ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 517.946

МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В работе строятся точные неотрицательные решения уравнения нелинейной диффузии $u_t = \Delta(u^m)$, где Δ — лапласиан в R^n, $n \geq 2$, m — положительная постоянная. Эти решения образуют n-параметрическое семейство и соответствуют начальным данным в виде конечной или бесконечной меры. В случае $0 < m < 1$ ее носитель есть гиперплоскость в R^n, а при $m > 1$ начальная мера сосредоточена в области, ограниченной поверхностью второго порядка в R^l, $l < n$. Построенные решения являются обобщением известных решений типа источника для уравнения пористой среды и уравнения быстрой диффузии, но в отличие от последних, вообще говоря, не обладают свойством автомодельности. Приводятся также примеры «несимметричных» точных решений для уравнения $u_t = \Delta \ln u$ с начальными данными в виде меры; обсуждаются свойства их симметризации с течением времени.

1. Рассмотрим неотрицательные решения $u(x,t)$ задачи Коши

$$u_t = \Delta(u^m), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \quad t > 0; \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^n, \tag{1.2}$$

где Δ — лапласиан по переменным $x_1, \ldots, x_n$; $m = \text{const} > 0$; $u_0(x)$ — заданная неотрицательная функция. Уравнение (1.1), в котором t обозначает время, а размерность пространства $n \leq 3$, встречается во многих приложениях. В частности, оно описывает процесс диффузии (теплопроводности) в среде, коэффициент диффузии (теплопроводности) которой есть степенная функция концентрации (температуры).

Если $m > 1$, уравнение (1.1) принято называть уравнением пористой среды. В этом случае функция u отождествляется с плотностью политропного газа в изоэнтропическом процессе его фильтрации сквозь однородную пористую среду. Для уравнения пористой среды характерна конечность скорости распространения возмущений по нулевому фону [1], что резко отличает его от линейного уравнения теплопроводности ($m = 1$). Такая ситуация возникает в случае, когда носитель функции u_0 не совпадает со всем пространством R^n. При этом, вообще говоря, задача (1.1), (1.2) не имеет классического решения. Изучению обобщенных решений указанной задачи посвящена обширная литература (см., например, работу [2] и библиографии к ней).

Если же $0 < m < 1$, то уравнение (1.1) называется уравнением быстрой диффузии. Такие уравнения возникают, в частности, в физике плазмы и в физике полупроводников. Для уравнения быстрой диффузии типичным является свойство обращения неотрицательного решения задачи Коши в нуль за конечное время [3] (см. также [4] и имеющиеся там ссылки).

2. Далее предполагается, что $n \geq 2$. Рассмотрим сначала задачу (1.1), (1.2) в случае $m > 1$. Среди ее решений специальный интерес представляют решения типа источника, соответствующие начальным данным вида

$$u_0 = M\delta(x), \tag{2.1}$$

где $M = \text{const} > 0$, а $\delta(x)$ — мера Дирака, и образующие при фиксированных m и n однопараметрическое семейство с параметром M. Решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) построено в [5]. Оно является автомодельным и выражается в элементарных функциях. Оказывается, что данное решение дает главный член асимптотики при $t \to \infty$ обобщенного решения исходной задачи Коши (1.1), (1.2) в предположении, что норма в $L_1(R^n)$ финитной функции u_0 конечна и равна M [6]. При этом имеет место закон сохранения массы:

$$\int\limits_{R^n} u(x,t)\,dx = \int\limits_{R^n} u_0(x)\,dx = M. \tag{2.2}$$

Единственность решения задачи (1.1), (1.2), (2.1) установлена в [7]. Там же доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (1.1), (1.2) с произвольной конечной мерой в правой части условия (1.2). Однако никаких примеров точных решений задачи (1.1), (1.2) с начальными данными в виде меры, кроме указанного выше, до последнего времени известно не было. Ниже строится n-параметрическое семейство таких решений.

3. Дальнейшие построения основаны на следующем утверждении, вытекающем из результатов [8, 9]. Пусть вектор-функция $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, t образует достаточно гладкое в некотором цилиндре $Q_T = \{\xi, t : \xi \in \Omega,\ t \in (0,T)\}$ решение системы

$$N^*\mathbf{X}_t = -m(m-1)^{-1}\nabla_\xi\left(|N|^{-m+1}\right). \tag{3.1}$$

Здесь $|N|$ — определитель матрицы Якоби N с элементами $N_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$. Предположим, что в области Ω пространства ξ отображение $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi,t)$ взаимно однозначно при каждом $t \in [0,T)$ и что $|N| > 0$ для $(\xi,t) \in Q_T$. Тогда формулы

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi,t), \qquad u = |N(\xi,t)|^{-1} \tag{3.2}$$

дают параметрическое представление решения уравнения (1.1).

Займемся построением точного решения системы (3.1), имеющего вид

$$X_i = \alpha_i(t)Y_i(\xi), \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.1) приводит к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{d\alpha_i}{dt} Y_i \frac{\partial Y_i}{\partial \xi_k} = \frac{m}{m-1}\Big(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^{-m+1} \frac{\partial}{\partial \xi_k}(A^{-m+1}),$$

где $k = 1,\ldots,n$; $A = \det\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \xi_k}\right)$. Подчиним неизвестные функции $\alpha_i(t)$ системе уравнений

$$\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} = \ldots = \alpha_n \frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{2m}{m-1}\Big(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^{-m+1}. \tag{3.4}$$

Тогда соотношения, связывающие функции $\alpha_i(t)$ и $Y_i(\xi)$, будут удовлетворены тождественно, если положить

$$A = \Big(C - \sum_{i=1}^{n} Y_i^2\Big)^{\frac{-1}{m-1}}$$

($C = \mathrm{const} > 0$). Функции Y_i при этом могут быть выбраны с большим произволом, но сама по себе их зависимость от ξ не представляет особого интереса, так как для нахождения решения $u(x,t)$ уравнения (1.1) достаточно знать $|N|$ как функцию $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi, t)$ и t. Используя формулы (3.2), (3.3) и выражение A в терминах Y_i, находим

$$u = \Big(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)^{-1}\Big(C - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2}\Big)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{3.5}$$

Здесь функции $\alpha_i(t)$ определяются из системы (3.4). Ниже ограничимся неотрицательными решениями этой системы, что гарантирует неотрицательность функции $u(x,t)$.

Равенство (3.5) задает решение уравнения (1.1) внутри эллипсоида $E_n(t)$ с центром в начале координат и полуосями $C^{1/2}\alpha_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Продолжая нулем функцию $u(x,t)$ во внешность $E_n(t)$, получим обобщенное решение уравнения (1.1), определенное во всем пространстве.

Система (3.4) обладает $n-1$ первыми интегралами:

$$\alpha_j^2 = \alpha_n^2 + \gamma_j, \qquad j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.6}$$

где γ_j — постоянные. Будем считать все величины γ_j неотрицательными, что дает возможность построить решение указанной системы, определенное для любого $t > 0$ и такое, что $\alpha_n(0) = 0$. Кроме того, без потери общности можно предположить, что

$$\gamma_{n-1} \le \gamma_{n-2} \le \cdots \le \gamma_1. \tag{3.7}$$

Определим функцию $\alpha_n(t)$ при $t > 0$ как обращение квадратуры

$$\int_0^{\alpha_n} \beta^m \Big[\prod_{j=1}^{n-1}(\beta^2 + \gamma_j)\Big]^{\frac{m-1}{2}} d\beta = \frac{2mt}{m-1}, \tag{3.8}$$

а величины α_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ — как положительные корни уравнений (3.6). Тогда совокупность функций $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ образует решение задачи Коши

$$\alpha_j(0) = \gamma_j^{1/2} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n-1; \qquad \alpha_n(0) = 0$$

для системы (3.4).

Предположим, что все неравенства (3.7) строгие и $\gamma_{n-1} > 0$. В этом случае равенство (3.5) определяет n-параметрическое семейство решений уравнения (1.1). Здесь, согласно (3.6), все полуоси эллипсоида $E_n(t)$ различны и $C^{1/2}\alpha_n(t)$ является наименьшей из них. Вследствие (3.8) асимптотика функции α_n при $t \to 0$ имеет вид

$$\alpha_n = \Big[\frac{2m(m+1)}{m-1}\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\Big)^{\frac{m-1}{2}} t\Big]^{\frac{1}{m+1}} + O(t^{\frac{2}{m+1}}).$$

Перейдя теперь в решении (3.5) к пределу при $t \to 0$, получим

$$u(x,t) \to K_{m,0}\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\Big)^{-1/2}\Big[\Big(C-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{x_j^2}{\gamma_j}\Big)_+\Big]^{\frac{m+1}{2(m-1)}}\delta(x_n), \qquad (3.9)$$

если $t \to 0$. Здесь $\delta(x_n)$ — мера Дирака; r_+ обозначает $\max(r,0)$;

$$K_{m,0} = 2\int_0^1 (1-\eta^2)^{\frac{1}{m-1}}\,d\eta.$$

Итак, нами построено решение задачи Коши для уравнения пористой среды с начальными данными в виде меры, сосредоточенной внутри эллипсоида $E_n(0)$ размерности $n-1$. Начальное условие (3.9) выполняется в смысле распределений. Полученное решение задачи Коши (1.1), (3.9) единственно в надлежащим образом определенном классе ее обобщенных решений. Этот результат следует из общей теоремы единственности [7].

Решение (3.5) является далеко идущим обобщением решения типа источника для уравнения пористой среды. С другой стороны, это решение обобщает полученное в [10] решение уравнения $u_t = \Delta(u^2)$, квадратичное по пространственным переменным.

Пусть теперь $\gamma_{n-1} = \ldots = \gamma_{n-l} = 0$, но $\gamma_{n-l-1} > 0$, где $1 \le l \le n-2$. Тогда начальное распределение (1.2), соответствующее решению (3.5), представляет собой меру вида

$$u_0 = K_{m,l}\Big(\prod_{j=1}^{n-l-1}\gamma_j\Big)^{-1/2}\Big[\Big(C-\sum_{j=1}^{n-l-1}\frac{x_j^2}{\gamma_j}\Big)_+\Big]^{\frac{2+(l+1)(m-1)}{2(m-1)}}\delta(x_{n-l})\ldots\delta(x_n),$$

где
$$K_{m,l} = \Omega_{l+1}\int_0^1 (1-\eta^2)^{\frac{1}{m-1}}\eta^l\,d\eta$$

(Ω_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n). Сингулярный носитель этой меры имеет размерность $n-l-1$ (подразумеваем, что $n \ge 2$). Само решение (3.5) в этом случае инвариантно относительно группы вращений в пространстве R^{l+1} и поэтому содержит лишь $n-l$ свободных параметров.

Наконец, если все числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1}$ равны нулю, решение (3.5) становится инвариантным относительно полной группы вращений в R^n и превращается в известное решение Г. И. Баренблатта [5], отвечающее начальным данным

$$u_0 = K_{m,n-1}C^{\frac{2+n(m-1)}{2(m-1)}}\delta(x).$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция в R^n. Попутно указанное решение приобретает свойство автомодельности, которого лишены решения (3.5), если хотя бы одна из постоянных γ_j отлична от нуля.

4. Обратимся к уравнению быстрой диффузии, т. е. к уравнению (1.1), в котором $0 < m < 1$. Действуя по аналогии с п. **3**, получим семейство решений (1.1) вида

$$u = \Big(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^{-1}\Big(C+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2}\Big)^{\frac{-1}{1-m}}. \qquad (4.1)$$

Функции $\alpha_i(t)$ здесь по-прежнему связаны соотношениями (3.6), однако зависимость $\alpha_n(t)$ будет различной при $m < 1-2/n$ и $m \ge 1-2/n$. Рассмотрим сначала случай

$$m \geq 1 - 2/n \tag{4.2}$$

(если $n = 2$, то неравенство (4.2) обязано быть строгим). Тогда функция $\alpha_n(t)$, удовлетворяющая условию $\alpha_n(0) = 0$, определяется равенством

$$\int_0^{\alpha_n} \beta^m \Big[\prod_{j=1}^{n-1}(\beta^2 + \gamma_j)\Big]^{-\frac{1-m}{2}} d\beta = \frac{2mt}{1-m}. \tag{4.3}$$

В силу (4.2) функция $\alpha_n(t)$ определена и положительна для всех $t \to 0$, причем $\alpha_n \to \infty$, когда $t \to \infty$.

Если все неравенства (3.7) строгие и $\gamma_{n-1} > 0$, соотношения (3.6), (4.1), (4.3) определяют n-параметрическое семейство решений уравнения быстрой диффузии. Начальное распределение в этих решениях есть мера

$$u_0 = L_{m,0}\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\Big)^{-1/2}\Big(C + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{x_j^2}{\gamma_j}\Big)^{-\frac{1+m}{2(1-m)}}\delta(x_n), \tag{4.4}$$

где

$$L_{m,0} = 2\int_0^{\infty}(1+\eta^2)^{-\frac{1}{1-m}}.$$

В отличие от решений, рассмотренных в п. **3**, носитель меры (4.4) не является компактным. Однако если неравенство (4.2) строгое, то плотность этой меры, сосредоточенной на гиперплоскости $x_n = 0$, есть функция из класса $L_1(R^{n-1})$. В этом случае решение (4.1) имеет конечную $L_1(R^n)$-норму при любом $t > 0$, и для него выполняется закон сохранения массы (2.2). Если же $m = 1 - 2/n$, $n \geq 3$, то «масса» решения (4.1) бесконечна.

Решение (4.1) уравнения быстрой диффузии с начальными данными вида (4.4) соответствует случаю «общего положения» в пространстве параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Другая крайняя ситуация, когда $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$, отвечает решению (4.1) типа источника. Начальные данные здесь имеют вид

$$u_0 = L_{m,n-1}C^{\frac{2-n(1-m)}{2(1-m)}}\delta(x),$$

где

$$L_{m,n-1} = \Omega_n\int_0^{\infty}(1+\eta^2)^{-\frac{1}{1-m}}\eta^{n-1}d\eta.$$

При этом необходимо предположить, что неравенство (4.2) строгое. В предельном случае ($m = 1-2/n$) решений типа источника уравнение быстрой диффузии не имеет.

Если $n = 2$, то указанными двумя случаями общая ситуация исчерпывается. При $n \geq 3$ возможны промежуточные варианты, когда $\gamma_{n-1} = \ldots = \gamma_{n-l} = 0$, но $\gamma_{n+l-1} > 0$ для $l \in [1, n-2]$. Здесь решение (4.1) приобретает свойство симметрии относительно вращений в пространстве R^{l+1}, но одновременно теряет l из n свободных параметров.

Пусть теперь вместо (4.2) показатель m удовлетворяет неравенствам

$$0 < m < 1 - 2/n$$

(очевидно, это возможно лишь при $n \geq 3$). В этом случае уравнение (1.1) по-прежнему обладает точными решениями вида (4.1), однако зависимость α_n от t вместо (4.3) становится иной:

$$\int\limits_{\alpha_n}^{\infty} \beta^m \Big[\prod_{j=1}^{n-1}(\beta^2+\gamma_j)\Big]^{-\frac{1-m}{2}} d\beta = \frac{2m}{1-m}(\tau - t). \tag{4.5}$$

Здесь

$$\tau = \tau(m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) = \frac{1-m}{2m}\int\limits_0^{\infty} \beta^m \Big[\prod_{j=1}^{n-1}(\beta^2+\gamma_j)\Big]^{-\frac{1-m}{2}} d\beta;$$

для определенности предполагаем, что $\gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_{n-1} > 0$; как и ранее, $\alpha_n(0) = 0$; в то же время $\alpha_j(0) = \gamma_j^{1/2} > 0$ для $j = 1, \ldots, n-1$. Поэтому начальное распределение u_0 снова имеет вид (4.4). Однако в отличие от (4.2) теперь уже решение (4.1) не является положительным при всех $t > 0$. Из (3.6), (4.5) видно, что при $t \to \tau$ функция $u(x,t) \to 0$ равномерно по $x \in R^n$.

5. Рассмотрим снова решения (3.5) уравнения пористой среды, но теперь уже не будем предполагать, что все постоянные γ_j в соотношениях (3.6) неотрицательны. Начальные данные в подобных решениях представляют собой меру с некомпактным носителем, граница которого есть поверхность второго порядка в R^{l+1} с невырожденной квадратичной формой, где $l = 1, \ldots, n-2$ (подразумевается, что $n \geq 2$). Нетрудно показать, что все такие решения разрушаются за конечное время. Не будем анализировать многообразие возникающих здесь ситуаций, а ограничимся примерами точных решений уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(u^2). \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) представляет простейшую многомерную модель уравнения пористой среды. Самостоятельное значение уравнения Буссинеска определяется тем, что оно приближенно описывает процесс плановой фильтрации несжимаемой жидкости в однородном грунте над горизонтальным водоупором. Неотрицательная функция $u(x,y,t)$ определяет уровень грунтовых вод.

Одно из решений уравнения (5.1) имеет вид

$$u = \frac{3[x^2\sin^2\mu(t) - y^2\cos^2\mu(t)]_+}{32\sin^3 2\mu(t)}, \tag{5.2}$$

где функция $\mu(t)$ неявно задается равенством

$$4\mu - \sin 4\mu = 3t.$$

Эта функция монотонно возрастает на интервале $[0, 2\pi/3]$ от значения $\mu = 0$ до $\pi/2$. Данные Коши здесь являются мерой

$$u_0 = \frac{1}{256}(x^3)_+\delta(y), \tag{5.3}$$

сосредоточенной на луче $x \geq 0$, $y = 0$. Свободные границы в решении (5.2) — две полупрямые $y = \pm x \operatorname{tg}\mu(t)$, $x \geq 0$. Когда $t \to 2\pi/3 - 0$, функция $u(x,y,t)$ обращается в бесконечность одновременно во всех точках полуплоскости $x > 0$.

Заметим, что решение (5.2) является автомодельным (инвариантным относительно преобразования растяжения $x' = ax$, $y' = ay$, $u' = a^2u$, где $a = \text{const} > 0$). Эта автомодельность имеет иную природу, чем в решении типа источника, поскольку один из инвариантов указанного преобразования — время t.

Уравнение (5.1) допускает еще одно преобразование растяжения: $t' = bt$, $u' = b^{-1}u$, где $b = \text{const} > 0$. Используя это свойство, можно получить из решения (5.2) однопараметрическое семейство решений с начальными данными вида (5.3), где коэффициент $1/256$ следует заменить на $1/256b$.

Еще одно семейство точных решений уравнения Буссинеска соответствует начальным данным вида

$$u_0 = \left[\left(\frac{x^2}{\gamma} - C\right)_+\right]^{3/2} \delta(y)$$

(γ и C — произвольные положительные постоянные). Свободные границы в этих решениях являются гиперболами на плоскости x, y. Не выписывая данные решения явно, отметим лишь, что для каждого из них существует такое $t_* = t_*(\gamma, C)$, что $u \to \infty$ при $t \to t_* - 0$ сразу во всех точках полуплоскости $x > 0$.

6. Оказывается, что уравнение Буссинеска помимо решений типа (5.2) имеет решения, в которых функция u квадратична по y, но линейна по x. Одно из таких решений дается формулой

$$u = (3A^2t^{1/3} + At^{-1/3}x - y^2/12t)_+ , \tag{6.1}$$

где $A = \text{const} > 0$. Решение (6.1) соответствует начальным данным вида

$$u_0 = 8 \cdot 3^{-1/2}[(Ax)_+]^{3/2}\delta(y). \tag{6.2}$$

Свободная граница в этом решении есть парабола. Само решение существует при всех $t > 0$, несмотря на то что начальная мера (6.2) бесконечна.

Сравнивая решения задач Коши (5.3), (6.2) для уравнения (5.1), видим, что порядок роста при $x \to \infty$ плотности начальной меры, сосредоточенной на полуоси $x > 0$, принципиально влияет на существование решения в целом по t.

Аналоги решения (6.1) существуют для общего уравнения пористой среды (1.1), но на них не останавливаемся.

7. В заключение рассмотрим несколько точных решений уравнения

$$u_t = \Delta \ln u, \tag{7.1}$$

являющегося предельным случаем уравнения быстрой диффузии. При $n = 3$ уравнение (7.1) описывает эволюцию плотности электронного пучка, подчиненного распределению Максвелла, а при $n = 2$ — процесс растекания сверхтонкой пленки жидкости под действием сил Ван-дер-Ваальса. Кроме того, уравнение (7.1) имеет приложения в геометрии.

Ограничив наши рассмотрения случаями $n = 2, 3$, введем обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Одним из решений уравнения (7.1) является функция

$$u = \frac{2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t}{x^2\operatorname{sh}^2t + y^2\operatorname{ch}^2t}. \tag{7.2}$$

Это решение отвечает следующим начальным данным:

$$u_0 = \frac{2\pi\delta(x)}{|y|}. \tag{7.3}$$

Решение (7.2) существует при всех $t > 0$, а при $t \to \infty$ имеет стационарный предел $\hat{u} = 2(x^2 + y^2)^{-1}$. Более того, справедлива оценка

$$\frac{u - \hat{u}}{\hat{u}} = O(\mathrm{e}^{-t})$$

равномерно по $(x, y) \in R^2$, когда $t \to \infty$. Функция $\hat{u}$ является единственным, с точностью до постоянного множителя, стационарным решением уравнения (7.1) на плоскости, инвариантным относительно вращений. Любопытно отметить, что интегралы по любому кольцу $\check{R}_{a,b} = \{x, y : a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$ от начальной функции (7.3) и от предельного стационарного решения $\hat{u}$ совпадают:

$$\iint\limits_{\check{R}_{a,b}} u_0\,dx\,dy = \iint\limits_{R_{a,b}} \hat{u}\,dx\,dy = 4\pi \ln(b/a).$$

Рассмотрим уравнение (7.1) в трехмерном пространстве, оно обладает решением

$$u = \frac{2 \sin t \cos t}{x^2 + \sin^2 t(y^2 + z^2)}. \tag{7.4}$$

Начальные данные здесь имеют вид

$$u_0 = \frac{2\pi\delta(x)}{(y^2 + z^2)^{1/2}}. \tag{7.5}$$

Решение (7.4) неотрицательно в слое $R^3 \times (0, \pi/2)$ и обращается в нуль при $t = \pi/2$. Наряду с (7.4) рассмотрим сферически-симметричное решение уравнения (7.1) с тем же «временем жизни» $\pi/2$:

$$\bar{u} = \frac{\pi - 2t}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Имеет место оценка

$$\frac{u - \bar{u}}{\bar{u}} = O(\pi/2 - t)$$

равномерно по $(x, y, z) \in R^3$, когда $t \to \pi/2 - 0$. Это означает, что к моменту обращения в нуль решение (7.4) успевает симметризоваться. Примечательно, что в данном случае оказываются совпадающими интегралы от начальных функций (7.5) и $\bar{u}_0 = \bar{u}(x, y, z, 0)$ по любому шару $B_a = \{x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$:

$$\iiint\limits_{B_a} u_0\,dxdydz = \iiint\limits_{B_a} \bar{u}_0\,dxdydz = 4\pi^2 a.$$

Примечание. Результаты настоящей работы докладывались на Летнем семинаре по нелинейному анализу (Университет Кэйо, Иокогама, июль 1993 г.). Когда рукопись была подготовлена к печати, автору стало известно, что близкие к изложенным выше результаты получены в работе [11] и в рукописях Е. Р. Косыгиной и В. А. Галактионова, направленных в «Журнал вычислительной математики и математической физики» и журнал «Proceedings of The Royal Society of Edinburgh».

Автор благодарит Е. Р. Косыгину и В. А. Галактионова за предоставленную возможность ознакомиться с результатами их неопубликованных работ, а также выражает признательность А. С. Калашникову и Дж. Р. Кингу за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
2. **Калашников А. С.** Некоторые проблемы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 2. С. 135–176.
3. **Сабинина Е. С.** Об одном классе квазилинейных параболических уравнений, не разрешимых относительно производной по времени // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 5. С. 1074-1100.
4. **Режимы** с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987.
5. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16, вып. 1. С. 67–78.
6. **Friedman A., Kamin S.** The asymptotic behaviour of gas in an n-dimensional porous medium // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 262. P. 551–563.
7. **Pierre M.** Uniqueness of the solutions of $u_t - \Delta\phi(u) = 0$ with initial datum of measure // Nonlinear Analysis (Theory, Methods and Applications). 1982. V. 5, N 2. P. 175–187.
8. **Мейрманов А. М., Пухначев В. В.** Лагранжевы координаты в задаче Стефана // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 90–111.
9. **Gurtin M., MacCamy R. C., Socolovsky E. A.** A coordinate transformation for the porous media equation that renders the free-boundary stationary // Quart. Appl. Math. 1984. V. 42. P. 345–357.
10. **Титов С. С., Устинов В. А.** Исследование многочленных решений уравнений фильтрации газа с целым показателем адиабаты // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Урал. отд-ние. Ин-т математики и механики. 1985. С. 64–70.
11. **King J. R.** Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, pt 3. P. 419–436.

Поступила в редакцию 26/V 1994 г.