

## К ВОПРОСУ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Г. В. Жижин

(Ленинград)

Данная работа — продолжение и развитие [1], где проведены качественное исследование и расчет неизотермического течения Куэтта неньютоновской жидкости под влиянием положительного градиента давления вдоль пластин в выбранном направлении оси  $x$ . Показано, что фазовое пространство течений псевдопластических жидкостей (индекс течения  $n < 1$ ) имеет интегральную поверхность, отвечающую течениям со скоростью вдоль пластин, не зависящей от координаты  $y$ , направленной перпендикулярно пластинам ( $v = du/dy = 0$ ). Физически это соответствует случаю движения всей системы пластины — жидкость с постоянной скоростью (в частности, неподвижной системе). Можно показать, что траектории этой интегральной поверхности есть особые решения исходной системы уравнений и траектории из части фазового пространства  $v < 0$  переходят через интегральную поверхность в часть фазового пространства  $v > 0$ , т. е. неизотермические течения Куэтта под влиянием градиента давления при любом индексе течения могут иметь экстремальный профиль скорости. Для доказательства этого используются фазовые координаты, отличные от применяемых в [1].

Система уравнений, описывающая неизотермические течения Куэтта неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом под влиянием градиента давления, имеет вид

$$(1) \quad \lambda d^2 T / dy^2 + \tau^2 / \mu = 0;$$

$$(2) \quad \tau = \mu du / dy;$$

$$(3) \quad \mu = \mu_1 |du / dy|^{n-1};$$

$$(4) \quad \mu_1 = \mu_0 \exp(-\beta T);$$

$$(5) \quad d\tau / dy = dp / dx = A\delta,$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $\tau$  — касательное напряжение;  $\mu_1$  — эффективная вязкость;  $\mu_0$ ,  $\beta$ ,  $A$  — постоянные параметры;  $\delta = 1$  для течений, в которых давление возрастает вдоль координаты  $x$ ;  $\delta = -1$  для течений, в которых давление уменьшается вдоль координаты  $x$ ;  $\delta = 0$  при отсутствии градиента давления вдоль оси  $x$ .

Уравнение (1) после введения переменной

$$(6) \quad dT / dy = w$$

с учетом уравнений (2)–(4) запишем как

$$(7) \quad dw / dy = -|\tau|^{1-\frac{1}{n}} \mu_0^{-1/n} \exp(T\beta/n).$$

Уравнения (5)–(7) образуют автономную систему дифференциальных уравнений и ее решения могут быть представлены траекториями в трехмерном фазовом пространстве ( $w$ ,  $\tau$ ,  $T$ ). Однако ввиду относительной простоты системы (5)–(7) ее решения без потери общности в целях большей наглядности можно представить траекториями в плоскости ( $w$ ,  $\tau$ ) (рис. 1, где  $a - \delta = 1$ ,  $b - \delta = -1$ ). Пересечению траекториями оси  $w = 0$  соответствует максимум в профиле температуры. В каждой из фазовых плоскостей есть линии, пересечение которых траекториями сопровождается перегибом в профиле скорости. Для нахождения этих линий рассмотрим выражение для второй производной от скорости [1]

$$(8) \quad dv / dy = \beta n^{-1} v w + A\delta (\mu_1 n)^{-1} |v|^{-n} v \operatorname{sign} v.$$

На основании (2), (3) заменим в правой части (8)  $v$  через  $\tau$ :

$$(9) \quad dv / dy = n^{-1} \mu_0^{-1/n} (\beta w \tau |\tau|^{-1+1/n} + A\delta |\tau|^{-1+1/n}) \exp(T\beta/n).$$

Из (9) следует, что независимо от значения  $n$  производная  $dv / dy$  меняет

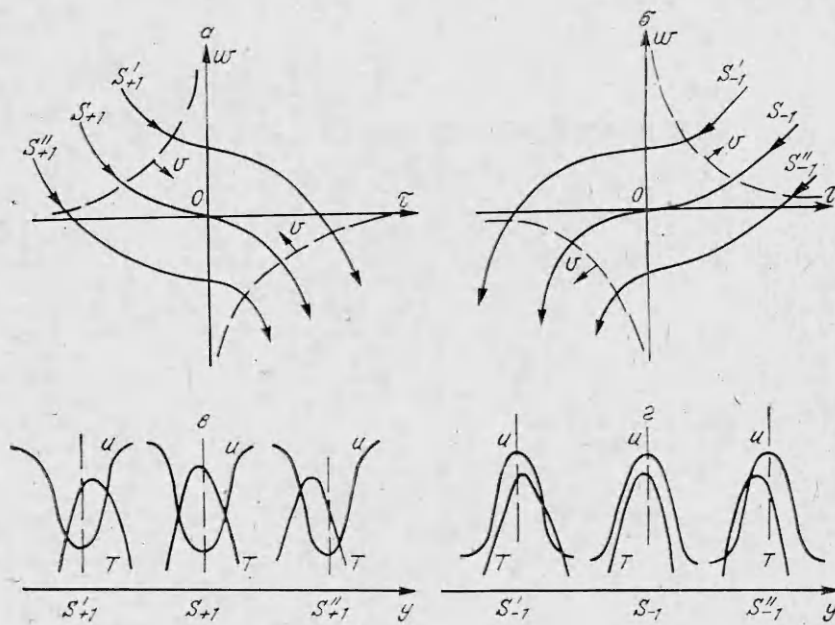


Рис. 1.

знак, переходя через нуль, на линиях  $w = A\delta/(\tau\beta)$ , представляющих собой гиперболы, расположенные во втором и четвертом квадрантах плоскости при  $\delta = 1$  и в первом и третьем — при  $\delta = -1$ . На прямой  $\tau = 0$  производная  $dv/dy$  знака не меняет, а скорость имеет экстремум.

В каждой из фазовых плоскостей существует три типа траекторий —  $S_{+1}, S'_{+1}, S''_{+1}$  на плоскости  $\delta = 1$  и  $S_{-1}, S'_{-1}, S''_{-1}$  на плоскости  $\delta = -1$ , графики изменения температур и скоростей вдоль которых изображены на рис. 1,  $\theta, u$  (при определенных граничных условиях реализуется часть каждой из траекторий и соответствующей интегральной кривой). Они отличаются друг от друга относительным расположением экстремумов в профилях скорости и температуры. Во всех случаях максимум в профиле температуры расположен между точками перегиба в профиле скорости. Из рис. 1 видно, что кроме преобразования симметрии  $y \rightarrow -y, v \rightarrow -v, w \rightarrow -w$ , относительно которого система (1)–(5), как показано в [1], инвариантна, существует еще один вид симметрии решений ее уравнений:

$$x \rightarrow -x, dp/dx \rightarrow -dp/dx, u \rightarrow -u.$$

Из системы (5)–(7) и проведенного анализа следует, что плоскость  $\tau = 0$  в трехмерном фазовом пространстве  $(w, \tau, T)$  неинтегральная и траектории из полупространства  $\tau < 0$  ( $\tau > 0$ ) переходят в полупространство  $\tau > 0$  ( $\tau < 0$ ) при  $\delta = 1$  ( $\delta = -1$ ). Но  $\tau = 0$  только при  $v = 0$ . Значит, переход через плоскость  $\tau = 0$  соответствует рассматриваемому в [1] переходу траекторий через плоскость  $v = 0$  в пространстве  $(w, v, \mu_1)$ . Но плоскость  $v = 0$  в пространстве  $(w, v, \mu_1)$  интегральная при  $n < 1$ . Это может быть только тогда, когда траектории, образующие интегральную плоскость  $v = 0$ , есть особые решения\*. Таким образом, независимо от значений индекса  $n$  профиль скорости в неизотермическом течении Куэтта под влиянием градиента давления может иметь экстремум. Однако графики скорости для течений псевдопластической, ньютоновской и дилатантной жидкостей имеют отличительные особенности. Они связаны с тем, что вторая производная от скорости по независимой переменной в экстремуме

\* В известных автору работах отсутствует изложение общих методов доказательства особенности решений в трехмерных фазовых пространствах (см., например, [2–4]).

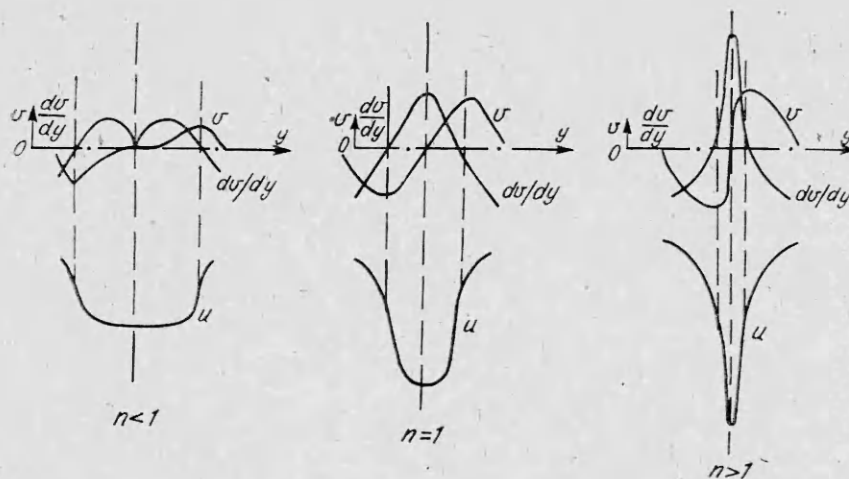


Рис. 2.

профиля скорости этих жидкостей имеет различные значения. Из уравнения (8) вытекает, что для течения ньютоновской жидкости  $dv/dy|_{v=0} = A\delta/u_1$  — конечная величина, псевдопластической жидкости  $dv/dy|_{v=0} = 0$ , дилатантной  $dv/dy|_{v=0} = \infty$ . Профиль скорости с экстремумом у дилатантной жидкости существенно более крутой, чем у ньютоновской, а профиль скорости псевдопластической жидкости более плавный, чем у ньютоновской (рис. 2).

При отсутствии градиента давления ( $\delta = 0$ ) уравнения (5)–(7) интегрируются; их решения получены в [5]. Отличие индекса  $n$  от единицы не вызывает изменения существенного свойства этих течений, обнаруженного в [6] для течений ньютоновской жидкости, — совпадение координаты  $y$  максимума в профиле температуры с координатой  $y$  точки перегиба в профиле скорости и отсутствие экстремума в профиле скорости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жижин Г. В. Неизотермическое течение Куэтта неньютоновской жидкости под влиянием градиента давления. — ПМТФ, 1981, № 3.
2. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Сов. энциклопедия, 1984.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: Физматгиз, 1954.
5. Бостанджиян С. А., Черняева С. М. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении неньютоновской жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3.
6. Каганов С. А., Яблонский В. С. О профиле скорости ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. — Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1.

Поступила 14/II 1985 г.

УДК 532.517.4

### МОДЕЛИРОВАНИЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

П. Г. Фрик  
(Пермь)

Трудности решения уравнений гидродинамики, в частности уравнений термогравитационной конвекции, всегда побуждали использовать там, где это возможно, плоскую постановку задач. Двумерная постановка позволила решить многие задачи и получила особое развитие с внедрением численных методов, так как рассмотрение трехмерных краевых задач даже для простейших случаев остается на грани возможностей современных ЭВМ. Для двумерного случая получены численные решения нестационарных уравнений естественной конвекции при числах Грасгофа, достигающих