УДК 532.582

ДВИЖЕНИЕ ШАРА В ЖИДКОСТИ, ВЫЗЫВАЕМОЕ КОЛЕБАНИЯМИ ДРУГОГО ШАРА

О. С. Пятигорская, В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о движении абсолютно твердого шара в неоднородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости. Колебательные воздействия на жидкость оказываются абсолютно твердым заданно колеблющимся шаром. Получены уточненные условия, при которых шар-включение удаляется от шара-вибратора, приближается к шару-вибратору, не совершает среднего движения. Найдено, что при неоднородных колебаниях жидкости изменение характера движения включения может зависеть от геометрических параметров гидромеханической системы.

Ключевые слова: жидкость, включение, однородные и неоднородные колебания жидкости.

1. Колебательные воздействия на жидкость с включениями могут приводить к эффектам среднего, монотонного движения включений [1–14]. Это обстоятельство может быть использовано для управления включениями в жидкости [5, 10, 15, 16]. Особый интерес представляет проблема управления включениями, имеющими плотность, совпадающую с плотностью жидкости. Эта проблема непосредственно связана с возможностью разделения колебаний жидкости на однородные и неоднородные [17] (см. также [16]).

В [3] поставлена и решена задача о движении абсолютно твердого включения — шара — в неоднородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости, колебательные воздействия на которую оказываются находящимся в ней абсолютно твердым телом-вибратором — заданно колеблющимся шаром. В этой работе обнаружен эффект, состоящий в том, что включение, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, удаляется от тела-вибратора, а включение, плотность которого больше, чем плотность жидкости, приближается к телу-вибратору. В [3] найдено, что, в рассмотренном приближении, включение, плотность которого совпадает с плотностью жидкости, не совершает среднего движения (в среднем покоится). Тем самым работой [3] поставлен вопрос: могут ли колебания жидкости вызывать среднее движение включения, если плотность включения совпадает с плотностью жидкости? В [18] дан положительный ответ на этот вопрос для случая, когда причиной колебаний жидкости является дублет, имеющий изменяющийся со временем момент. Однако, в частности ввиду ясного прикладного значения задач данной области исследований, важно иметь теоретические результаты, эффективно способствующие проведению направленных экспериментальных исследований. Такие результаты должны по возможности точно показывать, каковы условия экспериментов, в которых можно ожидать осуществления обнаруженных теоретически эффектов. Применительно к вопросу, поставленному работой [3], это означает, что теоретические результаты должны содержать параметр размерности длины, характеризующий тело-вибратор (реальное тело-вибратор является протяженным). Ввиду изложенного, в [14] рассмотрена задача о движении абсолютно твердого включения — кругового цилиндра — в неоднородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости, колебательные воздействия на которую оказываются находящимся в ней абсолютно твердым телом-вибратором — заданно колеблющимся круговым цилиндром. В [14], в частности, установлено, что включение, плотность которого совпадает с плотностью жидкости, совершает среднее движение, приближается к телу-вибратору (что находится в соответствии с найденным в [18]). Полученные в [14] формулы, которыми определяется среднее движение включения, содержат радиус тела-вибратора.

В настоящей работе рассмотрена задача о движении абсолютно твердого включения — шара — в неоднородно колеблющейся идеальной несжимаемой жидкости. Колебательные воздействия на жидкость оказываются находящимся в ней абсолютно твердым телом-вибратором — заданно колеблющимся шаром. Постановка задачи отлична от постановки задачи, изложенной в [3]. Реализовано приближение более высокого порядка, чем в [3]. Найдено, что включение, плотность которого совпадает с плотностью жидкости, приближается к телу-вибратору; получены уточненные условия, при которых включение удаляется от тела-вибратора, приближается к телу-вибратору, не совершает среднего движения.

2. В идеальной несжимаемой неограниченной извне жидкости находятся два абсолютно твердых шара. В начальный момент времени t (при $t = 0$) жидкость и шары покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат x, y, z; центры шаров находятся на оси y. В последующие моменты времени первый шар радиуса a_1 — теловибратор — совершает заданные периодические с периодом T поступательные колебания вдоль оси y; второй шар радиуса a_2 — включение — совершает поступательное движение вдоль оси y под действием сил давления жидкости; течение жидкости потенциальное, осесимметричное. Положение первого шара определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_y$$

центра первого шара ($\boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)$; $H = A(1 - \cos(2\pi t/T))$ (A — постоянная)). Положение второго шара определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

центра второго шара ($S > H + a_1 + a_2$). Требуется установить, как движется второй шар.

Пусть S_0 — значение S при $t = 0$; (q_1) и (q_2) — поверхности соответственно первого и второго шаров; $\boldsymbol{n}_1$ — нормаль к (q_1); $\boldsymbol{n}_2$ — единичная внешняя нормаль к (q_2); Φ — потенциал скорости жидкости; P — давление в жидкости;

$$F = -\iint\limits_{(q_2)} P\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{e}_y \, dq_2 \tag{2}$$

— сила, действующая в направлении оси y на второй шар со стороны жидкости; $\rho_{\text{ш}}$ — плотность второго шара; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости; I — произвольная функция t.

Координата S, давление P и потенциал Φ удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$\frac{4}{3}\pi a_2^3 \rho_{\text{ш}} \frac{d^2 S}{dt^2} = F; \tag{3}$$

$$S = S_0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho_{\text{ж}}} = I; \tag{5}$$

$$\Delta\Phi = 0; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \nabla\Phi = \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{e}_y \, \frac{dH}{dt} \qquad \text{на} \quad (q_1); \tag{7}$$

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot \nabla\Phi = \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{e}_y \, \frac{dS}{dt} \qquad \text{на} \quad (q_2); \tag{8}$$

$$\nabla\Phi \to 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty. \tag{9}$$

3. Будем рассматривать задачу (3)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях $\alpha = a_2/S_0$ (значения $\beta = a_1/a_2$ и $\gamma = A/a_2$ не являются малыми или большими по сравнению с единицей).

Применяя изложенный в [19] метод определения потенциала скорости жидкости, найдем решение задачи (6)–(9), которое точно удовлетворяет (6), (9) и приближенно, с точностью до величин, пропорциональных dH/dt и dS/dt, малых соответственно по сравнению с $\alpha^9\, dH/dt$ и $\alpha^9\, dS/dt$, удовлетворяет (7), (8). Используя (2), (5) и указанное решение задачи (6)–(9), получим

$$F = \frac{\pi a_2^4 \rho_{\text{ж}}}{T^2} \Big\{ \frac{2\alpha^3\beta^3}{(s-\alpha h)^3} \Big[1 + \frac{\alpha^6\beta^3}{(s-\alpha h)^6}\Big] \frac{d^2h}{d\tau^2} + \frac{6\alpha^4\beta^3}{(s-\alpha h)^4} \Big[1 - \frac{\alpha^3\beta^3}{(s-\alpha h)^3} - \frac{4\alpha^5\beta^3}{(s-\alpha h)^5}\Big] \Big(\frac{dh}{d\tau}\Big)^2 -$$
$$- \frac{12\alpha^6\beta^3}{(s-\alpha h)^7} \Big[1 + \frac{4\alpha^2\beta^2}{(s-\alpha h)^2}\Big] \frac{dh}{d\tau}\,\frac{ds}{d\tau} - \frac{1}{\alpha} \Big[\frac{2}{3} + \frac{2\alpha^6\beta^3}{(s-\alpha h)^6} + \frac{6\alpha^8\beta^5}{(s-\alpha h)^8}\Big] \frac{d^2s}{d\tau^2} +$$
$$+ \frac{6\alpha^5\beta^3}{(s-\alpha h)^7} \Big[1 + \frac{4\alpha^2\beta^2}{(s-\alpha h)^2}\Big] \Big(\frac{ds}{d\tau}\Big)^2 \Big\}, \tag{10}$$

где $\tau = t/T$; $h = H/a_2 = \gamma(1 - \cos 2\pi\tau)$; $s = S/S_0$.

Предположим, что при $\alpha \to 0$ и постоянных $\tau, \beta, \gamma, \lambda$

$$s \sim s_0 + \alpha s_1 + \ldots + \alpha^{10} s_{10}. \tag{11}$$

Согласно (3), (4), (10), (11) в 0-м, 1-м, …, 10-м приближениях имеем задачи соответственно для $s_0, s_1, \ldots, s_{10}$. Решая указанные задачи, найдем

$$s_0 = 1, \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 0,$$
$$s_4 = s_4', \qquad s_5 = s_5', \qquad s_6 = s_6', \qquad s_7 = s_7',$$
$$s_8 = 3\beta^6\lambda(\lambda - 1) \int\limits_0^\tau d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \Big(\frac{dh}{d\tau''}\Big)^2 d\tau'' + s_8', \tag{12}$$
$$s_9 = 21\beta^6\lambda(\lambda - 1) \int\limits_0^\tau d\tau' \int\limits_0^{\tau'} h\Big(\frac{dh}{d\tau''}\Big)^2 d\tau'' + s_9',$$
$$s_{10} = 84\beta^6\lambda(\lambda - 1) \int\limits_0^\tau d\tau' \int\limits_0^{\tau'} h^2\Big(\frac{dh}{d\tau''}\Big)^2 d\tau'' - 12\beta^6\lambda \int\limits_0^\tau d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \Big(\frac{dh}{d\tau''}\Big)^2 d\tau'' + s_{10}',$$

где $\lambda = 3\rho_{\text{ж}}/(2\rho_{\text{ш}} + \rho_{\text{ж}})$; $s_4', s_5', \ldots, s_{10}'$ — периодические функции τ. Используя (11), (12), получим

$$s = \hat{s} + s'; \tag{13}$$

$$s = \hat{s} + 21\pi^2\alpha^9\beta^6\gamma^3[\lambda - 1 + 5\alpha\gamma(\lambda - 1 - 4/(35\gamma^2))]\tau^2 + s'', \tag{14}$$

где
$$\hat{s} = 1 + 3\pi^2\alpha^8\beta^6\gamma^2\lambda(\lambda-1)\tau^2; \tag{15}$$
s' и s'' — периодические функции τ.

4. Соотношениями (1), (13), (14) приближенно определяется зависимость $\boldsymbol{S}$ от t ((14) имеет повышенную точность в сравнении с (13)). Второй шар, перемещаясь вдоль оси y, совершает колебания и среднее, монотонное движение.

Выражение (15) для $\hat{s}$ совпадает с соответствующим выражением для Y/Y_0, следующим из формул (22), (24) работы [3]. Согласно (13) второй шар при $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{ж}}$ удаляется от первого шара, а при $\rho_{\text{ш}} > \rho_{\text{ж}}$ приближается к первому шару; второй шар в среднем покоится, если
$$\rho_{\text{ш}} = \rho_{\text{ж}}. \tag{16}$$

Формулой (14), в частности, демонстрируется уточненный результат, касающийся поведения второго шара при $\rho_{\text{ш}} = \rho_{\text{ж}}$: второй шар не покоится, а приближается к первому шару.

5. Рассмотрим вопрос о том, при каком условии второй шар не совершает среднего движения.

Предположим, что при $\alpha \to 0$, постоянных τ, β, γ и $\rho_{\text{ш}}/\rho_{\text{ж}} = 1 + a\alpha + b\alpha^2$ (a и b — постоянные)
$$s \sim \sigma_0 + \alpha\sigma_1 + \ldots + \alpha^{10}\sigma_{10}. \tag{17}$$
Согласно (3), (4), (10), (17) в 0-м, 1-м, …, 10-м приближениях имеем задачи соответственно для $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{10}$. Решая указанные задачи, найдем
$$\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_3 = 0, \qquad \sigma_4 = \sigma_4',$$
$$\sigma_5 = \sigma_5', \qquad \sigma_6 = \sigma_6', \qquad \sigma_7 = \sigma_7', \qquad \sigma_8 = \sigma_8',$$
$$\sigma_9 = -2\beta^6 a \int\limits_0^{\tau} d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \left(\frac{dh}{d\tau''}\right)^2 d\tau'' + \sigma_9', \tag{18}$$
$$\sigma_{10} = -2\beta^6(2a^2 - b - 6)\int\limits_0^{\tau} d\tau' \int\limits_0^{\tau'} \left(\frac{dh}{d\tau''}\right)^2 d\tau'' - 14a\beta^6 \int\limits_0^{\tau} d\tau' \int\limits_0^{\tau'} h\left(\frac{dh}{d\tau''}\right)^2 d\tau'' + \sigma_{10}',$$
где $\sigma_4', \sigma_5', \ldots, \sigma_{10}'$ — периодические функции τ. Из (17), (18) следует, что второй шар в среднем покоится, если
$$\rho_{\text{ш}} = (1 - 6\alpha^2)\rho_{\text{ж}} \tag{19}$$
((19) имеет повышенную точность в сравнении с (16)).

Отметим, что (19) может быть получено также из (14).

6. Состояние покоя, определяющееся соотношением (19), разделяет два других состояния качественно различного движения второго шара. Если $\rho_{\text{ш}} \neq (1-6\alpha^2)\rho_{\text{ж}}$, то второй шар при $\rho_{\text{ш}} < (1-6\alpha^2)\rho_{\text{ж}}$ удаляется от первого шара, а при $\rho_{\text{ш}} > (1-6\alpha^2)\rho_{\text{ж}}$ приближается к первому шару. Если $\rho_{\text{ш}} < \rho_{\text{ж}}$, то второй шар удаляется от первого шара при $\alpha < \sqrt{(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ш}})/(6\rho_{\text{ж}})}$ и приближается к первому шару при $\alpha > \sqrt{(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ш}})/(6\rho_{\text{ж}})}$. Это показывает, что при неоднородных колебаниях жидкости изменение характера движения включения может зависеть от геометрических параметров гидромеханической системы.

Полученные результаты указывают на новые возможности управления включениями в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челомей В. Н.** Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
3. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
4. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вибрирующей жидкости // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. С. 87–94.
6. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.
7. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
8. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. № 1. С. 100, 101.
9. **Сенницкий В. Л.** О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.
10. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
11. **Сенницкий В. Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
12. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
13. **Сенницкий В. Л.** О поведении пульсирующего твердого тела в вязкой жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 93–97.
14. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** О движении твердого тела в неоднородно колеблющейся жидкости // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2002. Т. 2, вып. 2. С. 55–59.
15. **Sennitskii V. L.** Vibrational management of inclusions in liquid // 1st Intern. workshop on material processing in high gravity: Program and abstr. Dubna (USSR), 1991.
16. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
17. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Intern. workshop on G-jitter: Proc. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
18. **Lavrenteva O. M.** On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, pt 3. P. 251–263.
19. **Кирхгоф Г.** Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 7/X 2003 г.