с, $F_* = 3,9440 \cdot 10^{-2}$.

Ниже приведены результаты расчетов для оптимального набора параметров k_0 , G_{12} , z_0 . На рис. 3 представлена зависимость безразмерного расстояния z_2 , пройденного каплей с момента начала цикла, от времени t при различных значениях r_1 . Результаты сравнения рис. 3 в настоящей работе и рис. 3 в работе [3] показывают, что при $r_1 \geq 2,4$ полученное в настоящей работе расстояние, пройденное каплей в течение одного цикла, больше, чем в работе [3], но длительность одного цикла меньше. При этом отношение данных параметров приблизительно одно и то же. Указанное несоответствие объясняется различием значений оптимальных параметров k_0 и z_0 , а также учетом в данной работе гидродинамического взаимодействия капель. (В настоящей работе для обеспечения хорошего соответствия между расчетными и экспериментальными данными при наличии гидродинамического взаимодействия капель параметр γ_0 был увеличен с 0,02 до 0,04 Н/м.) На рис. 3 видно, что расстояние, пройденное каплей в течение одного цикла, сначала монотонно увеличивается, а на заключительной стадии сближения резко уменьшается (кривые 6, 7 на рис. 3) вследствие гидродинамического влияния второй капли.

На рис. 4 представлена форма зоны, в которой среда ведет себя как жидкость, при $r_1 = 2,5$. В случае $t = 0,01$ (кривая 2) максимальное значение функции $|D|$ равно $D_{\max} = 23,6$, а в случае $t = 0,04$ (кривая 3) $D_{\max} = 3,34$. Движение капли прекратилось при $t = 1,1173$.

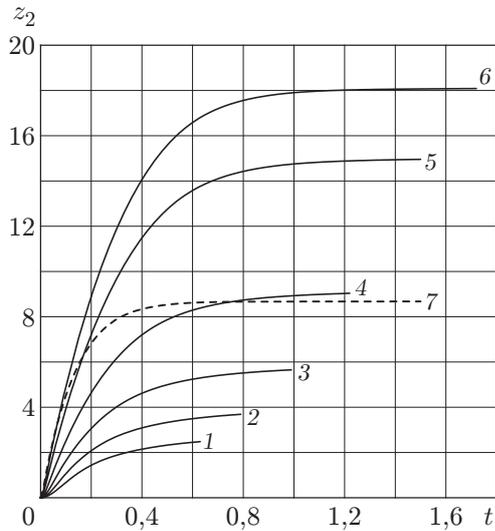


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость безразмерного расстояния, пройденного каплей, от безразмерного времени в течение одного цикла при различных значениях r_1 :

1 — $r_1 = 3$, 2 — $r_1 = 2,8$, 3 — $r_1 = 2,6$, 4 — $r_1 = 2,4$, 5 — $r_1 = 2,2$, 6 — $r_1 = 2,1$, 7 — $r_1 = 2,01$

Рис. 4. Схема движения капли при $r_1 = 2,5$:

1 — граница области течения, 2, 3 — граница зоны, в которой среда ведет себя как жидкость (2 — $t = 0,01$, 3 — $t = 0,04$)

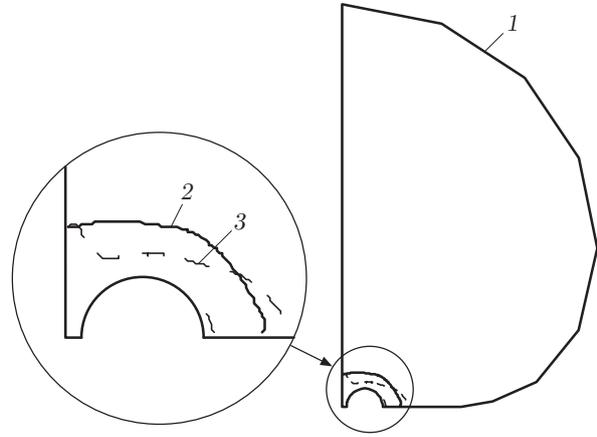


Рис. 4

Сравнение рис. 2, б и 4 показывает, что в зоне, в которой среда ведет себя как жидкость, в начале процесса сближения каплей сетка является достаточно подробной.

Следует отметить, что начиная с некоторого момента времени часть границы Γ_1 , примыкающая к Γ_4 , становится “твердой”, т. е. на ней $|D| < \delta/2$. Тем не менее капля считается движущейся до тех пор, пока не станет “твердой” вся область течения.

Ниже приведено макроскопическое описание движения каплей. Вследствие малости параметров $V_0 = 10^{-6}$ м/с, $t_0 = 10^{-2}$ с не имеет смысла рассматривать все циклы движения каплей. Достаточно ограничиться дискретным набором из 11 значений средней по циклу скорости \tilde{V}_c в точках $r_{1k} = 3 - 0,1k$, $k = 0, 10$ (r_{1k} — безразмерное расстояние между центрами каплей). Если $\tilde{V}_c(r_1)$ — функция средней размерной скорости, зависящей от r_1 , t — макроскопическое время, измеряемое в секундах, то для определения функции $r_1(t)$ имеем дифференциальное уравнение

$$r_0 \frac{dr_1}{dt} = -2\tilde{V}_c(r_1),$$

решая которое находим

$$t(r_1) = \frac{r_0}{2} \int_{r_1}^3 \frac{dr_1}{\tilde{V}_c(r_1)}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) вместо r_1 дискретные значения r_{1k} и вычисляя интеграл методом трапеций, получаем набор дискретных значений t_k , $k = 0, 10$.

На рис. 5 приведены экспериментальная и расчетная зависимости $r_1(t)$. Видно, что эти зависимости различаются незначительно. Уменьшение средней скорости движения

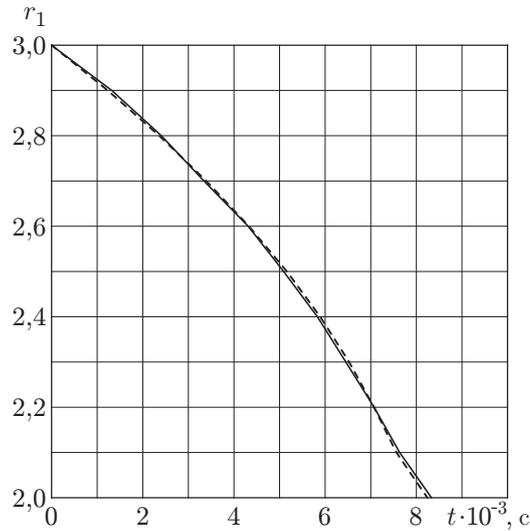


Рис. 5. Зависимость безразмерного расстояния между центрами капель от времени: сплошная линия — экспериментальные данные, штриховая — результаты расчетов

капель при $r_1 < 2,1$ наблюдается не только на рис. 5, но и на рис. 3. Безразмерную среднюю скорость движения капли можно определить как тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и конечную точку графика $z_2(t)$. Из рис. 3 следует, что эта величина монотонно возрастает при уменьшении r_1 с 3,0 до 2,1 и резко уменьшается при уменьшении r_1 с 2,1 до 2,01. Это обусловлено тем, что при $r_1 = 2,01$ расстояние, пройденное каплей в течение одного цикла, значительно меньше.

Несмотря на то что подгонка результатов расчета под экспериментальные данные проводилась на начальном участке сближения капель, они хорошо согласуются на всем участке сближения, что свидетельствует об адекватности теоретической модели.

Заключение. Предложен метод расчета процесса сближения двух одинаковых масляных капель, находящихся в равноплотном спиртово-водном растворе (матрице), рассматриваемом как жидкость Бингама. Капли считаются упругими твердыми телами. На основе выполненных оценок и расчетов установлено, что капли движутся циклически в режиме покой — разгон — торможение с временем цикла порядка 10^{-2} с и средней скоростью порядка 10^{-6} м/с. При расчете силы, действующей на каплю, вводится функция ξ расстояния z_2 , пройденного каплей с момента начала цикла, определяющая долю неразрушенных молекулярных связей в матрице и обращающаяся в нуль после прохождения каплей расстояния z_0 порядка размера одной молекулы воды. Сила, созданная нормальными напряжениями в данный момент времени, определяется как сумма силы, созданной этими напряжениями в состоянии покоя, с коэффициентом $\xi(z_2)$ и силы, созданной ими под влиянием гидродинамического течения в матрице в тот же момент времени, с коэффициентом $1 - \xi(z_2)$. Сила, созданная касательными напряжениями, определяется решением гидродинамической задачи. Влияние второй капли учитывается как при расчете нормальных напряжений упругого взаимодействия в состоянии покоя, так и при расчете гидродинамического течения. Построено 11 ортогональных разностных сеток в области течения, осуществлена оптимизация процесса сближения капель по трем параметрам и выбраны значения этих параметров, согласующиеся с экспериментальными данными о динамике движения капель. Значение каждого из этих параметров находится в узком диапазоне: предел текучести матрицы $k_0 = 10^{-4} \div 10^{-3}$ Па (границы известны из других экспериментов); соотношение модулей сдвига масла и спиртово-водного раствора $G_{12} = 1 \div 5$ (границы

заданы с учетом результатов теоретического анализа, выполненного в работе [3]); значение $z_0 \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м (размер одной молекулы воды). В расчетах диапазоны значений первых двух параметров сужались: $k_0 = 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 2 \div 4$, а значение z_0 варьировалось в диапазоне $3 \cdot 10^{-10} \div 7 \cdot 10^{-10}$ м. При оптимальных значениях параметров $k_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ Па, $G_{12} = 4$, $z_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ м построена расчетная зависимость расстояния между центрами капель от времени и показано, что она хорошо согласуется с экспериментальной кривой.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву и В. В. Шелухину за полезные обсуждения рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стебновский С. В.** Термодинамическая неустойчивость дисперсных сред, изолированных от внешних воздействий // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 53–58.
2. **Пивоваров Ю. В.** Вычисление силы взаимодействия двух капель, находящихся в пластической среде // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 100–114.
3. **Пивоваров Ю. В.** Расчет движения сферической капли в среде Бингама // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 83–96.
4. **Веретенцев В. А.** Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного отображения // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989. С. 88–93.
5. **Пивоваров Ю. В.** О построении ортогональной разностной сетки в криволинейном четырехугольнике // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 94–101.
6. **Лисейкин В. Д.** Алгебраический метод построения разностных сеток: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2002.
7. **Лисейкин В. Д.** Метод алгебраической адаптации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 10. С. 1692–1709.
8. **Самарский А. А.** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. М.: Наука, 1978.
9. **Пивоваров Ю. В.** Расчет движения жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 3. С. 87–107.
10. **Malek J., Ruzicka M., Shelukhin V. V.** Herschel — Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2005. V. 15, N 12. P. 1845–1861.

*Поступила в редакцию 26/III 2013 г.,
в окончательном варианте — 15/XI 2013 г.*